L'enseignement des mathématiques en Turquie : le cas des fonctions au lycée et au concours d'entrée à l'université.

Savas Basturk

UNIVERSITE PARIS VII-DENIS DIDEROT

Année 2003

THESE
pour l'obtention du Diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS VII

Spécialité

DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

présentée et soutenue publiquement
le 15 décembre 2003

par

Savaş BAŞTÜRK

L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES EN TURQUIE :le cas des fonctions au lycée et au concours d'entrée à l'université

Directeurs de thèse

Monsieur Jacques COLOMB

Madame Aline ROBERT

Membres du Jury

M. Jacques COLOMB	INRP de Paris	Directeur
M. Jean Luc DORIER	IUFM de Lyon	Rapporteur
Mme Aline ROBERT	IUFM de Versailles	Directeur
Mme Jacqueline ROBINET	Université de Paris VII	Examinateur
Mme Maggy SCHNEIDER	FUNDP de Namur	Rapporteur

Remerciements

Il est très difficile de savoir par qui je vais commencer ces remerciements. Je vais commencer à remercier les deux pays concernés : la Turquie et la France. Je voudrais remercier beaucoup la première qui m'a envoyé faire ces études à l'étranger et je voudrais remercier la deuxième pour son accueil chaleureux et cette merveilleuse occasion de travailler.

Je tiens surtout remercier Madame Aline Robert. J'ai baigné pendant quatre ans dans un univers de recherche studieux, rigoureux, exigeant, riche, largement ouvert. J'ai profité d'un directeur de recherche toujours présent en cas de besoin, très disponible, sachant parfaitement doser ses aides, ses demandes ; elle a été encourageante, positive, amicale, patiente pendant quatre ans sans jamais faiblir.

Je tiens aussi remercier Monsieur Jacques Colomb. Malgré sa maladie, au début et à la fin de la thèse, il m'a aidé beaucoup, il m'a poussé, il m'a forcé à expliciter des choix, à avancer un peu plus. Pendant quatre ans, il n'a jamais cessé de m'aider, de me soutenir avec gentillesse.

Je voudrais encore remercier Madame Michèle Artigue. Il y a quatre ans elle a accepté la direction de mon mémoire de DEA. Elle m'a aussi ouvert la porte de la didactique et elle m'a encouragé à continuer mes études.

Je voudrais remercier mes proches pour leurs aides, leur soutiens et leur encouragement. Grâce à eux, j'ai pu faire un travail sur la Turquie en vivant en France. Ils ont trouvé les professeurs qui ont répondu aux questionnaires, des programmes nécessaires et tous ces que je leur ai demandé. A ma famille, ma femme Ebru Baştürk et mes amis Yılmaz Aksoy, Vedat Çelik, Kenan Güllü, j'adresse mes sincères remerciements.

Je voudrais encore remercier les responsables et les professeurs des lycées et des dérsanés suivants : lycée Anatolien de Alaşehir, lycée de Alaşehir, lycée Atatürk, dérsané Başarı, dérsané Hedef et dérsané Körfez pour leur participation active à l'organisation de la passation des questionnaires et à son déroulement, leur accueil chaleureux et leur soutien. Je tiens aussi à remercier les élèves de ces établissements pour leur spontanéité et leur investissement dans les problèmes proposés.

Il m'est agréable de remercier les responsables de la direction générale de l'enseignement supérieur à Ankara et ceux du conseiller de l'éducation à Paris pour toutes ces facilités qu'ils accordent aux étudiants en doctorat.

TABLE DES MATIERES

Un plan détaillé de chaque chapitre est proposé au début de chacun d'eux.

INTRODUCTION

En Turquie, les concours sont très importants et occupent une grande place dans la vie de tout le monde : par exemple nous pouvons rencontrer ce système, pour la première fois, après le collège. Beaucoup d'élèves essaient d'avoir une place dans les bons lycées comme les lycées anatoliens, les lycées scientifiques etc. Ensuite il y a un autre concours que les élèves doivent passer avant l'enseignement supérieur : c'est le concours d'entrée à l'université. Après l'enseignement supérieur, le marathon de concours n'est pas encore terminé ; par exemple si vous voulez être enseignant ou fonctionnaire, vous devez passer le concours de sélection des personnels publics (KPSS : Kamu Personeli Seçme Sınavı) ou bien si vous voulez faire un DEA ou un doctorat dans une université, vous devez passer le concours de l'enseignement d'après-licence (LES : Lisansüstü Eğitim Sınavı). Mais il est tout à fait intéressant que ces concours ne se différencient pas en général par rapport à des contenus. C'est-à-dire qu'il est possible de rencontrer les mêmes type de questions dans ces concours parce que leur but principal n'est pas de préparer des élèves (ou des candidats) à l'enseignement suivant ou de les motiver à l'enseignement précédent (ou actuel) mais seulement de les sélectionner.

Par ailleurs, la préparation à ces concours, surtout au concours d'entrée à l'université engendre un très grand secteur : c'est le secteur de dérsanés. Ils peuvent être qualifiés d'établissements privés qui préparent des élèves à des concours et qui servent à renforcer ou soutenir des élèves en difficulté dans l'enseignement secondaire.

Pourquoi les dérsanés sont partout dans le pays, leur nombre augmentant toujours ? Si on pose ces questions à quelqu'un en Turquie, il est très probable qu'il y réponde en disant que des élèves ne peuvent pas passer le concours d'entrée à l'université sans suivre les dérsanés, que le contenu du concours et les programmes sont très différents et que dans les dérsanés on apprend aux élèves à « être pratique » et à bien utiliser le temps etc.

Dans l'enseignement de dérsané, il n'y a pas de programmes explicites, les cours sont conditionnés le contenu du concours. Faire connaître les types de questions aux élèves et les entraîner en proposant beaucoup d'exercices de même type est indispensable dans cet enseignement. Les enseignants de dérsané n'ont pas assez de temps, moins qu'en lycée. Ils sont obligés de présenter, par exemple, la notion de fonction en une semaine, alors que les enseignants de lycée consacrent un mois à ce sujet. De plus dans l'enseignement de dérsané, résoudre des questions n'est pas suffisant, il faut trouver les techniques ou les procédures les plus économiques et les plus courtes. Comme le concours comprend des questions à choix multiples, les élèves ne doivent pas présenter leurs démarches à ce concours. Ainsi dans les dérsanés, trouver la bonne réponse quelles que soient les méthodes utilisées est toujours acceptable même si ces méthodes sont mathématiquement très pauvres.

Pourquoi ce travail ? Il y a quatre ans que toutes les choses ont commencé pour moi et une trentaine de futurs didacticiens turcs. Nous avons été sélectionnés par un concours, comme ceux dont j'ai parlés plus haut, pour aller étudier en France une science que nous ne connaissions pas. J'avais terminé mes études supérieures à l'Université Hacettepe dans la discipline de l'enseignement des mathématiques et j'avais travaillé environ deux ans dans un dérsané mais je n'ai jamais rencontré un article ou un ouvrage sur les erreurs des élèves ou sur leurs conceptions. C'est pourquoi, par exemple, quand j'ai lu les articles liés aux erreurs et aux obstacles, j'ai appris que l'erreur peut jouer un rôle fondamentalement différent. Du « droit à l'erreur »[1] concédé aux élèves, on passe progressivement à la recherche de situations où les erreurs seraient révélatrices d'un savoir en voie de constitution, nécessaires à l'apprentissage. En d'autres termes, les erreurs des élèves « nous intéressent », autant qu'elles leur[2] sont profitables. C'était une révolution pour moi. Parce qu'avant je considérais l'erreur comme un dysfonctionnement du savoir de l'élève, je pensais qu'un bon apprentissage devrait permettre de l'éviter, que l'erreur est le signe d'un travail insuffisant de l'élève qui n'a pas (encore) su (ou pu) enregistrer un savoir suffisant pour lui permettre d'éviter cette erreur et que l'erreur est à éviter car elle pourrait s'incruster dans l'esprit de l'élève et devenir persistante. Ainsi j'ai préparé un mémoire[3] de DEA sur les erreurs et les obstacles. Ce mémoire m'a donné l'occasion de dégager les erreurs et les obstacles liés à la notion de valeur absolue au niveau d'élèves de seconde et d'étudier le rôle de l'erreur dans l'apprentissage.

---

[1]Titre de l'article d'Alain Bouvier (cf. Bouvier A. (1989), Le droit à l'erreur, *dans « sans tambour ni trompette »*, n° 1, bulletin de l'IREM de Lyon).

[2] Les chercheurs.

[3] Baştürk S. (2000), Difficultés des élèves de seconde à propos de la notion de valeur absolue et l'analyse des manuels turcs et français, DEA de didactique des mathématiques de l'Université de Paris VII.

Après le DEA, de plus en plus mes découvertes dans l'océan « didactique » continuaient. Par exemple, dans la progression Douady-Perrin[4], à propos de l'enseignement et de l'apprentissage, j'apprenais que les élèves doivent pouvoir se comporter comme des chercheurs si les énoncés de problèmes remplissent des conditions précises : ils doivent avoir du sens pour les élèves, être abordables avec les connaissances actuelles des élèves, mais ne peuvent pas être entièrement résolus puisque les connaissances visées sont des outils adaptés à la résolution, que la formulation du problème doit pouvoir se faire dans au moins deux cadres différents (graphique, géométrique ou numérique), que les connaissances antérieures interviennent comme outils explicites quand ils s'engagent dans la résolution, que la recherche provoque chez eux l'élaboration d'une connaissance partielle, implicite, explicitée au cours du débat, puis par l'enseignant qui va lui donner un statut d'objet en décontextualisant.

Par ailleurs, mes conceptions sur le bon professeur ont aussi commencé à changer. Ainsi je croyais que le bon professeur de mathématiques indique aux élèves la règle, la formule ou la construction géométrique à utiliser pour résoudre les problèmes, qu'il explique clairement son cours et illustre par de nombreux exemples de même type et qu'il fait aimer les mathématiques. Mais grâce aux travaux de didactique, j'ai vu que les élèves ont tendance à répondre en fonction du contrat d'abord, et non en fonction du problème (pour dire les choses schématiquement). Si le travail a lieu avant le cours, si le maître n'a qu'un rôle d'assistant, de coordinateur, dans cette phase du travail le contrat n'est pas encore entièrement fixé et donc moins fort. Le seul point fixé du contrat est que le déroulement de la séance dépend de l'activité des élèves et ce point précisément semble positif aux didacticiens[5]. Cela signifie pour le maître que la gestion de la classe pendant ce temps de recherche doit être faite en respectant le rythme des élèves, et sans imposer son point de vue. Comme le caricature bien Aline Robert, un bon enseignant est un enseignant qui sait se taire à certains moments. De plus j'étais très surpris, quand j'ai lu les phrases suivantes[6] : *l'enseignement classique, du type « j'apprends, j'applique », ne respecte pas la condition de la (re)construction individuelle du savoir ; il joue sur l'imitation et la mise en application et donc risque d'accroître le rôle réducteur du contrat ; souvent, le caractère « objet » des notions est plus important que leur caractère outil dans la présentation qui est faite. Les « bons » élèves refont tout seuls un certain cheminement cognitif ; cela est renforcée par les initiatives qui caractérisent souvent*

---

[4]Cf. *Repère* IREM n°8 « Enseigner par les activités ».
[5]Aline Robert (cf. Robert A. (1988), Une introduction à la didactique des mathématiques (à l'usage des enseignants), *Cahier de didactique des mathématiques*, IREM de Paris VII).
[6] Ibidem.

les bons élèves, du type entraînement individuel sur d'autres exercices que ceux déjà vus en classe par exemple.

Toutes ces remarques témoignant de mon évolution didactique m'ont donné l'envie de faire ce travail. A mon avis, dans l'enseignement des mathématiques actuels en Turquie il y a des problèmes. En effet, dans le pays, tout le monde, ceux qui s'intéressent à l'éducation ou ceux qui n'y s'intéressent pas, accuse notre système éducatif d'être un système d'apprentissage par cœur. Ce travail essaie de faire un diagnostic sur ce système et il a objectif d'apporter des réponses aux questions suivantes : le système oblige-t-il les élèves à apprendre par cœur ? Qu'est-ce qui manque d'un point de vue didactique (plus précisément d'un point de vue outil/objet) dans ce système (ou dans l'enseignement des mathématiques)? Est-ce que les élèves apprennent par cœur volontairement ou n'ont-ils pas d'autres choix qu'apprendre par cœur ? De plus dans le cadre de ce travail, nous allons aussi chercher à répondre aux questions suivantes : est-ce que l'enseignement secondaire est ou non suffisant pour préparer les élèves au concours d'entrée à l'université ? L'enseignement de dérsané ou la motivation du concours influencent-ils négativement les manuels de lycée, les pratiques des enseignants de lycée et celles des élèves ? Autrement dit, un enseignement, comme celui de dérsané, qui consiste à apprendre à résoudre des questions en utilisant les techniques les plus courtes sans commentaire et sans demander « comment ? » ou « pourquoi ? » fait-il apparaître une vision strictement utilitaire des outils mathématiques chez les élèves et implique-t-il de former des automates ?

Pour ce faire, comme les fonctions sont introduites, pour la première fois, en classe de seconde en Turquie et qu'elles sont, en même temps, présentées au dérsané et au lycée, nous avons choisi le chapitre des fonctions au niveau de la seconde. Nous proposons d'analyser quatre manuels de lycée dont un est le manuel officiel et trois manuels de préparation au concours les plus utilisés, pour nous renseigner sur les activités (mathématiques) que chaque énoncé peut déclencher chez les élèves, et sur leurs conséquences éventuelles sur les acquisitions, à condition d'analyser ces activités en relation avec les apprentissages (chapitre II).

De plus, nous proposons d'étudier les programmes de seconde de lycée et les thèmes du concours d'entrée à l'université pour montrer l'éloignement du concours et du lycée (chapitre II et III). Par ailleurs, nous avons mis en place un questionnaire proposé aux enseignants sur la notion de fonction pour pénétrer un peu plus dans ce qui constitue la vie des fonctions dans les classes de seconde et pour étudier l'influence du concours dans les choix faits par les enseignants.

Comme nous avons voulu étudier les effets de l'enseignement de dérsané (ou d'un enseignement très proche du concours) sur les pratiques des élèves et répondre aux questions que nous avions citées plus haut, nous avons fait passer deux questionnaires à des élèves de seconde et des élèves d'une classe de terminale sur la notion de fonction (chapitre V). Le premier questionnaire a été préparé à partir des programmes officiels et des cahiers des élèves qui subissent un enseignement très proche des programmes et l'autre questionnaire à partir des questions déjà proposées au concours et des cahiers des élèves qui subissent un enseignement très proche du concours.

Le but principal des questionnaires proposés aux étudiants (chapitre VI) est de vérifier que subir l'enseignement de dérsané (ou tout enseignement très proche de celui du concours) pose des problèmes dans les études supérieures des élèves. Pour ce faire nous avons mis en place un questionnaire que nous avons soumis à un certain nombre d'étudiants de différentes universités en Turquie.

La thèse sera conçue de la façon suivante :après avoir présenté brièvement le concours d'entrée à l'université en Turquie, nous parlerons de la naissance et de l'évolution des dérsanés et des différents points de vue sur eux et de l'enseignement dispensé au dérsané ; nous développerons ensuite la problématique et la méthodologie de la recherche, puis nous consacrerons un chapitre à l'analyse des manuels un autre chapitre à l'analyse des questionnaires proposés aux enseignants sur la notion de fonction. Dans le chapitre suivant, nous mettons en place l'analyse des questionnaires proposés aux élèves de seconde sur la notion de fonction. L'analyse des questionnaires proposés aux étudiants sur l'enseignement des mathématiques sera le dernier chapitre de la thèse. Enfin nous terminerons par une synthèse des différentes analyses effectuées, en revenant aux questions initialement posées.

CHAPITRE I

CADRE GENERAL : présentation de l’enseignement des mathématiques en Turquie

Plan du chapitre I :

Afin de mieux comprendre le système éducatif turc et le cadre général dans lequel nous avons situé cette rechercher, je vais, ici, présenter le concours d'entrée à l'université en Turquie et la place globale des dérsanés dans le système éducatif turc.

I. Cadre général:présentation de l'enseignement des mathématiques en Turquie

1. Concours d'entrée à l'université en Turquie

Dans cette partie nous présentons brièvement le concours d'entrée à l'université que doivent passer les élèves en Turquie, après le lycée, pour pouvoir poursuivre leurs études. Nous prenons dans la première section, d'une manière générale, le système de ce concours. La deuxième section comprend des statistiques au sujet de ce concours et de son contenu. Nous pensons que ces informations permettront de mieux comprendre cette épreuve qui est plutôt différente de l'épreuve équivalente française, le BAC.

1.1 Présentation générale

Pour commencer leurs études supérieures, les élèves doivent, à la fin du lycée, passer un examen qui est préparé par le Centre de Sélection et d'Installation des Etudiants (Öğrenci Seçme ve Yerleştirme Merkezi- ÖSYM). De 1974 à 1981 ce concours se déroulait en une seule étape par an. Ensuite entre 1981 et 1998 des candidats devaient passer deux étapes pour avoir une place dans une université. Enfin à partir de 1998 la deuxième étape a été supprimée. Les élèves sont recrutés sur un concours qui a lieu une fois par an en juin, se compose de deux parties: l'une qualifiée de qualitative et l'autre de quantitative. La partie qualitative comprend des questions d'histoire, de géographie, de turc (en tant que langue actuelle et littérature), de philosophie, et de sociologie. La partie quantitative comprend des questions de

mathématiques, de sciences physiques, de chimie, et de biologie.
Ce concours est basé sur l'évaluation des élèves sur des résolutions de problèmes et des raisonnements en utilisant les règles et les connaissances essentielles. La durée du concours, qui est une épreuve à choix multiples (5 choix par question), est de trois heures. Les élèves doivent répondre à cent quatre-vingt huit questions.
Pour chaque candidat, il est calculé trois sortes de totaux:

■ Un premier, appelé ÖSS–SAY (le total quantitatif), est calculé en prenant en compte la somme des bonnes réponses pour chaque catégorie (qualitative et quantitative), mais en multipliant par un coefficient plus grand le nombre de bonnes réponses pour les questions quantitatives.

■ Un deuxième, appelé ÖSS–EA (le total mixte), est calculé en prenant en compte la somme des bonnes réponses pour chaque catégorie (qualitative et quantitative), et en donnant la même importance à ces deux parties.

■ Un troisième, appelé ÖSS–SÖZ (le total qualitatif), est calculé en prenant en compte la somme des bonnes réponses pour chaque catégorie (qualitative et quantitative), mais en multipliant par un coefficient de plus grande importance le nombre de bonnes réponses pour les questions qualitatives.

Après l'évaluation, les élèves ayant dépassé un certain minimum de points ont le droit de présenter une liste de facultés où ils voudraient poursuivre leurs études. Les listes de choix de tous les étudiants sont alors analysées, à nouveau par le ÖSYM, et selon le résultat de l'élève (son classement au concours), le contingent des facultés, et le nombre de postulants pour chaque faculté, les candidats acquièrent ou non le droit d'y poursuivre leurs études.
Les élèves voulant continuer leurs études supérieures en langues doivent passer l'*'Examen de Langue Etrangère* (YDS- Yabancı Dil Sınavı) qui a lieu à une date différente de celle de l'OSS. Les lauréats s'orientent dans des disciplines telles que «Langues et Littérature Etrangère», « Interprétation et Traduction», «Tourisme», «Enseignement des Langues Etrangères».
En ce qui concerne les règles que les candidats doivent suivre pendant ce concours :
Les candidats ne peuvent utiliser les objets ci-dessous durant l'examen : « feuilles de brouillon, livres, cahiers, dictionnaires, règles, compas, équerres, etc.…Tout appareil de

communication tel que téléphone portable, talkie-walkie, tout appareil informatique tel qu'ordinateur portable, **calculatrice**[1], montre-calculatrice etc. Et armes, couteaux etc.»

Pour éviter tout copiage, il y a plusieurs livrets de questionnaires contenant les mêmes questions mais ordonnées différemment. Les candidats doivent s'asseoir à des places qui leur sont réservées à l'avance. Ils ne peuvent pas s'asseoir à leur gré.

Comme nous l'avons déjà indiqué plus haut, le concours est composé de deux parties : qualitative et quantitative. Dans la première partie, on évalue la capacité de maîtrise de la langue turque, celle de réflexion à partir de concepts et principes de bases en sciences sociales (géographie, histoire, philosophie). Quant à la deuxième partie, elle évalue la capacité mathématique dans la résolution de problèmes et celle de réflexion à partir de concepts et principes de bases en sciences physiques et sciences naturelles.

Nous introduisons ces deux parties, plus bas, puis nous donnerons plus d'informations pour la partie quantitative puisque c'est cette partie qui nous concerne.

1.2 Partie Qualitative

Elle est composée de quatre-vingt huit questions dont quarante quatre sur la langue turque et quarante quatre sur l'histoire, la géographie et la philosophie. Le tableau ci-dessous indique le nombre de questions posées et les pourcentages correspondants :

Matière	Pourcentage	Nombre de questions
Langue turque	50%	44
Histoire	22%	19
Géographie	17%	15
Philosophie	11%	10

Maintenant, nous donnons le nombre de questions de chaque matière pour les cinq dernières années :

Matières	1996	1997	1998	1999	2000
Langue turque	45	44	44	44	45
Histoire	18	19	19	19	18
Géographie	15	15	15	15	15
Philosophie	10	10	10	10	10

[1]Dans son mémoire intitulé «analyse comparative des sujets de mathématiques dans les épreuves passes à la fin du lycée en France et en Turquie» Arslan a comparé deux épreuves et il a étudié s'il serait possible d'utiliser la calculatrice dans le concours turc. Il a montré que l'utilisation d'une calculatrice au CEU n'a pas beaucoup d'intérêt, voire pour certaines questions, ne sert qu'à faire perdre du temps au candidat. Selon lui l'intégration d'une calculatrice au concours d'entrée à l'université en Turquie, ne serait envisageable que si les sujets compris dans ce concours étaient modifiés de manière à rendre l'utilisation d'un tel outil intéressante.

1.3 Partie Quantitative

Cette partie est composée de quatre-vingt huit questions dont vingt huit sur l'algèbre, seize sur la géométrie, et le reste sur la physique, la chimie et la biologie. Le tableau sur la page suivante indique le nombre de questions posées et leur proportionnalité par rapport à la matière :

Matières	Pourcentage	Nombre de questions
Algèbre	31%	28
Géométrie	18%	16
Physique	22%	19
Chimie	15%	13
Biologie	14%	12

Le tableau ci-dessous donne le nombre de questions de chaque matière pour les cinq dernières années :

Matières	1996	1997	1998	1999	2000
Algébriques	26	29	27	28	28
Géométrie	15	15	16	16	16
Physique	19	19	19	19	19
Chimie	13	13	13	12	13
Biologie	12	12	12	12	12

Puisque notre recherche concerne plutôt la partie algébrique, nous trouvons intéressant de faire un tableau thématique représentant à quoi correspondent les sujets algébriques et géométriques des dernières années :

No	Sujets	1999 (annulé[2]) CEU	1999	2000	2001	2002
1	**Nombres**	9	8	9	7	9
2	**Puissances-racines**	2	1	1	3	1
3	**Proportionnalité**	1	1	2	-	-
4	**Factorisation**	1	3	-	3	2
5	**Mise en équations -problèmes**	6	8	9	10	12
6	**Ensembles**	1	1	1	1	1
7	**Correspondances-fonctions**	1	1	1	-	-
8	**Loi de composition interne- congruence**	1	1	2	4	3
9	**Polynômes**	1	1	2	1	1
10	**Equations- inéquations- parabole**	3	2	1	-	-
11	**Permutation- combinaison- binôme- probabilité**	1	1	1	1	-
12	**Angles**	1	1	-	-	-
13	**Triangles**	2	3	3	5	-
14	**Homothéties**	1	2	1	-	1
15	**Polygones et quadrilatères**	6	1	3	1	5
16	**Cercle et disque**	2	5	3	5	3
17	**Aire et volume des corps dans l'espace (sphère, cube, prisme…etc.)**	1	1	2	1	2
18	**Etude analytique des droites**	4	3	4	3	5

[2] En 1999 deux questionnaires du concours ont été volés sur place par certains individus un jours avant du déroulement. Ensuite le concours de 1999 a été annulé et un mois après il a eu lieu.

Si l’on regarde les notions à enseigner dans les programmes de lycée par classes, on observe que la grande majorité des notions introduites dans les classes de première et terminale ne figurent pas dans le concours.

Seconde	Première	Terminale
a) Logique b) Ensembles c) Correspondances – fonctions - loi de composition interne d) Nombres e) Polynômes f) Equations - inéquations-fonctions du second degré	a) Trigonométrie b) Logarithme c) Nombres complexes d) Permutation – combinaison - probabilité e) Vecteurs f) Signes de somme et de produit g) Suites – séries h) Coniques (ellipse, hyperboloïde, parabole)	a) Fonctions particulières (fonctions entières, fonction valeur absolue, fonctions définies par morceaux…etc.) b) Dérivée et ses applications c) Limite et continuité d) Intégrale et ses applications e) Algèbre linéaire

Comme le disent bien les enseignants du dérsané Seçkinler[3] dans leur étude intitulée « les effets du concours sur l’enseignement des mathématiques et les mathématiques dans le concours », pour les élèves qui ont terminé les études du lycée, les mathématiques se ramènent à quatre opérations simples. Dans la résolution des questions des concours, les élèves utilisent la méthode qui consiste à apprendre par cœur les types et les résolutions de questions au lieu d’apprendre des notions enseignées. Quant on les met en face d’un type différent de question, ils expriment leur réaction en disant que «dans leur classe on n’a pas résolu ce type de question ou c’était très difficile ». Ils ne pensent même pas de quelles notions, quelles méthodes ou de quelles règles élémentaires ils ont besoin pour la résolution. Les élèves répondent donc automatiquement aux questions qu’ils connaissent sans faire des opérations mentales et, l’élève qui connaît le plus de types obtient une place dans une université. De plus le fait qu’au lycée, un certain nombre des notions se répètent plusieurs fois durant trois ans provoque l’ennui, la tension et amène les élèves à ne pas travailler ce qu’ils savaient déjà. Or auparavant dans la deuxième étape du concours des questions qui demandent de faire l’analyse, la synthèse et des applications…etc. étaient proposées. C’est pourquoi alors les élèves devaient aussi sérieusement suivre les cours de lycée.

A l’époque où le concours se déroulait en deux étapes, la deuxième étape couvrait tous les programmes de lycée (seconde, première et surtout terminale). Dès l’abolition de la deuxième étape, les cours des classes premières et terminales sont donc devenus caduques.

[3] « Une étude sur les effets du concours sur l’enseignement des mathématiques et les mathématiques du concours », service d’orientation et informations aux élèves du dérsané Seçkinler, Revue d’Oz-de-bir, juillet 2002, Page 24, Ankara.

2. Naissance et l'évolution des dérsanés en Turquie

Il est très difficile de travailler sans prendre en compte les dérsanés dans l'enseignement turc. C'est pourquoi dans les paragraphes suivants je vais présenter des dérsanés en cherchant les réponses à ces questions : comment et de quels besoins les dérsanés sont-ils nés ? Quels élèves suivent les cours de dérsanés ? Selon quels programmes les enseignants de dérsanés préparent-ils leur cours ?

Les dérsanés ont les missions suivantes : renforcer ou soutenir les élèves faibles dans l'enseignement secondaire et préparer les élèves au concours d'entrée à l'université (CEU) et aux autres concours (par exemple aux concours de lycées privés, de lycées anatoliens, de lycées scientifiques…etc).

Actuellement les dérsanés occupent une grande place et jouent un rôle très important. Ils n'ont pas été constitués par l'Etat. Au contraire ils sont nés d'une demande de la société. Bien que les écoles privées aient plus de possibilités et d'avantages que les écoles d'Etat, elles sont aussi insuffisantes pour préparer leurs élèves à ce concours. Ainsi tous les élèves des écoles privées sont amenés à suivre les dérsanés, mais ils vont dans les plus distingués.

A cause de la demande extrême de ces dérsanés on peut en trouver sept ou huit dans une petite ville. Par ailleurs, un dérsané peut économiquement prospérer à très court terme et il peut devenir une entreprise qui comporte beaucoup de nouveaux dérsanés.

En s'appuyant sur les raisons citées ci-dessous, on peut d'emblée dire que l'enseignement secondaire ne permet pas aux élèves de réussir au CEU. C'est-à-dire que l'insuffisance de l'enseignement secondaire[4]provoque partout l'existence et le développement des dérsanés dans le pays.

A partir de 1950 le développement socio-économique et l'augmentation rapide de la population ont entraîné une forte migration vers les villes, et cela a amené une insuffisance du nombre des écoles. Après 1955 surtout l'augmentation du nombre d'élèves, l'insuffisance du nombre d'enseignants, le fait que les écoles qui existent ne peuvent pas répondre aux besoins, la croissance de la demande d'entrée dans l'enseignement supérieur ont influencé négativement la qualité de l'enseignement secondaire turc[5].

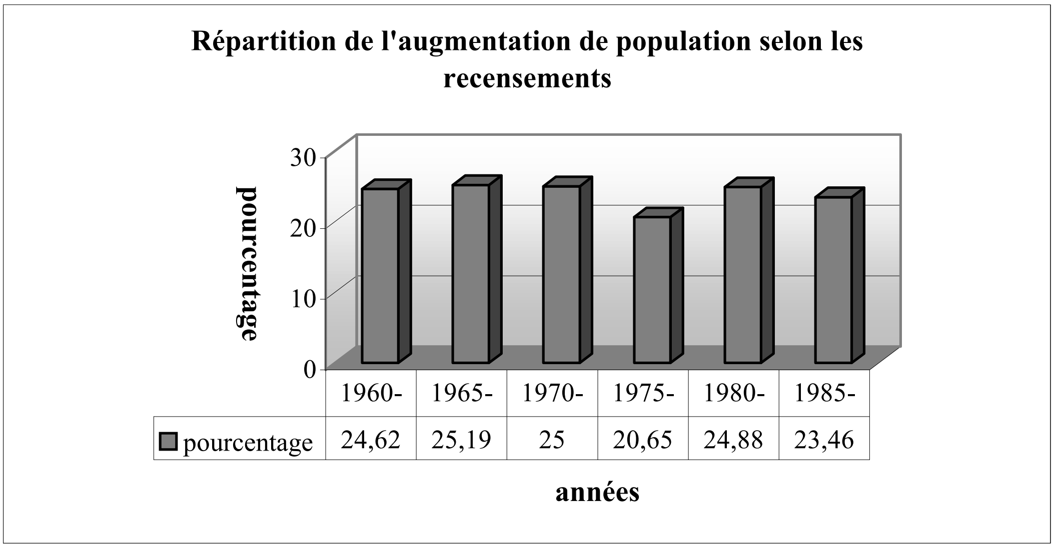
Le fait que l'augmentation du nombre d'élèves n'ait pas été suivie de celle du nombre d'écoles est un problème important. En 2002 on peut encore trouver des classes qui comportent 80 élèves sous la surveillance d'un seul professeur. Comme on peut le voir

---

[4] Au CEU de 2001 458 des 6022 premiers de leur promotion n'ont pas réussi à dépasser le barrage minimal de 105 points (OSYM, Ankara).

[5] Ozguven E.(1984) : « Les influences des dérsanés sur l'entrée à l'université », Revue de la science sociale de l'université, N° 4, Université Hacettepe, Ankara.

facilement sur le tableau[6] ci-dessous, la population turque augmente d'environ 24% à chaque recensement.



N_1= le nombre d'habitants d'après le recensement 1960
N_2=le nombre d'habitants d'après le recensement 1964
Augmentation de population $= \dfrac{N_2 - N_1}{N_1}$

Comme notre pays a une population estudiantine plus nombreuse, il est difficile d'accepter tous les élèves à l'université. Les élèves, qui vont entrer à l'université, sont donc sélectionnés par un concours. Si on sait que presque 170 000 élèves peuvent avoir une place pour étudier dans une université parmi plus d'un million d'élèves voulant passer ce concours, il est facile de conclure qu'il s'agit d'un concours très difficile.

A partir de 1955, les universités ont commencé à recruter les étudiants par un concours national et sélectif. En fait pendant l'année scolaire 1955-56, tous les élèves qui étaient bacheliers pouvaient avoir une place dans une université ou une école supérieure. En 1960-61, cette proportion a baissé à 76,2%, en 1965-66 à 61% , en 1970-71 à 32% et de nos jours elle est tombée à 12% des élèves[7].

Les reformes économiques et la capacité limitée de l'enseignement supérieur ont amené les jeunes de l'enseignement secondaire à s'orienter vers les lycées techniques (professionnels); toutes les politiques ont été faites dans cette direction. Comme les élèves qui ont fini ces écoles ne pouvaient pas trouver de travail à cause de l'insuffisance des infrastructures nécessaires et du manque des exploitations industrielles, cette entreprise n'a pas réussi à

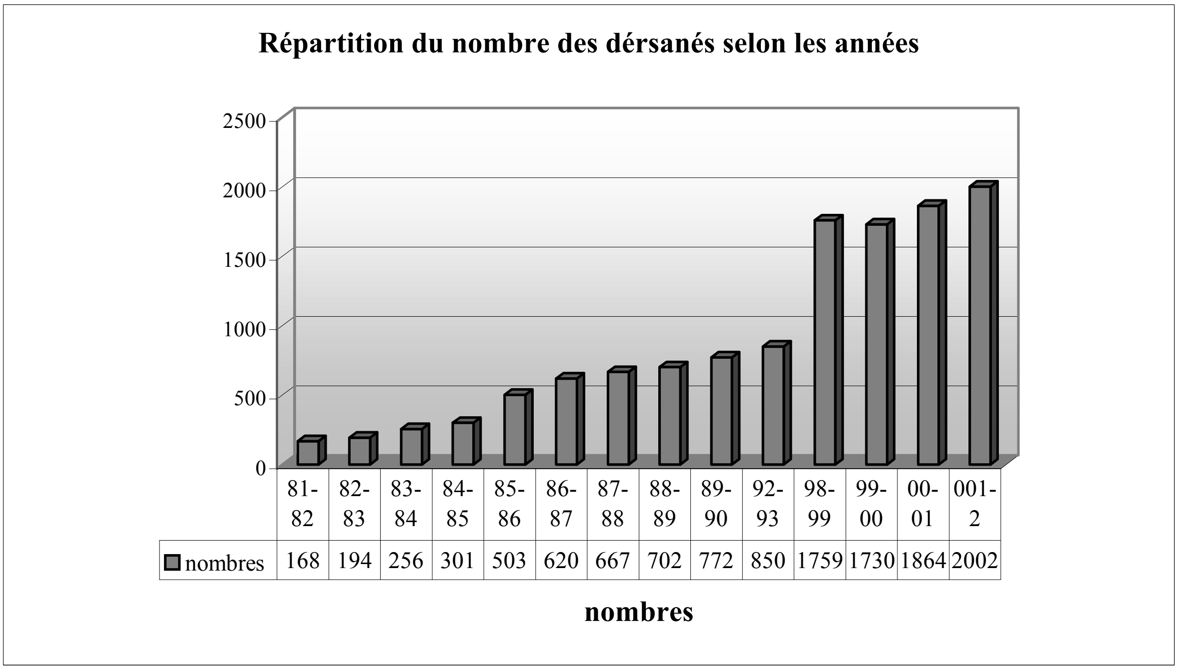
---

[6] L'annale de poche de l'institut de statistiques (1990), Ankara
[7] Le Ministre de l'Education Nationale : « les développements en éducation nationale turque par l' égalité des chances pour l'équité de l' éducation », 1970, page 14, Ankara

empêcher l'accumulation des élèves devant les portes des universités. Ainsi les élèves des lycées professionnels ont aussi commencé à se préparer au CEU pour tenter leur chance au lieu d'aller dans les écoles de techniques supérieures, ils sont donc devenus des clients supplémentaires des dérsanés pour compléter leurs lacunes avant le concours.

Le fait que le but principal de chaque candidat est d'obtenir les meilleurs résultats pour devancer les autres, que les parents souhaitent que leurs enfants n'échouent pas au concours et que dès la classe de seconde les élèves commencent à se préparer, augmente le désir d'aller aux dérsanés. De plus, le fait que le type du concours est très différent de celui des examens du lycée, que le contenu des concours ne correspond pas aux connaissances acquises dans l'enseignement secondaire, que dans certaines écoles les professeurs ne puissent terminer les programmes et que les niveaux des élèves rentrant au concours soient très différents entre eux favorise l'augmentation du nombre de dérsanés[8].

D'abord dans les grandes villes comme Ankara, Istanbul et Izmir, des dérsanés ont commencé à s'établir avec l'objectif de préparer les élèves au CEU, puis de plus en plus ils se sont diffusés partout en constituant des succursales. Le tableau suivant[9] montre que le nombre des dérsanés atteint 2002 dans l'année scolaire 200l-2002.



---

[8] MEN(Ministre de l'Education Nationale) : «Les dérsanés », Rapport présenté à l'Institut de la Planification d'Etat par la direction générale de l'enseignement secondaire, 1982.

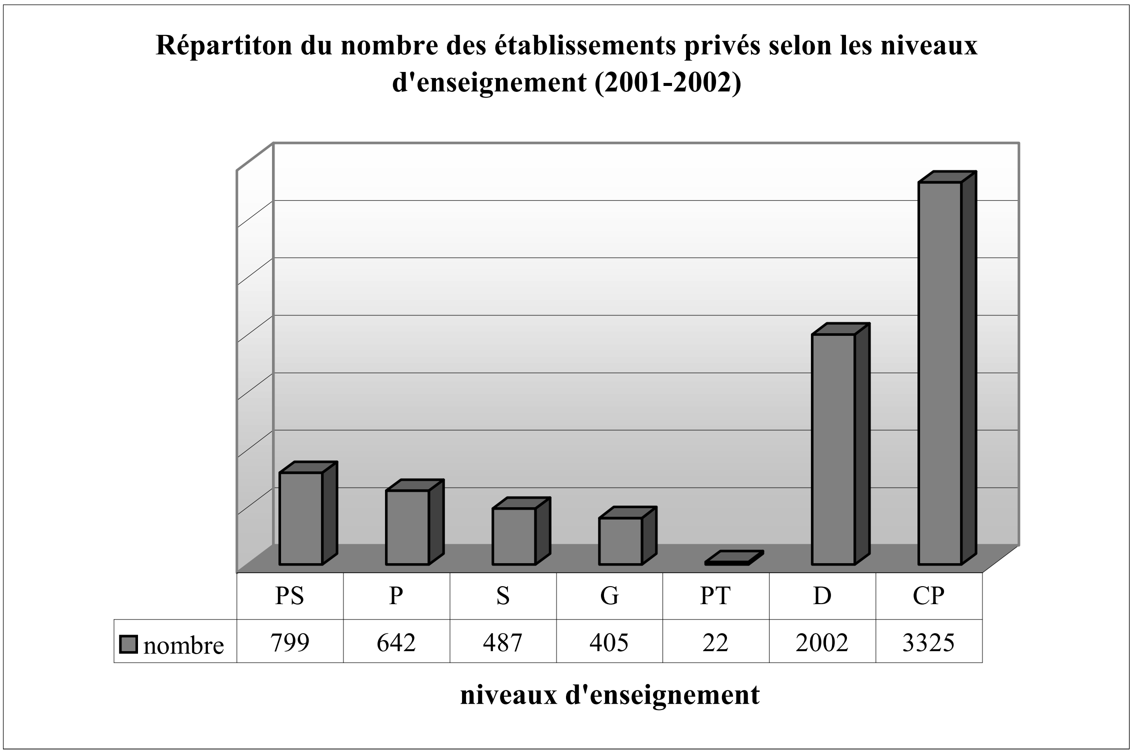
[9] MEN : « Les statistiques éducatives », www.meb.gov.tr

Même si parfois certains partis politiques mettent en discussion l'existence des dérsanés de manière pragmatique,[10] on ne peut pas empêcher l'augmentation du nombre des dérsanés d'années en années à cause de la demande forte des parents, du fait que les professeurs des écoles d'état ayant un répertoire de bons professeurs soient entraînés par les dérsanés qui proposent des salaires très élevés.

A partir du 31 janvier 1981, les affaires et les contrôles des dérsanés, qui étaient faits par les préfectures, ont été pris sous contrôle du Ministère de l'Education Nationale et le nombre de leurs professeurs et l'effectif de leurs classes ont été limités. Ensuite grâce à la publication d'une circulaire, le règlement interne des dérsanés a été analogue à celui des écoles d'Etat.

De plus, les dérsanés qui n'ont pas respecté les conditions ci-dessous peuvent être fermés selon la loi 1495 :

«Ne pas faire travailler soit les professeurs qui enseignent dans une école d'Etat, soit ceux qui n'ont pas de formation pédagogique ; ne pas prendre les élèves en abusant leur contingent ; ne pas demander des élèves un montant supérieur du prix déterminé et ne pas travailler sans autorisation du Ministre de l'Education Nationale ».



	PS	P	S	G	PT	D	CP
nombre	799	642	487	405	22	2002	3325

PS :Préscolaire, P :Primaire, S :Secondaire, G : Général, PT :Professionnel et Technique, D :Dérsané, CP :Cours privés[11]

[10] parce qu'ils promettent toujours au public de résoudre les problèmes de l'enseignement en fermant les dérsanés

[11] Des adultes peuvent suivre, ce type de cours destiné à faire acquérir des compétences particulières dans certains domaines, autant que des élèves. Ces établissements répondent aux besoins des personnels intermédiaires.

2.1 Points de vue sur les dérsanés

Le fait qu'on ait voulu fermer les dérsanés pour rétablir l'égalité des chances et l'équité de l' éducation et la publication d'une directive dans le programme du gouvernement en 1981 ont donné lieu à un nouveau débat dans notre pays.

Après le coup d'Etat du 12 septembre 1980, comme toutes les entreprises (y compris les dérsanés) ont été accusées par le gouvernement d'avoir provoqué des manifestations, on voit apparaître une idéologie qui se fonde sur la centralisation de toutes les affaires à Ankara (la capitale de la Turquie). Dans ce cas le gouvernement de cette époque-là a pensé transférer le fonctionnement des dérsanés aux écoles d'Etat en ajoutant des cours supplémentaires mais, comme l'a bien montré dans son DEA Tunay,[12] cela n'a pas non plus réussi à empêcher les élèves d'aller aux dérsanés.

Maintenant je vais présenter successivement les points de vue émis à l'occasion de ce débat à cette époque par l'Institut de la Planification d'Etat, par les administrateurs de dérsanés et par le Ministère de l'Education Nationale.

2.2 Points de vue de l'Institut de la Planification d'Etat (IPE)

Lorsqu'il s'est agi de changer la loi 625 qui concerne les établissements privés en 1982, un exposé a été fait par l'IPE auprès du conseil des ministres. Dans cet exposé l'IPE affirme que les niveaux des lycéens rentrant au concours sont très différents. Cela pose un problème de qualité chez ces élèves. De plus le fait qu'on ne puisse supprimer l'inégalité entre les enseignements amène l'échec au concours de la plupart des bons élèves de lycée. L'entrée à l'université devient de plus en plus difficile. Le système du concours n'est pas analogue à celui des examens du lycée. A cause de ces raisons les dérsanés se sont diffusés dans tout le pays.

Par ailleurs l'IPE prétend que les dérsanés ne suppriment pas l'égalité des chances et l'équité de l' éducation. Ils assurent en plus l'égalité en constituant des succursales dans tout le pays.

D'après cet institut, les parents attendent des dérsanés de combler les lacunes de la qualité de l'enseignement secondaire. De plus, si on ferme les dérsanés sans que les programmes des autres établissements soient rendus analogues aux contenus du CEU, cela causera l'apparition d'un marché de cours privés encore plus chers que les dérsanés. Comme le contrôle des cours

[12]Tunay U.(1992) : « Les facteurs qui forcent les élèves du lycée à suivre les cours des dérsanés », Mémoire de DEA non publié, Institut des sciences sociales, Université Ankara, 1992.

privés est très difficile, l'Etat serait également privé des redevances qui viennent de la part des dérsanés.
L'IPE conseille de ne pas fermer à court terme les dérsanés, mais de les prendre sous contrôle de l'Etat et ce jusqu'à ce que l'enseignement secondaire ait atteint un niveau de qualité suffisant et qu'il soit répandu partout uniformément.

2.3 Points de vue des administrateurs de dérsanés

Dans le rapport présenté à l'Institut de la Planification d'Etat par les administrateurs des dérsanés, ceux-ci prétendent que les dérsanés sont des établissements légaux, qu'ils ne suppriment pas l'égalité, qu'ils l'assurent.
Par ailleurs les administrateurs prétendent que le fait que les dérsanés enseignent aux élèves qui viennent de différentes écoles et de différentes conditions selon un programme unique rétablit l'égalité. De plus ils n'acceptent pas le reproche que les dérsanés ne s'accumulent que dans les grandes villes.
Selon les administrateurs les dérsanés servent généralement aux élèves qui ont des familles ayant un revenu modeste. De plus ils font gratuitement profiter des milliers d'élèves pauvres des cours de dérsané et partagent leurs expériences avec tout le monde en publiant les manuels, les guides, les banques de question et en organisant des concours blancs. Cela aide des milliers d'élèves qui ne peuvent pas aller au dérsané pour des raisons économiques.
Les administrateurs affirment aussi que les dérsanés contribuent à l'économie du pays en payant des redevances et qu'ils diminuent le chômage en faisant travailler du personnel.
Maintenant on va citer les points de vue du Ministère de l'Education Nationale.

2.4 Points de vue du Ministère de l'Education Nationale (MEN)

Dans un rapport préparé par le Ministère de l'Education Nationale sur l'enseignement secondaire nous constatons que le MEN reconnaît aussi que les connaissances transmises aux élèves par l'enseignement secondaire ne sont pas analogues à celles du CEU.
Par ailleurs le MEN affirme que l'augmentation rapide de la population multiplie l'effectif des classes et que cela influence négativement l'enseignement. La répartition des professeurs dans le pays montre beaucoup de différences entre les villes et les campagnes.
D'après le MEN, la formation des enseignants dans les écoles d'Etat n'est ni pédagogiquement et ni scientifiquement suffisante. De plus dans certaines écoles, on ne peut pas trouver de professeurs pour faire cours. Les programmes ne peuvent pas être terminés

dans la plupart des écoles. Pour quelques domaines comme la physique, la chimie et la biologie il n'y a pas non plus de matériel expérimental dans les écoles.

En ce qui concerne le CEU, le MEN indique que le type des contrôles dans l'enseignement secondaire et celui du CEU sont très différents et que les élèves qui viennent de lycées suivant des programmes différents sont confrontés à un même concours.

Par ailleurs le MEN explicite ses raison à propos des inconvénients des dérsanés en disant que le fait que les élèves suivent les cours des dérsanés en n'étant conditionnés que par l'idée de réussir, les surcharge psychologiquement et les force à travailler plus que leur capacité. De plus les élèves commencent à croire qu'ils peuvent réussir au CEU seulement à condition de participer au dérsané. Cette croyance amène les élèves à considérer que l'enseignement secondaire et leur professeur de lycée ne sont pas très importants.

D'après le MEN, de temps en temps, les dérsanés font travailler illégalement les professeurs qui travaillent déjà dans des écoles d'état. Cela multiplie le nombre de cours hebdomadaires de ces professeurs. De plus le fait que les dérsanés endossent la mission de faire entrer les élèves à l'université à la place des écoles, et ceci en gagnant de l'argent, rend difficile la compréhension de la conception de l'enseignement considéré comme un service public.

Quant à l'enseignement diffusé par les dérsanés, le MEN affirme que les dérsanés ne transmettent pas de nouvelles connaissances aux élèves mais ils leur apprennent plutôt l'application des connaissances déjà acquises en trouvant les techniques les plus courtes. En outre les concours blancs centraux auxquels les grands groupes de dérsanés soumettent les élèves, pour qu'ils puissent voir leur niveau général, diffusent dans l'ensemble du pays inquiétude et concurrence entre les élèves.

Le MEN affirme aussi que les dérsanés recrutent les professeurs qui travaillent dans les écoles d'état avec de l'expérience et des compétences. Cela influence négativement l'enseignement secondaire. Par ailleurs le fait que les dérsanés se constituent généralement dans les grandes villes supprime l' égalité des chances et l'équité de l' éducation.

Cependant le Ministère de l'Education Nationale a des préoccupations en cas de fermeture des dérsanés. Dans ce rapport on indique que si les dérsanés sont fermés, les cours privés gagneront de l'importance avec des prix plus élevés. Ainsi ce service qui servait les classes moyennes, ne sera plus que pour le monopole d'une petite minorité. De plus l'Etat serait privé des impôts sur le revenu des dérsanés.

Le MEN affirme aussi que l'insuffisance dans les écoles d'Etat peut être complétée par les dérsanés. Si on les ferme, cela sera en faveur des écoles privilégiées. On ne peut pas remplacer les dérsanés par des classes de préparation au CEU en embauchant les professeurs présents. Il faut qu'ils soient techniquement et scientifiquement formés aux contenus du CEU. Sinon dans ces classes il ne s'agira que d'une simple répétition des cours de lycée. Enfin avec la fermeture des dérsanés, les personnels qui y travaillent rencontreraient le problème du chômage.

Comme on l'a vu, les points de vue des dérsanés et de l'Institut de la Planification d'Etat sont parallèles, et ceux du Ministère de l'Education Nationale ne sont pas en conflit avec ces derniers.

Il est facile de constater que les dérsanés sont appréciés différemment par tous ces agents : par les parents, qui les estiment nécessaires pour l'avenir de leurs enfants ; par le Ministère de l'Education Nationale qui les considère négativement comme étant une alternative à l'enseignement; par le Ministère des Finances qui les voit comme une source d'impôt ; par les politiciens qui les estiment comme une source de vote.

2.5 Enseignement de Dérsané

L'enseignement de dérsané se fonde sur le contenu du CEU et surtout sur les types de questions proposées dans ce concours. Il n'y a généralement pas de programmes officiels qui montrent explicitement les buts à atteindre, les moyens à utiliser etc. Tandis que le professeur de dérsané peut attacher beaucoup d'importance à certains outils ou objets qui vont servir aux élèves, il peut en négliger d'autres qui ne sont pas nécessaires dans un même sujet mathématique. Je prends un exemple :

en ce qui concerne la notion de fonction, si on a posé beaucoup de questions sur l'inverse d'une fonction jusqu'à maintenant au CEU et si, par contre, il n'y a aucune question liée à la fonction « valeur absolue », le professeur passera cette dernière sans en parler alors que l'inverse d'une fonction sera un de ses buts principaux.

Une autre contrainte inévitable pour le professeur de dérsané est de trouver, de privilégier et de faire acquérir les techniques les plus courtes dans la résolution des problèmes. Dans le dérsané, il est très important de savoir résoudre les questions en utilisant les techniques les plus économiques. On trouve toujours ainsi l'insistance des élèves vis à vis de leurs professeurs : « Madame ou Monsieur, est-ce qu'il n'y a pas d'autres techniques plus courtes ? ». Ce n'est pas étonnant parce que, comme nous l'avons déjà indiqué, dans ce concours les candidats ont environ une minute par question et encore ils n'ont ni brouillon ni cahier et ni calculatrice. Ils ne peuvent disposer que d'un crayon à papier, d'une gomme, d'un taille-crayon et des places libres qui se trouvent autour des questions pour faire quelques petits calculs. Il faut rappeler que les questions du concours sont constituées de questions à choix multiples (QCM).

Ces conditions-là forcent les élèves bon gré mal gré à apprendre les techniques les plus courtes. Par conséquent, les professeurs du dérsané doivent aussi remplacer chez les élèves les techniques déjà acquises au lycée par les plus courtes (éventuellement).

Par ailleurs on peut parler un peu de la vie du professeur de dérsané. Par exemple il n'a pas le droit de ne pas pouvoir résoudre une question posée par les élèves. C'est-à-dire qu'il est obligé de donner l'impression qu'il est bon dans son métier parce que ses élèves le contrôlent toujours en éprouvant le besoin de s'assurer qu'ils ont choisi un bon dérsané et qu'ils ont un bon professeur.

Comme l'expérience et la qualité de professeur sont très importants dans cette arène, les responsables de dérsanés font commencer les professeurs débutants par les classes très faibles pour empêcher qu'ils soient ridiculisés par les bons élèves.

Afin de mieux cerner cet enseignement il me semble aussi nécessaire d'étudier les conseils donnés aux élèves par les dérsanés pour leur préparation et notamment les préfaces de certains manuels de préparation au concours.

Dans la préface du manuel Zafer, on dit que ce manuel s'est construit autour des notions essentielles en prenant en compte le programme entier de la classe de seconde et le besoin de préparer au concours les élèves. Chaque chapitre est enrichi par des notions essentielles, par des règles et par de nombreux d'exemples (corrigés) d'application. Chaque chapitre est aussi illustré par des test résolus. Les élèves qui pensent qu'ils ont assez de connaissances dans ces notions doivent antérieurement résoudre des tests résolus eux-mêmes. Les tests de chaque chapitre contrôlent toutes les connaissances concernées sans négliger un seul point. Tous les exercices sont proposés avec l'objectif d'évaluer une certaine connaissance et son application. C'est pourquoi les élèves sont invités à considérer chaque exercice qu'ils n'ont pas pu résoudre comme une occasion de remarquer *le manque d'une connaissance ou d'un entraînement*, *ensuite à retourner aux explications et aux résolutions des exercices concernés.*

Dans ses annales du concours[13] intitulés « des questions immuables dans le CEU entre 1966-2000 » Teslim Özdemir affirme qu'on peut absolument être admis au concours à condition que *certains types de questions soient entièrement acquises*.

Dans leur site Internet, les enseignants du dérsané Kültür rappellent d'abord aux élèves que dans le concours CEU les questions relèvent du programme de la classe de seconde et

---

[13] Ozdemir T.(2000) : « des questions immuable et leurs résolutions dans le CEU entre 1999-2000 », Caglayan A.S, Gaziemir-IZMIR.

couvrent des sujets élémentaires. Ensuite ils donnent les conseils suivants : « le système de ce concours se fonde sur le fait d'utiliser à bon escient des connaissances sur des notions élémentaires plutôt que sur le fait de les savoir. C'est pourquoi si vous apprenez des sujets à un certain niveau, si vous acquérez *les types élémentaires de questions* et si vous ne les oubliez pas, il est très difficile que vous échouiez dans le concours. De plus les élèves qui ont de bonnes bases doivent *faire beaucoup de pratique pour enrichir leurs archives de questions*. En ce qui concerne les élèves qui sont privés de bonnes bases, au lieu de résoudre d'abord beaucoup de questions ils doivent *apprendre certains types de question dans certains sujets* et ensuite ils doivent commencer à résoudre les différents types de question. »

2.6 Du côté du professeur de lycée

Du côté du professeur de lycée je me demande si l'on peut dire que l'enseignement du dérsané pose beaucoup de problèmes au professeur de lycée. Est-ce que le fait que certains élèves commencent à fréquenter les dérsanés, et ceci, à partir de la classe de seconde et même des classes de CM, déséquilibre le niveau de la classe ? Est-ce que le fait que certaines techniques sont apprises aux élèves dans les dérsanés rend la réalisation de son scénario difficile ? De plus est-ce que les professeurs de lycée ont des préoccupations sur lesquelles ils ne peuvent pas motiver les élèves lorsqu'il s'agit d'un sujet qui ne figure pas dans le contenu du CEU ? Il est très difficile de répondre à toutes ces questions dans le cadre de ce travail. Mais j'ai essayé quand-même, autant que possible, de chercher certaines réponses en proposant un questionnaire aux professeurs de lycée et à ceux de dérsanés. De plus les analyses des manuels et l'analyse des questionnaires m'ont semblé aussi apporter des réponses.

2.7 Du côté de l'élève

A l'époque où j'étais un élève de lycée, je rencontrais des difficultés à cause de ces deux systèmes différents et de leurs différents contrats. Par exemple je n'arrivais pas à comprendre pourquoi mon professeur de lycée n'acceptait pas toujours les techniques qui nous avaient été apprises au dérsané. De plus j'ai eu aussi de la peine à comprendre que je me préparais à un concours comportant des questions à choix multiples, tandis que nous étions évalués par des contrôles écrits dans le lycée. Donc, grâce à cette recherche je vais chercher la réponse à la question suivante « Est-ce que les méthodes privilégiées dans les dérsanés et celles dans le lycée sont différentes ? Si oui est-ce qu'elles sont inacceptables pour l'enseignement de lycée ? Pourquoi ? »

2.8 Du côté des étudiants de l'université

Comme l'enseignement supérieur est différent de l'enseignement de lycée et surtout de celui des dérsanés et que cet enseignement se fonde sur le raisonnement, la recherche, le fait de poser et répondre à des questions « pourquoi », je pense que ce type d'enseignement doit poser des problèmes chez les étudiants universitaires qui ont déjà subi l'enseignement de dérsané (ou un enseignement très proche du concours (**EPC**)).

Dans mes études supérieures il m'a fallu passer les trois premières années pour commencer à aimer les mathématiques de l'université. Ainsi quand j'ai aimé les mathématiques, j'avais terminé mes études. De plus j'ai aussi observé que, chez la plupart de mes collègues, beaucoup de comportements venant du lycée continuaient. Par exemple, avant des examens j'ai vu les gens qui essaient d'apprendre par cœur « la démonstration du fait que l'intervalle ouvert (0,1) soit non dénombrable ».

Tous ces constats m'ont donné l'idée de chercher si l'enseignement de dérsané (ou tout enseignement très proche de celui-ci) posait des problèmes d'adaptation aux études supérieures (en mathématiques) chez les étudiants de l'université.

CHAPITRE II

PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

Plan du chapitre II :

Le but de ce chapitre est de présenter le cadre scientifique dans lequel s'inscrit ce travail et mon questionnement. Je présenterai les choix portés sur l'analyse des programmes, des thèmes du concours, des manuels de préparation au concours et des manuels de lycée (à savoir les manuels étudiés et l'analyse adoptée lors de l'exploration des exercices proposés) pour ensuite décrire la mise en œuvre des questionnaires que nous avons passés. Nous avons choisi de ne pas présenter l'analyse a-priori des questionnaires-élèves sur les fonctions dans ce chapitre : il nous a paru plus judicieux de le faire au moment où nous explorerons les données recueillies. Mais nous allons cependant décrire les questions que nous avons mises dans les questionnaires.

1. Problématique de la recherche

Dans ce travail, nous nous attachons à faire un diagnostic sur un chapitre précis (notion de fonction) au niveau des élèves de seconde. Le système actuel du concours d'entrée à l'université en Turquie nécessite une préparation spécifique, proposée en dérsané, pour réussir ; or cela éloigne les élèves d'une pratique mathématique authentique, rendant « l'enseignement en lycée superficiel » et cela peut avoir des conséquences négatives plus tard.

1.1 Constats probablement à vérifier

En ce qui concerne les constats probables à vérifier dans le cadre de tous ces questionnements, ils se repartissent en trois catégories différentes : caractérisation du concours demandant une préparation spécifique non donnée au lycée, différences d'enseignement entre lycée et dérsané et enfin conséquences de l'enseignement dérsané sur les élèves.

Caractérisation du concours demandant une préparation spécifique non donnée au lycée

CPV (Constat probable à vérifier) 1. Le concours est très technique c'est pourquoi les élèves qui ne suivent pas les dérsanés, même s'ils sont très bons élèves, échouent.

CPV 2. Le fait que les questions du concours portent sur plusieurs connaissances antérieures (connaissances qui viennent de l'enseignement précédent par exemple) empêche les élèves non préparés de les résoudre, même s'ils savent mettre en fonctionnement des connaissances actuelles (c'est-à-dire des connaissances qui font référence directe aux fonctions par exemple).

Différences d'enseignement entre lycée et dérsané

CPV 3. Comme l'enseignement des mathématiques au dérsané est fondé sur les questions du concours et l'enseignement des mathématiques au lycée sur le programme officiel, ces deux enseignements doivent être différents. L'enseignement du dérsané n'est pas une simple répétition des cours de lycée.

CPV 4. Dans l'enseignement de dérsané (ou l'enseignement très proche du concours) il s'agit de présenter les types de questions du concours et d'entraîner des élèves à les résoudre en proposant beaucoup d'exercices du même type.

Conséquences de l'enseignement dérsané sur élèves

CPV 5. L'enseignement de dérsané et/ou la motivation forte du concours peuvent négativement influencer les manuels de lycée, les pratiques des enseignants de lycée et celles des élèves. En d'autres termes, dans les dérsanés, du fait qu'on essaie de trouver les techniques les plus courtes sans commentaire et sans se demander « comment ? » ou « pourquoi ? » il apparaît une vision strictement utilitaire des outils mathématiques chez les élèves et cela implique de devenir un automate. De plus ce type d'enseignement peut éloigner les élèves des mathématiques. Je prends un exemple :

Dans les dérsanés, on apprend une formule pour trouver l'inverse des fonctions du type $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$; ainsi « pour trouver f^{-1} il est suffisant de changer les places de a et de d et leur signe : $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$. » On voit ici l'utilisation d'une technique plutôt qu'un apprentissage lié à la notion de fonction inverse.

CPV 6. Dans les classes qui ne sont pas homogènes, c'est-à-dire les classes ayant des élèves qui fréquentent les dérsanés et d'autres non, les pratiques (les rapports au savoir de l'élève[1]) des élèves ne sont pas non plus homogènes. Ainsi les erreurs commises, les méthodes privilégiées et les procédures sont différentes.

CPV 7. Subir l'enseignement de dérsané (ou tout enseignement très proche de celui du concours) pose des problèmes dans les études supérieurs des élèves.

CPV 8. Le désir de préparer les élèves au concours s'avère aussi dans les choix faits par les enseignants de lycée.

1.2 Pourquoi les fonctions et la classe de seconde ?

En deuxième année de cette recherche 2001-2002 nous avions prévu de faire cette étude en faisant des observations de classes au lycée et au dérsané. De plus nous voulions assister à ces séances munies d'un caméscope ou d'un magnétophone et les filmer pour mieux faire ce diagnostic en regardant aussi les pratiques des enseignants et des élèves. C'est pourquoi nous devions choisir une notion qui est introduite en même temps au dérsané et au lycée. Comme les dérsanés font leur cours à partir du contenu du concours, il était très difficile de trouver ce type de notion dans les classes de première et terminale. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi la notion de fonction.

Comme je suis boursier du gouvernement turc, je pouvais rester en Turquie au plus deux mois par an. Pour gagner du temps, avant de partir en France j'avais envoyé une demande au Ministre de l'Education Nationale et j'avais sollicité une autorisation un mois avant pour faire ce travail dans trois lycées et trois dérsanés dans la ville où j'habite et je suis né.

L'autorisation du MEN n'était pas encore envoyée aux lycées et dérsanés concernés quand je suis arrivé en Turquie. J'ai dû téléphoner plusieurs fois au MEN pour demander où est mon autorisation. Ils m'ont dit qu'il fallait aller à Manisa (notre préfecture est là) et la chercher à la direction provinciale de l'éducation nationale. J'ai enfin réussi à récupérer mon autorisation. Mais il y avait encore une surprise pour moi ; dans cette autorisation le caméscope et le magnétophone n'étaient pas mentionnés (j'avais écrit tous les détails dans ma lettre). J'ai quand même essayé de les faire accepter aux responsables des lycées. L'un

[1]En citant Bernard Charlot, nous dirons que « le rapport au savoir est un ensemble de relations de sens, et donc de valeur, entre un individu (ou un groupe) et les processus ou produits du savoir. Premièrement, le rapport au savoir est rapport à des processus (l'acte d'apprendre et ce qui peut spécifier cet acte) et à des produits (les savoirs comme compétences acquises et comme objets culturels, institutionnels, sociaux). Deuxièmement, le rapport au savoir est à la fois relation de sens et relation de valeur :l'individu valorise ce qui fait sens pour lui, ou, inversement, confère du sens à ce qui pour un individu dépend de l'identité de cet individu » (cf. Bernard Charlot (1997) : *« Du rapport au savoir-éléments pour une théorie »,* Edition Anthopos, 1997).

d'entre eux a voulu m'aider en insistant auprès d'une enseignante qui avait refusé (cette enseignante était très importante pour nous parce qu'elle enseignait dans toutes les classes de seconde au lycée anatolien où la plupart des élèves suivent les dérsanés). Cela a rendu mes conditions de travail difficiles. Parce que cette enseignante s'est plainte à la direction de l'éducation nationale en ville. Le directeur m'a dit que dans l'envoi du MEN il n'y avait aucune indication sur le fait de filmer des séances et que je ne pourrais donc pas le faire. De plus il m'a dit que ce n'était pas aussi facile d'entrer dans les classes avec un caméscope. Je lui ai répondu qu'il y avait beaucoup de recherches réalisées avec un et peut-être même deux caméscope en France. Il m'a répondu banalement que nous avions des conditions différentes en Turquie.

Ainsi nous avons renoncé de filmer les séances et nous sommes contentés de proposer des questionnaires aux élèves dans les classes, pour faire ce diagnostic et vérifier nos constats probables ci-dessous en nous appuyant sur les hypothèses admises que nous allons présenter ci-dessous. Nous avons analysé le programme de seconde et le contenu du concours, les questionnaires proposés aux enseignants sur la notion de fonction pour essayer de pénétrer un peu plus dans ce qui constitue la vie des fonctions dans les classes, les questionnaires aux étudiants pour vérifier que subir l'enseignement de dérsané (ou tout enseignement très proche de celui du concours) pose des problèmes dans les études supérieures des élèves.

1.3 Hypothèses admises de la recherche

Comme notre méthodologie de la recherche est fondée sur l'analyse des manuels, des thèmes du concours et des questionnaires proposés aux élèves, pour expliquer les raisons de ce choix, il nous semble nécessaire de retenir certaines hypothèses en didactique portant sur les apprentissages des élèves en fonction des énoncés proposés aux élèves.

Les chercheurs en didactiques des mathématiques étudient l'enseignement des notions mathématiques en essayant de le relier à l'apprentissage des élèves. Ainsi les exercices choisis par l'enseignant (surtout les énoncés) sont considérés comme l'un des facteurs qui dépendent de l'enseignement et ils peuvent avoir une conséquence sur les apprentissages des élèves.

> Parmi les facteurs qui dépendent de l'enseignement et qui peuvent avoir une répercussion sur les apprentissages des élèves, nous retenons les exercices que l'enseignant a choisis : plus précisément nous proposons d'étudier des énonces précis (à proposer aux élèves) et la manière dont ils peuvent être travaillés en classe. Cela nous renseigne en effet sur les activités (mathématiques) que chaque énoncé peut déclencher chez les élèves, et sur leurs conséquences éventuelles sur les acquisitions, à condition d'analyser ces activités en relation avec les apprentissages[2].

[2] Voir bibliographie, Robert A. & Rogalski M. (2002)

Par ailleurs, peuvent intervenir d'autres disciplines comme la psychologie cognitive, la psychologie, la psychanalyse, l'épistémologie, la sociologie, l'histoire des sciences…etc. Toutes ces disciplines, y compris la didactique des mathématiques, ont une approche spécifique, se fondent sur un découpage particulier de la réalité, a des hypothèses et des questionnements qui lui sont propres. Chacune d'entre eux complète d'autres et utilise leurs avancées.

La plupart des chercheurs qui adoptent une démarche didactique fondent leurs problématiques, leurs analyses sur les savoirs, les notions à enseigner.

> Il y a d'autres analyses des tâches proposées aux élèves (Notamment en termes de praxéologies), notamment celles qui permettent de reconstituer ce qui est abordé en classe dans la panoplie des tâches possibles. Ces analyses peuvent mettre en évidence certains manques dont on peut inférer des conséquences sur les apprentissages. Notre point de vue ici est autre, complémentaire : ce ne sont pas des considérations organisées autour du savoir présenté aux élèves qui nous guident mais un questionnement centré sur le détail du travail de l'élève à partir des énoncés qui lui sont proposés[3].

Il nous semble important de donner tout de suite quelques précisions sur le vocabulaire que nous utilisons dans le cadre de ce travail. Par le mot *activité(s)*[4] nous entendons que tout ce que dit, fait, pense un élève pendant l'action, avant ou après. Cela peut avoir des traces, écrites ou orales, mais une partie est invisible. Pour nous, le mot *tâche* désigne ce qui déclenche une activité : ici un énoncé, ou plus exactement, une question d'un énoncé.

Par ailleurs, en terme d'apprentissage, les conséquences de l'application d'un théorème en remplaçant des données générales par des données particulières et celles de l'adaptation de ce théorème, en travaillant la manière de l'appliquer ne sont pas identiques.

> *Nous associons à un énoncé une analyse des activités des élèves qu'il peut engendrer,* notamment en étudiant ce que les élèves ont à faire de leurs connaissances. Par exemple s'ils doivent utiliser les identités remarquables en reconnaissant sur une forme non habituelle des groupements à effectuer, ou s'ils ont à les utiliser deux fois de suite de manière non indépendante, nous dirons qu'ils ont *adapté* cette connaissance et c'est ce qui nous intéresse dans cette activité.
> L'enjeu des activités déployées par les élèves n'est autre en effet que l'apprentissage : c'est du moins l'entrée que nous avons choisie, nous restreignant à cet aspect qui dépend en large partie des choix de l'enseignant. Appliquer un théorème en remplaçant des données générales par des données particulières ou adapter ce théorème, en travaillant la manière de l'appliquer n'ont pas les mêmes conséquences en terme d'apprentissage(…)[5]

Les élèves apprennent ce qui leur a été présenté en cours avec des applications simples et isolées et ils peuvent l'enrichir en travaillant sur autre chose et d'autres applications non isolées et moins simples.

---

[3] ibidem.
[4] Nous utilisons la définition que propose Aline Robert (2000).
[5] Robert A. & Rogalski M. (2002).

> (…)nous admettons que ce qu'apprend un élève à qui on ne proposerait, par exemple, que des applications simples et isolées des théorèmes du cours, pourrait être enrichi si on lui proposait aussi autre chose, d'autres applications, non isolées ou moins simples. Bien sûr la première fois il risque de ne pas réussir à donner une solution de l'exercice, sans doute sera-t-il arrêté, mais nous suggérons que s'il doit résoudre suffisamment souvent des énoncés différents, en recevant des aides adéquates, il apprendra à la fois chercher et à utiliser autrement ses théorèmes, autrement dit il enrichira ses connaissances. Les enrichissements auxquels nous pensons sont l'accès à des démarches mathématiques pas uniquement algorithmiques, à une certaine généralité des outils et à une certaine organisation des connaissances. Un théorème a un caractère général (abstrait, conceptuel, décontextualisé), et il faut des applications diverses pour en saisir la généralité. De même un théorème s'inscrit dans un champ de connaissances et il faut des applications variées pour saisir sa place, lui donner de plus en plus de sens. Enfin si plusieurs fois les élèves sont confrontés à une certaine recherche, ils s'y font »[6].

Nous avons conscience du fait que l'activité du professeur ne représente q'une partie des facteurs qui déterminent l'apprentissage d'un élève. L'hétérogénéité d'une classe en témoigne. Le riche travail de Bernard Charlot, Elisabeth Bautier et Jean-Yves Rochex[7] contribue à expliquer, par une approche sociologique, que les élèves ne reçoivent pas de la même manière un même enseignement : non seulement ils ne rentrent pas en classe avec les mêmes attentes et les mêmes projets, mais encore ils ne donnent pas le même sens au discours de l'enseignant et à ses consignes ni même aux tâches qu'ils réalisent en classe ou à la maison. Néanmoins, nous faisons l'hypothèse que ce qui se passe dans une classe reste un facteur essentiel des apprentissages des élèves. De plus, nous fixons à notre recherche une première limite : nous ne prenons pas en compte la dimension sociale des élèves des classes dans lesquelles nous avons passé nos questionnaires.

Dans une situation d'enseignement, le professeur s'engage personnellement. Des logiques inconscientes s'y manifestent nécessairement. Nous avons pu percevoir quelques-unes de leurs manifestations lors de certaines observations, mais n'étant pas spécialiste des théories ni des analyses psychanalytiques, nous avons préféré ne pas en tenir compte dans le cadre de ce travail. Cette limitation suppose, nous en faisons l'hypothèse, que la compréhension partielle à laquelle nous pourrons parvenir reste cependant pertinente pour expliquer, suffisamment même si ce n'est pas totalement, les activités du professeur en fonction de ce qu'elles induisent sur les apprentissages des élèves.

Dans une classe, les interactions entre le professeur et les élèves comportent nécessairement une dimension affective qui n'est pas négligeable. Par exemple il est tout à fait possible de remarquer, lors des observations de classe, que le ton du professeur change suivant la situation ou suivant les élèves, que ses accompagnements du discours purement mathématique

---

[6] Ibidem.

[7] Charlot B., Bautier E et Rochex J.-Y.(1992), Ecole et savoir dans les banlieues…et ailleurs, Armand Colin :Paris

(verbaux ou non) sont nombreux pour souligner son égard pour ses élèves, que sa position dans la salle comme ses déplacements témoignent aussi de la dimension affective du jeu qui se déroule en classe. Pour des raisons d'ordre méthodologique, nous avons décidé de ne pas aborder la dimension affective des situations d'enseignement observées. En effet, les exemples que nous avons cités montrent que la prise en compte de cette dimension mérite d'adopter un point de vue très local sur les situations, point de vue qui vient se heurter au choix de considérer l'ensemble complet de la séquence de chaque professeur. Malgré ces nouvelles limitations de notre étude, nous supposons encore qu'elle conserve sa pertinence.

2. Méthodologie de la recherche sur la notion de fonction

Comme nous l'avons précisé auparavant, notre étude va comporter plusieurs dimensions différentes : résumé du programme pour caractériser le concours et montrer la différence entre le programme des lycées et le contenu du concours, analyse des manuels de lycée et des manuels de préparation au concours, des thèmes du concours, des questionnaires proposés aux élèves, aux enseignants et aux étudiants. Nous allons présenter dans cette partie comment nous allons mener l'analyse de ces différentes données et les articuler.

2.1 Résumé du programme

Pour classifier ce qui apparaît dans le programme concernant les fonctions, le comparer avec les thèmes qui apparaissent dans le concours d'entrée à l'université et montrer ainsi l'éloignement du programme de lycée et du contenu du concours, nous avons résumé le programme officiel de la classe de seconde. Dans le chapitre suivant nous décrirons le contenu prévu à ce niveau ainsi que les compétences exigibles tout en soulignant les commentaires (s'ils existent) qui les accompagnent.

Face à ce qui est proposé par le Ministre de l'Education Nationale, il s'agit de savoir ensuite ce qui est retenu dans les manuels de lycée et pour ce faire nous avons choisi quatre exemples qui nous semblent assez représentatifs : manuel officiel (édition : Ministre de l'Education Nationale), collection Tutibay (édition : TUTIBAY), collection Altın (édition : ALTIN KITAPLAR), et collection Aydın (édition : AYDIN).

Puisque l'un de nos objectifs principaux est de caractériser l'enseignement dispensé au dérsané en relation avec celui du lycée, il s'agit aussi de savoir ce qui apparaît dans les manuels de préparation au concours et pour ce faire notre choix s'est porté sur trois manuels de ce type : il s'agit de mathématiques CEU de la collection Güvender chez GÜVENDER YAYINLARI, du manuel de seconde de préparation au concours et de soutien aux cours de lycée de la collection Zafer chez ZAFER YAYINLARI, du manuel de préparation au CEU de la collection Uğur chez UGUR YAYINLARI. Cette liste n'est pas exhaustive mais couvre les livres principalement utilisés par les élèves. Nous développerons plus en détail les caractéristiques analysées de chaque manuel dans le paragraphe suivant.

Comme les manuels de préparation au concours sont constitués en référence au contenu du concours avec l'objectif de préparer les élèves et que nous voulons étudier l'influence de ce concours dans l'enseignement de lycée, il nous a semblé important d'analyser ce qui a été proposé aux élèves aux concours de 1970 à 2003. L'analyse menée est la même que celle adoptée pour les exercices des manuels afin de permettre une meilleure comparaison entre les deux.

2.2 Analyse des manuels

Notre analyse comportera quatre parties, dont nous allons détailler le plan : chapitre où les fonctions sont introduites globalement, activités introductrices, cours et exercices résolus.

Chapitre où les fonctions sont introduites globalement

Dans cette partie nous avons étudié si les manuels attribuent un chapitre propre aux fonctions ou si elles sont présentés dans un chapitre commun avec d'autres notions. Cette indication fournit des repères sur la qualification des fonctions par les manuels.

Pour les activités introductrices

Nous nous sommes intéressés par la manière avec laquelle chaque manuel introduit la notion de fonction, quel(s) type(s) d'activité(s) est proposé ainsi que sa conformité à l'esprit des programmes.

Pour le cours

Nous avons effectué l'analyse du cours en regardant à la fois : le statut des fonctions (la définition proposée), les notations qui sont introduites à leur propos et les caractères outil[8] ou objet[9] présents, les théorèmes et les propriétés qui apparaissent, en distinguant ceux qui sont démontrés, les notations proposées et donc les différentes

[8] Nous disons qu'un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un même outil peut être adapté à plusieurs problèmes, plusieurs problèmes peuvent être adaptés à un même problème (Douady, 1987, p.9).

[9] Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement (ibidem).

écritures et cadres[10] introduits aussi que les articulations explicitées entre ces derniers. Par ailleurs dans l'analyse du cours nous nous sommes penchés aussi sur les remarques grâce auxquelles les connaissances essentielles dont l'élève doit se servir pour résoudre les exercices sont introduites. De plus comme les manuels turcs proposent plusieurs exemples qui peuvent être qualifiés d'exercices résolus dans le cours, nous avons aussi analysé ces exemples, surtout s'ils font référence directe aux notions qui les précédent, en prenant en compte les mêmes niveaux que ceux que nous utilisons dans l'analyse des exercices résolus.

Pour les exercices résolus.

Nous classerons tout d'abord les différents types de tâches prescrites et demandées aux élèves. A. Robert a introduit l'idée (Robert, 1999) que proposer des tâches simples et isolées des théorèmes, définitions, formules, ne provoque pas chez l'élève les mêmes activités que si des adaptations sont à mettre en œuvre. Nous distinguerons ainsi quatre types de tâches qui n'engendrent pas des activités de même nature pour les élèves dans une classe d'un niveau scolaire donné.

• Les tâches élémentaires : lire, répéter, prendre son cahier, écrire sous la dictée. Les activités potentielles des élèves ne sont pas mathématiques.

• Les tâches simples et isolées : elles ne demandent que l'application immédiate d'une règle ou d'une propriété. Il peut s'agir de donner le résultat d'un calcul énoncé par le professeur, de composer deux fonctions affines et de calculer l'image d'un nombre réel par une fonction définie algébriquement. Ces tâches permettent de mettre en fonctionnement le lien décontextualisation-contextualisation.

• Les tâches simples : toutes les tâches qui demandent un travail de reconnaissances pour appliquer un résultat, celles qui demandent des répétitions, ne peuvent pas être considérées comme simples et isolées. La reconnaissance d'une figure, la répétition d'une construction sont des tâches simples, elles demandent aux élèves de mettre en fonctionnement les liens contextualisation-décontextualisation-recontextualisation. Nous considérons, par exemple, la détermination de la formule algébrique d'une fonction affine à partir de deux images connues en classe de seconde, comme une tâche simple, simple parce qu'elle met en jeu une contextualisation immédiate, non isolée parce qu'elle met en jeu plusieurs connaissances à la fois.

[10] Dans le sens employé par R.Douady

• Les tâches complexes : ce sont celles qui amènent les élèves à conjecturer, à adapter, à choisir une propriété parmi plusieurs, à faire un raisonnement en plusieurs étapes. Elles nécessitent l'association d'un problème et d'une mise en fonctionnement et non plus l'application d'un théorème ou une propriété à une figure. Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme est une tâche complexe en cinquième. Les élèves ont tout d'abord à sélectionner parmi les hypothèses celles qui leur permettront de caractériser le parallélogramme. Il leur faut donc mettre en relation hypothèses et caractérisation d'un parallélogramme. Ils ont ensuite à adapter le raisonnement au contexte de l'exercice avant de conclure.

Nous allons donc analyser la tâche prescrite aux élèves dans les exercices résolus en la positionnant par rapport aux exigences du programme et en regardant :

• Les cadres : nous développons l'idée que les notions mathématiques interviennent souvent dans des *cadres* différents[11]. Avec ce mot, nous étiquetons un domaine de travail du mathématicien dans lequel la notion concernée peut fonctionner et être utilisée en liaison avec d'autres, ce domaine n'étant pas le seul champ où la notion peut intervenir. Nous défendons l'idée que les exercices peuvent utilement amener à contextualiser les notions en utilisant divers cadres, soit explicitement, soit sans le demander aux élèves, mais en espérant cependant qu'ils penseront à introduire[12] ces changements de cadres.

En accordant une importance à ces idées, dans les exercices nous allons regarder les cadres qui apparaissent dans chacun et les changements de cadres, indiqués ou non, qu'il faut effectuer pour la résolution.

• Le degré de décontextualisation de la tâche (tâche particulière, générique, mise en fonctionnement outil ou objet de la notion)

• Les commentaires et les points méthodes éventuellement existants.

• Les connaissances qui sont en jeu, en distinguant celles qui sont relatives au domaine des fonctions et celles qui ne le sont pas. Dans chacune de ces catégories, nous distinguerons les outils disponibles et mobilisables ainsi que les mises en fonctionnement techniques des connaissances.

Nous avons distingué les exercices résolus selon les connaissances en jeu et les avons classé en deux catégories : les exercices simples où il s'agit d'utiliser seulement les connaissances qui font référence directe à la notion de fonction et les exercices articulés où l'élève doit faire appel aussi à des connaissances antérieures pour résoudre. En ce qui concerne les

[11] Nous reprenons ici les travaux de R. Douady (cf. RDM volume 7-2, *Repères* IREM n°15).
[12] C'est ce que R. Douady appelle les jeux de cadres.

connaissances antérieures des élèves, nous nous sommes limités au programme de la classe de 3.^{ème} La liste suivante montre quelles connaissances antérieures nous appelons «outils devant être disponibles » :

-Nombres (les ensembles des nombres et leurs propriétés: ensemble des nombres rationnels, entiers, irrationnels…etc.)

-Puissances et racines

-Factorisation

-Identités remarquables

-Factorielles

-Valeur absolue (d'un nombre réel)

-Résolution d'équations à une inconnue et d'équations à deux inconnues

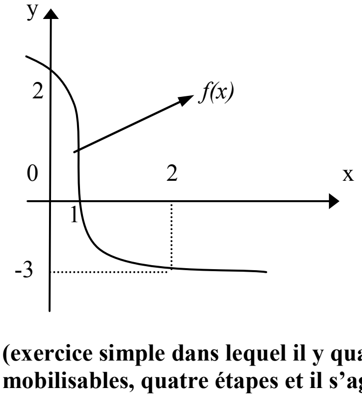
-Résolution de système linéaire d'équations

-Equation des droites

-Permutation et probabilités

En nous appuyant sur les travaux de A. Robert (1998), nous avons compté dans les exercices résolus les outils supposés disponibles dans le travail et les outils mobilisables. De plus nous avons aussi précisé, dans la grille d'analyse, le nombre des étapes par lesquels l'élève doit passer pour résoudre l'exercice. Afin de mieux expliquer cette analyse nous allons donner des exemples :

Exemples	Solution	Notre analyse
Si $f(2)=5$ *et* $f(3)=8$, *pour la fonction f affine, quelle est la valeur* $f(1)$ *?* **(exercice articulé dans lequel il y a un outil supposé disponible, deux outils mobilisables, trois étapes, il s'agit de travailler sur l'écriture algébrique des fonctions dans le cadre algébrique)**	*Si f est une fonction affine,* $f(x)=ax+b$ $f(2)=2a+b=5$ $f(3)=3a+b=8$ $2a+b=5$ $\underline{3a+b=8}$ *a=3 et b=-1* *f(x)=ax+b=3x-1* *f(1)=3.1-1=2*	La formule générale des fonctions affines **(Outil mobilisable 1** *-Cadre algébrique* ***(CA)*** *-Travail sur l'écriture algébrique des fonctions* Trouver les images en mettant à la place de x dans la fonction f **(outil mobilisable 2, étape 1)** La résolution du système linéaire d'équations **(outil supposé être disponible dans le travail 1, étape 2)** Déterminer la fonction f et calculer l'image demandée **(outil mobilisable 2, étape 3)**
Etant donné $f(x)=x^2-2x+1$, *calculer* $f(\sqrt{3}+1)$. **(exercice articulé dans lequel il y a deux outils supposés disponibles dans le travail, un outil mobilisable, deux étapes et il s'agit de travailler sur l'écriture algébrique des fonctions dans le cadre algébrique et numérique)**	$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$ $f(\sqrt{3}+1)=(\sqrt{3}+1-1)^2=(\sqrt{3})^2=3.$	Utilisation d'une identité remarquable **(outil supposé disponible dans le travail 1, étape 1)** *-Cadre algébrique* ***(CA)*** *-Travail sur l'écriture algébrique des fonctions* L'élève doit calculer l'image demandée en se servant des connaissances antérieures liées aux puissances ou racines **(outil mobilisable 1, outil supposé disponible dans le travail 2, étape 2)** *-Cadre numérique* ***(CN)***
Etant donné $f(x)=\frac{x}{x+1}$, *calculer f(x-1) en* fonction *de f(x).* **(exercice articulé dans lequel il y a un outil supposé disponible dans le travail, un outil disponible, trois étapes et il s'agit d'un travail sur l'écriture algébrique des fonctions dans le cadre algébrique)**	*On trouve x à partir de* $f(x)=\frac{x}{x+1}$. $xf(x)+f(x)=x \Rightarrow x-xf(x)=f(x)$ $\Rightarrow x(1-f(x))=f(x) \Rightarrow x=\frac{f(x)}{1-f(x)}$ $f(x)=\frac{x}{x+1} \Rightarrow f(x-1)=\frac{x-1}{x-1+1}=\frac{x-1}{x}$ *on écrit à la place de x la valeur x en fonction de f(x)* $f(x-1)=\frac{\frac{f(x)}{1-f(x)}-1}{\frac{f(x)}{1-f(x)}}=...=\frac{2f(x)-1}{f(x)}.$	Calculer x en fonction de f(x) en mettant en fonctionnement la résolution d'équations **(outil supposé disponible dans le travail 1,étape 1)** *-Cadre algébrique* ***(CA)*** *-Travail sur l'écriture algébrique des fonctions* Calculer f(x-1) **(outil mobilisable 1, étape 2)** Trouver l'image demandée en remplaçant x par la valeur x en fonction de f(x) **(étape 3)**

Exemples	Solution	Notre analyse
Si les fonctions f et g sont définies sur IR par $f(x)=x^2-1$ *et* $g(x)=x-1$, *trouver fog et gof.* **(exercice articulé dans lequel il y a un outil supposé disponible, un outil mobilisable, une seule étape et il s'agit de travailler sur l'écriture algébrique des fonctions dans le cadre algébrique)** **(exercice simple dans lequel il y a un outil mobilisable, une seule étape et il s'agit de travailler sur l'écriture algébrique des fonctions dans le cadre algébrique)**	$(fog)(x)=f[g(x)]$ $=f(x-1)$ $=(x-1)^2-1=x^2-2x$ $(gof)(x)=g[f(x)]$ $=g(x^2-1)$ $=(x^2-1)-1$ $=x^2-2$	Utilisation de la définition de la composition des fonctions **(outil mobilisable 1, étape 1)** *-Cadre algébrique (**CA**)* *-Travail sur l'écriture algébrique des fonctions* Une identité remarquable que l'élève doit se servir **(outil supposé disponible dans le travail 1)** Utilisation de la définition de la composition des fonctions **(outil mobilisable 1, étape 1)** *-Cadre algébrique (**CA**)* *-Travail sur l'écriture algébrique des fonctions*
Etant donné f={(-1,2),(1,3),(2,-4)} et g={(-1,1),(2,2),(3,1)}, trouver f+2g. **(exercice simple dans lequel il y a deux outils mobilisables, une seule étapes et il s'agit de travailler sur l'écriture de la liste de couples des fonctions dans le cadre de la théorie élémentaire des ensembles et le cadre numérique)**	*(f+2g)(-1)=f(-1)+2g(-1)=2+2.1=4* *(f+2g)(2)=f(2)+2g(2)=-4+2.2=0* *f+2g={(-1,4),(2,0)}*	Utilisation de l'opération « addition » sur les fonctions définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par une liste de couples et déterminer les images **(outil mobilisable 1 et 2, étape 1)** *-Cadre de la théorie élémentaire des ensembles (**CE**) et cadre numérique (**CN**)* *-Travail sur l'écriture de la liste de couples des fonctions* Les quatre opérations sur les fonctions figurent dans le programme de la classe de terminale.
On considère que la fonction f est bijective sur [0,2] et représentée graphiquement ci-dessous : Quelle est la valeur $\dfrac{f(2)+f^{-1}(2)}{f(f(1))}$?  **(exercice simple dans lequel il y quatre outils mobilisables, quatre étapes et il s'agit de travailler sur la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé dans le cadre analytique et le cadre numérique)**	*On détermine graphiquement f(2)=-3, f(0)=2, f(1)=0* *Soit* $f^{-1}(2)=a$. *On obtient donc f(a)=2.* *Si f(a)=2 et f(0)=2, on trouve a=0 et puis* $f^{-1}(2)=0$ *f(f(1))=f(0)=2* *On peut trouver la valeur demandée en mettant à leurs places les valeurs qu'on a trouvées* $\dfrac{f(2)+f^{-1}(2)}{f(f(1))}=\dfrac{-3+0}{2}=\dfrac{-3}{2}$	Détermination graphique des images demandées dans un repère orthonormé (**outil mobilisable 1, étape 1)** *-Cadre analytique (**CAn**)* *-Travail sur la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé* Application de la définition de l'inverse des fonctions et de la bijectivité (**outil mobilisable 2 et 3, étape 2)** Mise en fonctionnement de la définition de la composition des fonction (**outil mobilisable 4, étape 3**) Calculer la valeur demandée (**étape 4)** *-Cadre numérique (CN)*

2.3 Description et passation des questionnaires-élèves sur la notion de fonction

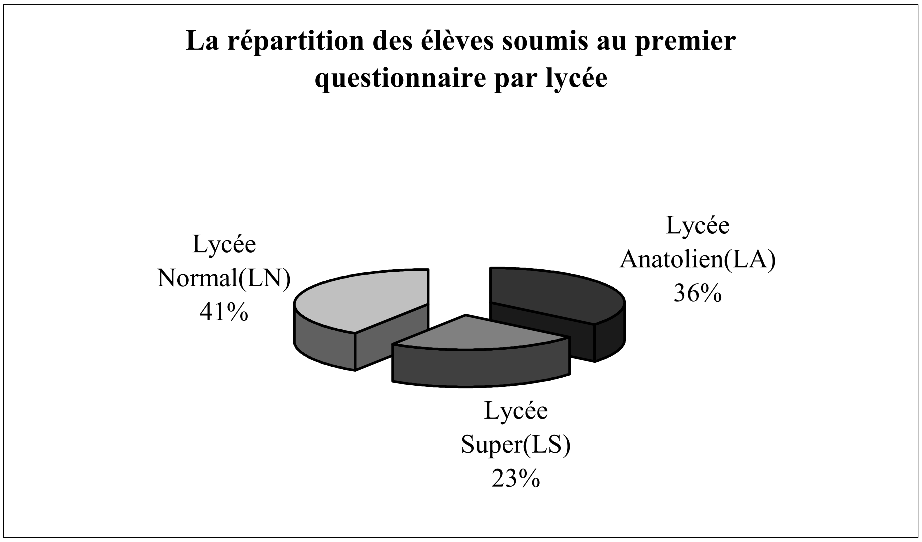
Maintenant je vais parler des questionnaires[13] proposés aux élèves de seconde et d'une classe de terminale à l'aide desquels je pourrais vérifier mes constats probables (cf. CPV1, CPV2,CPV5 et CPV6). Comment se sont-ils déroulés ? Pourquoi avons-nous proposé deux questionnaires ? Comment avons-nous choisi les questions des questionnaires ? Pourquoi se sont-ils déroulés dans trois lycées différents ?

Lors du choix des questions, j'ai d'une part fait appel à mon expérience scolaire (comme étudiant) et d'autre part à mon expérience professionnelle (comme enseignant dans un dérsané). Les questions du premier questionnaire (QF1) ont été préparées à partir des programmes officiels de lycée et des cahiers des élèves du lycée normal. Parce que dans les classes de seconde de ce lycée l'enseignement était très proche du programme, il n'y avait aucun élève (ou un très petit nombre) qui suivait le dérsané ; il était très difficile de trouver des questions du concours ou des questions y ressemblant dans les cahiers des élèves. Quant au deuxième questionnaire, je me suis basé sur l'enseignement dispensé dans les classes de seconde du lycée anatolien où l'enseignement était très proche du concours, l'intérêt du concours étant très important pour les élèves, pour les enseignants et pour les parents ; le nombre des élèves qui suivent les dérsanés était élevé et il était possible de remarquer beaucoup de questions du concours ou des questions y ressemblant dans les cahiers des élèves.

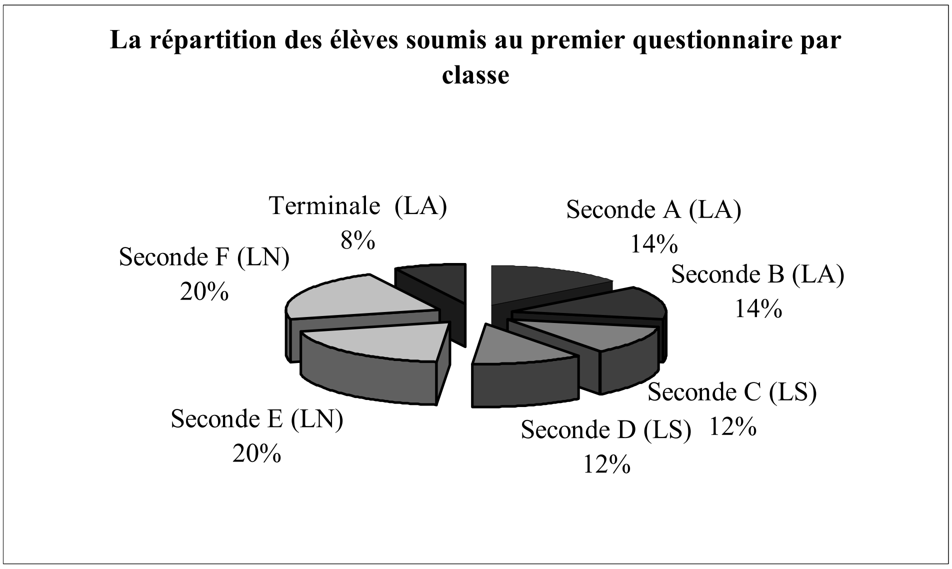
Il y a deux questionnaires. L'un comporte 7 questions et l'autre 10 questions[14] qui traitent de la notion de fonction. Je les ai proposés aux élèves de seconde de trois lycées différents et à une classe de terminale. Comme le montrent bien les tableaux ci-dessous, le premier questionnaire a été passé par 249 élèves appartenant à 6 classes de seconde et 1 classe de terminale, le deuxième a été proposé aux mêmes élèves (sauf ceux d'une classe de seconde) une semaine après. Les questionnaires se sont déroulés pendant des cours d'orientation. Dans les questionnaires, afin de disposer d'informations sur les élèves, nous leur avons demandé d'indiquer comment ils s'estiment en mathématiques (bon, moyen, mauvais), de noter les résultats des contrôles et d'indiquer s'ils suivent un enseignement en dérsané.

[13] Voir annexe V-1 et annexe V-2.

[14] Deux questions de ce questionnaire n'ont été proposées que dans la classe de terminale. Comme l'une d'entre elles n'est pas bien formée, nous ne l'avons pas analysée.



LN :Lycée Normal (effectif :102 élèves), LA :Lycée Anatolien (effectif :89 élèves), LS :Lycée Super (effectif :58 élèves)



SA :Seconde A (LA :Lycée Anatolien-effectif de la classe :36 élèves), SB :Seconde B (LA-effectif de la classe :34), SC :Seconde C (LS :Lycée Super-effectif de la classe :29 élèves), SD :Seconde D (LS- effectif de la classe :29 élèves), SE :Seconde E (LN :Lycée Normal-effectif de la classe :49 élèves), SF :Seconde F (LN-effectif de la classe :53 élèves), CT :Classe de terminale (LA-effectif :19 élèves)

Afin de mieux comprendre le niveau des élèves, il me semble nécessaire présenter les lycées où les questionnaires se sont passés. Il y a trois classes du Lycée Anatolien qui est le meilleur lycée en ville. Il recrute les élèves sur un concours. Les familles des élèves sont de haut niveau social. Les élèves commencent à suivre les dérsanés dès la classe de seconde. L'une des classes de seconde engagées dans le questionnaire a 20 élèves sur 37 qui suivent les cours de dérsané et l'autre 12 sur 34. Tandis qu'en classe de terminale tous les élèves les suivent.

La quasi-totalité des professeurs dans ce lycée fait le cours à partir des programmes officiels et (implicitement) du contenu du concours.
Les bons élèves de collège ayant échoué peuvent aller au lycée super. Il y a deux classes de seconde de ce lycée où les questionnaires se sont déroulés. Le nombre des élèves qui suivent les dérsanés dans ces classes ne dépasse pas 4 ou 5.
Le dernier lycée qu'on appelle le lycée normal recrute les élèves restant après ces deux sélections. Il y a deux classes de seconde de ce lycée où un ou deux élèves suivent les cours de dérsané. Les professeurs et les élèves sont moins motivés par le concours que ceux des autres établissements. Le professeur des classes soumis aux questionnaires suit uniquement les programmes de lycée.
Les questions sont présentées avec un espace libre après chaque question, afin que l'élève y inscrive l'ensemble de ses calculs. Les élèves ont 45 minutes pour répondre aux questions. L'ordre de présentation des questionnaires est aléatoire, néanmoins les deux questionnaires commencent par les questions les plus simples de manière qu'aucun élève ne soit d'emblée en échec. Comme les calculatrices ne sont pas autorisées en Turquie, il n'y a aucun élève qui ait utilisé une calculatrice.

Présentation des questions

Le premier questionnaire est plus proche du programme de seconde. Les questions sont simples et isolées. Elles ne demandent que l'application immédiate d'une règle ou d'une propriété. Le premier questionnaire cherche ainsi à vérifier que les élèves peuvent mettre en fonctionnement leurs connaissances essentielles qui font référence directe à la notion de fonction. On peut trouver ces types de questions dans tous les manuels. En ce qui concerne le deuxième questionnaire, les questions sont soit des questions du concours (comme les questions n°1, n°2, n°3,n°5, n°8, n°9) soit des exercices des manuels de préparation au concours. Elles ne sont pas isolées, mais simples. Elles demandent un travail de reconnaissance pour appliquer un résultat. On peut trouver ces types de questions dans tous les manuels de préparation du concours et certains manuels de lycée. Je joins en annexe[15] un exemplaire des deux questionnaires. En laissant faire l'analyse a-priori des questions dans le chapitre concernant l'analyse des questionnaires (chapitre VI), je présente ici brièvement les questions des questionnaires :
- La question n°1 nous permet de préciser le sens de la notion de la fonction pour les élèves. C'est une question générale. Ainsi avoir une définition complète de la fonction n'est pas très

[15] Cf. annexe V

exigé en général. Même si l'élève donne un mot qui renvoie à une des définitions, cela nous renseigne déjà. Comme tous les manuels de dérsané ou de lycée introduisent les fonctions de manière ensembliste, nous attendons que la plupart des élèves aient tendance à donner la définition ensembliste.

- La question n°2 permet de voir les connaissances élémentaires des élèves sur la notion de fonction. Elle invite les élèves à calculer les images des éléments de l'ensemble de définition par une fonction affine. C'est une question très bien préparée.
- La question n°3 implique l'application de la définition de la fonction inverse.
- Les questions n°4 et n°5 impliquent la mise en fonctionnement de la définition de la composition des fonctions. Dans la question n°4 il s'agit de composer deux fonction données. Inversement dans la question n° 5 on demande aux élèves de « décomposer » une fonction en utilisant l'une des fonctions composées.
- Dans la question n°6 il est nécessaire de trouver l'inverse d'une fonction rationnelle.
- La septième question consiste à appliquer la définition des fonctions injectives. L'élève est amené à chercher l'injectivité d'une fonction carré à partir de son ensemble de définition.

Maintenant je fais la présentation du questionnaire 2 ;

- Dans la question n°1 il s'agit de travailler sur une fonction définie par la langue naturelle. D'abord l'élève est amené à traduire la fonction en langage algébrique et ensuite à trouver l'image d'un nombre rationnel.
- La question n°2 concerne une composée des fonctions. On demande de « décomposer » une fonction composée et ensuite de trouver l'image de 2 par cette fonction.
- La question n°3 consiste aussi à « décomposer » deux fonctions. Il s'agit de deux fonctions rationnelles composées.
- La question n°4 concerne la fonction qui présente une identité remarquable. On demande aux élèves de trouver l'image de l'expression $x+1$ par la fonction.
- Dans la question suivante il s'agit d'une fonction affine sous la forme $f(x)=ax+b$. On invite les élèves à déterminer a et b à partir des images de 3 et 2 par l'inverse de la fonction.
- La sixième question implique aussi une fonction affine. Les coefficients de x sont inconnus et l'élève est invité à trouver les coefficients en utilisant la relation entre les images de 2 et –2.
- Dans la question n°7 il apparaît une fonction constante. Le fait que le coefficient d'une fonction constante soit nul doit être mobilisé par les élèves.
- La question n°8 est celle dans la quelle la courbe représentative d'une fonction est proposée. On demande aux élèves de déterminer les images de certains éléments par la fonction et son inverse en utilisant la courbe.

- La question n°9 implique aussi la reconnaissance de l'inverse de fonction. Dans l'énoncé de la question en passant quelques étapes du traitement de l'inverse d'une fonction on donne la dernière étape et il reste aux élèves à terminer cette tâche incomplète.

Le tableau récapitulatif ci-dessous montre les connaissances à utiliser ou à mobiliser, dans les questions de nos questionnaires, par question. Ainsi dans le deuxième questionnaire il y a des questions qui demandent d'utiliser plusieurs connaissances antérieures de l'élève. Tandis que le premier est construit avec des questions qui font référence directe à la notion de fonction. Nous pensons que cette différence nous permet de vérifier notre hypothèse « les élèves qui ne suivent pas les dérsanés échouent au concours, même s'ils sont très bons élèves ».

Le tableau récapitulatif des connaissances à utiliser ou à mobiliser par question

Propriétés évoquées dans le programme de seconde de lycée

Questionnaire n°1	définition de la fonction	trouver des images sur la fonction	inverse d'une fonction affine	inverse d'une fonction rationnelle	composée des fonction	décomposée des fonctions	une des fonction diverses	traduction entre différents langages	trouver les images sur une courbe représentative (Lecture graphique)	résolution du système linéaire d'équations	inverse des nombres	résolution des équations à une inconnue	fonction inverse f(x)= $\frac{1}{x}$	reconnaissance des identité remarquables	définition de l'inverse de la fonction
Q1	oui														
Q2		oui													
Q3				oui											
Q4					oui										
Q5						oui									
Q6		oui		oui											
Q7		oui					oui								
Questionnaire n°2															
Q1		oui						oui			oui				
Q2		oui				oui						oui			
Q3				oui		oui									
Q4		oui												oui	
Q5			oui							oui					oui
Q6		oui										oui			
Q7							oui					oui			
Q8									oui						oui
Q9				oui									oui		oui

2.4 Analyse des questionnaires-enseignants sur l'enseignement des fonctions

Il nous semble nécessaire cependant d'aller au-delà de ces analyses dont nous avons parlé plus haut, pour essayer de pénétrer un peu plus, dans ce qui constitue la vie des fonctions dans les classes de seconde et pour montrer l'influence du concours dans les choix faits par les enseignants (cf. CPV 8). Comme nous l'avons déjà indiqué, nous avons rencontré beaucoup de difficultés pour observer et filmer les séances. C'est pourquoi nous avons mis en place un questionnaire[16] que nous avons soumis à un certain nombre d'enseignants au lycée et au dérsané, pour essayer de cerner plus précisément comment ils conçoivent l'enseignement des fonctions.

Les questionnaires-enseignants ont été distribués aux intéressés lors d'un passage du chercheur dans leur établissement et récupérés une semaine plus tard. J'ai reçu 15 réponses des enseignants.

Chaque questionnaire comprend onze questions.

Les deux premières questions nous apportent des informations sur le parcours de l'enseignant, particulièrement dans les classes concernées ici.

La troisième question nous apporte des informations sur la relation qu'il entretient avec les programmes officiels.

Ensuite, dans une troisième partie, j'ai posé six questions, pour cerner, autant que possible, l'image que l'enseignant se fait de l'enseignement de la fonction, son idée sur le degré de difficulté du chapitre, ses objectifs, les types d'erreurs et de difficultés aux quelles il s'attend.

La quatrième partie, avec deux questions, concerne la façon dont il gère les contraintes liées à l'existence de l'examen final. Dans cette partie nous avons demandé aux enseignants de citer trois exercices (activités) qu'ils avaient proposés aux élèves en classe et qui leur semblent particulièrement représentatifs du chapitre et de citer un exercice qu'ils ont proposé en contrôle. Dans l'analyse de ces exercices proposés nous avons aussi utilisé l'analyse menée pour les exercices résolus des manuels.

2.5 Analyse des questionnaires-étudiants sur l'enseignement des mathématiques

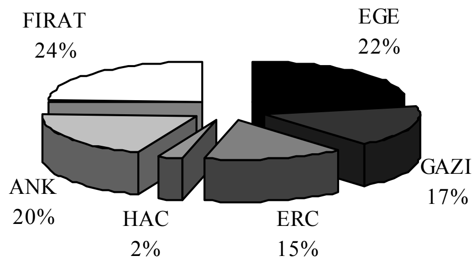
Le but principal de ces questionnaires est de vérifier que subir l'enseignement de dérsané (ou tout enseignement très proche de celui du concours) pose des problèmes dans les études supérieures des étudiants. Pour ce faire nous avons mis en place un questionnaire que nous

[16] Voir annexe V-2

avons soumis à un certain nombre d'étudiants de différentes universités en Turquie (41 étudiants).

Les questionnaires ont été envoyés par Internet aux proches du chercheur qui travaillent ou étudient aux universités citées ci-dessous. Ainsi ils ont trouvé les étudiants qui acceptent de répondre aux questionnaires et ils les leur ont distribué et ramassé. Dans chaque questionnaire, il y avait une petite explication qui met en évidence le but du questionnaire[17].

Répartition des étudiants par universités

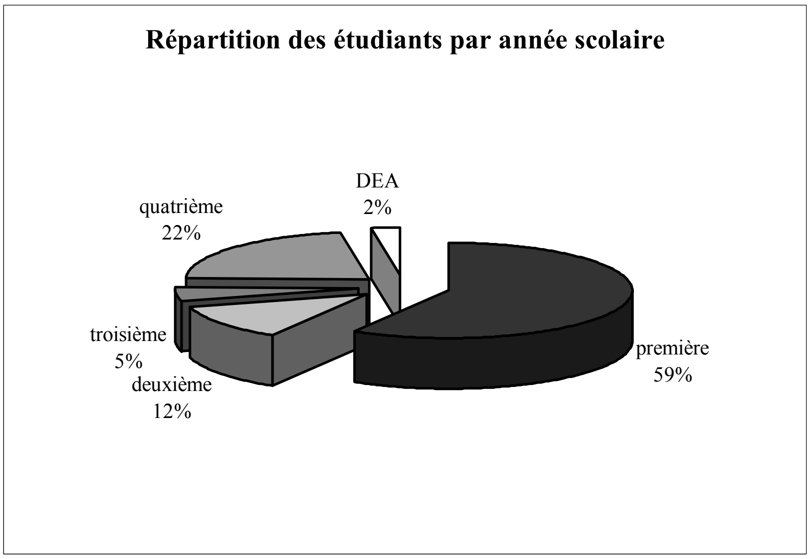


Nous disposons de dix questionnaires provenant d'étudiants de l'Université Fırat (Euphrate) à Elazığ (au Sud-Est de la Turquie), de neuf questionnaires provenant d'étudiants de l'Université Ege à Izmir (à l'Est de la Turquie), de six questionnaires provenant d'étudiants de l'Université Erciyes à Kayseri (au milieu de la Turquie), de sept questionnaires d'étudiants de l'Université Gazi, de huit questionnaires de l'Université Ankara et d'un questionnaire de l'Université Hacettepe, à Ankara (la capitale de la Turquie, au milieu du pays).

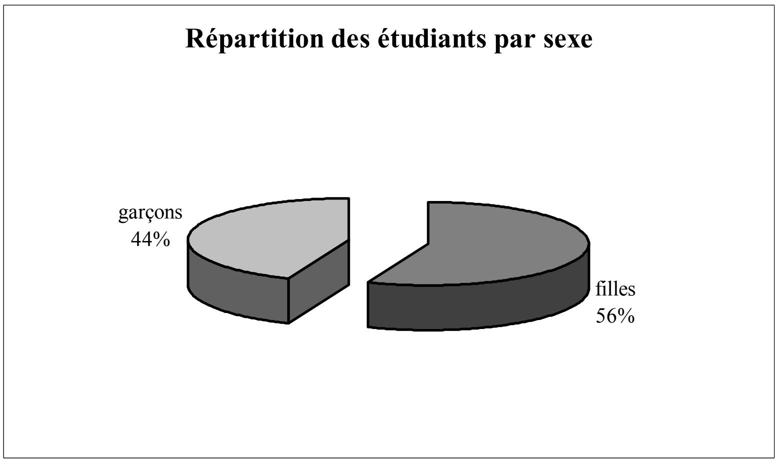
La plupart des étudiants qui répondent aux questionnaires étudiaient les mathématiques dans des facultés scientifiques (soit 37 étudiants sur 41). Quatre étudiants étudiaient les mathématiques dans la discipline « mathématiques » de l'enseignement primaire des facultés d'éducation et un étudiant dans la discipline « mathématiques » des mêmes facultés.

En ce qui concerne la répartition des étudiants par année scolaire, comme le montre bien le tableau ci-dessous, la plupart des étudiants étaient en première année lors de la passation des questionnaires. Un faisait son DEA, neuf étaient sur le point de terminer leurs études supérieures (quatrième année), deux étudiants étaient en troisième année et cinq étudiants en deuxième année.

[17] Cf. annexe V-3



Le sexe dominant des étudiants qui répondent aux questionnaires est féminin. Selon le tableau suivant les filles[18] constituent 56% des effectifs globaux des étudiants ayant répondu.



Chaque questionnaire comprend sept questions. Dans la première question nous avons invité les étudiants à exprimer leurs idées en répondant à la question suivante « pourquoi on se sent le besoin d'apprendre ou de faire apprendre les mathématiques ? ». La deuxième question demandait aux étudiants d'estimer les mathématiques effectuées au lycée, au dérsané et à l'université. Dans la question suivante nous leur avons demandé s'il y a une différence entre leurs idées actuelles sur les mathématiques et celles d'avant le commencement de l'enseignement supérieur. La quatrième question invitait les étudiants à parler un peu du système des concours et leur demandait ainsi s'il est toujours possible de dire qu'un élève qui répond correctement à toutes les questions de mathématiques au concours va réussir dans

[18] Selon le Centre de Sélection et d'Installation des Etudiants, au concours de 2003, 44,8% des élèves qui ont obtenu une place dans une université sont des filles et 55,2% sont des garçons. (cf. le site Internet de OSYM, www.osym.gov.tr)

l’enseignement supérieur. Dans la cinquième question nous leur avons proposé un dialogue entre trois étudiants qui parlent des difficultés auxquelles ils font face dans l’enseignement supérieur, en faisant un lien avec leur enseignement précédent. Les étudiants devaient ainsi indiquer avec quel étudiant ils sont d’accord et ensuite exprimer leur raisons. En ce qui concerne la sixième question, nous avons invité les étudiants à proposer des conseils pour l’enseignement des mathématiques aux lycées et aux dérsanés. Dans la dernière question nous leur avons demandé comment ils s’estiment (ou s’estimaient) en mathématiques au lycée et à l’université.

CHAPITRE III

ANALYSE DES MANUELS

Plan du chapitre III :

Afin de comparer les manuels de lycée et ceux de préparation au concours et de mettre en évidence les similarités et les divergences, l'enjeu fort du concours dans les manuels de lycée, dans ce chapitre, nous allons continuer notre travail par l'analyse des manuels. Comme nous l'avons déjà indiqué, nous avons choisi sept manuels dont l'un est le manuel officiel et trois sont les manuels de préparation au concours les plus utilisés.

En particulier, pour chaque manuel nous décrirons : les activités introductrices, le cours, les travaux pratiques et les exercices résolus suivant les lignes directrices précisées dans la partie méthodologique. Nous donnerons ici l'analyse de deux manuels de lycée et d'un manuel de préparation au concours manuel par manuel. Nous avons mis l'analyse des quatre autres manuels en annexes[1]. Nous allons terminer cette partie par une synthèse comparative des données recueillies.

Avant de passer à l'analyse des manuels, nous allons mettre en évidence la place de la notion de fonction dans les programmes actuels en Turquie.

1. Place de la fonction dans les programmes actuels de seconde, de première et de terminale en Turquie

Il nous semble tout d'abord nécessaire d'indiquer que les programmes officiels turcs sont très courts. On annonce simplement des objectifs et des compétences exigibles sans détailler. Il est très rarement possible de trouver des commentaires, des explications et des exemples.

En Turquie la notion de fonction est, pour la première fois, introduite en classe de seconde. A ce niveau l'élève rencontre une définition[2], des propriétés particulières des fonctions et des fonctions particulières, la composition des fonctions et la définition de l'inverse d'une fonction. Dans cette classe ultérieurement on traite le chapitre « polynomes », et on revoit

[1] Voir annexe I.

[2] La définition ensembliste de la notion de fonction.

alors la notion de fonction. En première l'élève est face aux fonctions trigonométriques, logarithmiques, exponentielles et fonctions de permutation. En classe de terminale la composition des fonctions et l'inverse de la fonction sont brièvement reprises d'un point de vue ensembliste. De plus les fonctions croissantes et décroissantes, les fonctions paires et impaires, les quatre opérations sur les fonctions, des fonctions particulières (fonction définie par morceaux, fonction valeur absolue, fonction signe[3], et fonction valeur entière[4]) figurent dans le programme de terminale.

Par ailleurs, en terminale l'élève continue à utiliser la notion de fonction en travaillant sur les limites de fonctions, la continuité des fonctions et les dérivées des fonctions.

Dans le programme officiel de la classe de seconde les fonctions sont mises en place en même temps que la notion de correspondance entre ensembles et de loi de composition interne[5] dans un même chapitre. Nous avons classé les notions qui apparaissent ensuite dans le programme de seconde en quatre rubriques:

1.1 Définition ensembliste et représentations graphiques

Il n'y a aucune indication sur la façon de définir «les fonctions ». C'est la raison pour laquelle le choix de définition reste assez flou. Cependant le fait que des éléments sur les ensembles et les correspondances entre ensemble précédent les fonctions conduit à penser que la définition ensembliste des fonctions est préconisée. Dans ce cadre on attend des élèves de pouvoir définir les fonctions à partir d'ensembles, l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée, l'ensemble image et de les représenter graphiquement (par exemple avec des diagrammes sagittaux). De plus l'élève est aussi amené à chercher si une correspondance donnée (algébriquement ou à partir d'ensembles) est une fonction. Nous constatons que la représentation graphique d'une fonction donnée dans un repère orthonormé ainsi que le passage de l'écriture ensembliste à l'écriture sous forme de liste[6] figurent dans le programme.

1.2 Egalité des fonctions à partir d'ensembles

Dans cette partie on propose de définir l'égalité des deux fonctions à partir d'ensembles et chercher si deux fonctions données sont égales.

---

[3] y=sign(f(x))

[4] f(x)= E(x)

[5] Soit A un ensemble non vide. Chaque fonction définie d'un sous-ensemble quelconque non vide de AxA vers A est appelée « loi de composition interne » sur A.

[6] Par exemple f={(a,1), (b,2), (c,4)}

1.3 Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières

Nous trouvons, dans le programme de seconde, quelques propriétés des fonctions et quelques fonctions particulières. Ainsi on demande de définir à partir d'ensembles les fonctions injectives, surjectives, non surjectives, la fonction identique, les fonctions constantes et nulle. Malgré cette diversité, les fonctions linéaires, affines ne sont pas mises en place dans le programme. La reconnaissance des propriétés particulières d'une fonction donnée et l'écriture d'une fonction ayant une de ces propriétés sont dans les compétences exigibles[7] des élèves. Le programme introduit enfin la définition des ensembles infinis et l'équipotence des deux ensembles grâce à une correspondance bijective

1.4 Compositions des fonctions

Dans cette dernière partie, le programme a pour objectif de définir à partir d'ensembles la composition des fonctions et de montrer que cette opération est associative et non commutative. De plus la définition de l'inverse d'une fonction bijective et celle de la fonction identique sont données[8] à partir de la composition. Le programme introduit la composée d'au maximum trois fonctions définies de manière ensembliste, la composée d'une fonction donnée et son inverse et enfin l'inverse de l'inverse d'une fonction. La représentation graphique d'une fonction donnée et celle de son inverse dans un même plan muni d'un repère orthonormé et la reconnaissance de la relation entre elles sont aussi indiquées dans le programme de seconde. L'élève est amené à trouver et écrire la fonction f lorsqu'on lui a donné la composée fog (ou gof) et g.

Enfin il y a une petite explication dans laquelle les auteurs proposent d'abord d'introduire la loi de composition interne et ses propriétés avant la composition des fonctions. De plus ils conseillent d'aborder la fonction identique et l'inverse des fonctions à partir de la composition et d'expliquer des ensembles équipotents et des ensembles infinis avec des exemples grâce aux fonctions bijectives. Ensuite ils proposent l'exemple suivant :

Pour $\mathbb{N}=\{0,1,2,3.....\}$, $P=\{0,2,4,6.....\}$ *et* $P\subset\mathbb{N}$ $f: \mathbb{N}\to P$ *est définie pour tout x de* $\mathbb{N}$ *par* $f(x)=2x$. *Comme la fonction f est bijective, donc* $\mathbb{N}\equiv P$ *et les ensembles* $\mathbb{N}$ *et P sont les ensembles infinis.*

[7] Compétences exigibles=compétences déduites du programme.
[8] Reprises.

1.5 Conclusion

L'élève rencontre pour la première fois la notion de fonction en seconde. Malgré cela on aborde presque toutes les notions ensemblistes à ce propos. Cependant nous voyons en général que la notion apparaît exclusivement comme « objet[9] », sauf dans la démonstration de « équipotence des ensembles infinis où on utilise comme « outil[10] » la bijectivité d'une fonction.

Nous allons vérifier dans les manuels le respect de ce programme tant au niveau du cours qu'en ce qui concerne les exercices. Est-ce que le caractère outil des fonctions apparaît ? Les élèves auraient-ils à mélanger plusieurs notions ? Est-ce que les seuls cadres d'utilisation vont être les cadres ensemblistes, algébriques et graphiques ?

[9] Cf. Douady (1987).
[10] Ibidem

2. Analyse du manuel Tutibay

Nous remarquons d'emblée que dans le manuel Tutibay la notion de fonction se présente dans le chapitre intitulé « correspondances, fonctions, loi de composition interne». Alors il n'y a pas de chapitre exclusivement consacré à la notion de fonction. Nous ne trouvons aucune activité que nous pouvons qualifier d'activité introductrice. Les auteurs du manuel débutent par mettre en rapport fonctions et correspondances. Ils conseillent aux élèves de se rappeler la définition des couples et des correspondances. Ensuite est donné l'exemple suivant : on appelle fonction la correspondance définie par $\beta=\{(1,1), (2,3), (3,2)\}$ dont on vérifiera ensuite que c'est bien une fonction. Enfin ils terminent cette petite introduction par faire le bilan suivant : « chaque fonction est également une correspondance ».

2.1 Définition ensembliste de la notion de fonction

L'introduction de la notion de fonction se fait à partir de sa définition ensembliste. On donne donc la définition suivante :

« Soient A et B deux ensembles non vides et β une correspondance de A vers B, $\beta \subset (AxB)$. Si chaque élément de A a une et une seule image dans l'ensemble B, on appelle β fonction de A vers B. »

Nous voyons ainsi que la notion de fonction apparaît comme une correspondance vérifiant des conditions particulières. L'analyse de notre premier questionnaire qui contient une question demandant aux élèves de définir la notion de fonction nous permettra de préciser leur connaissance de la notion.

A la suite de cette définition, conformément au programme officiel, le manuel présente l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image d'une fonction en utilisant un diagramme sagittal. Ensuite les deux conditions reprises la comptine $\mathbf{C_0}$ « aucun élément de l'ensemble de définition sans image et pas de plus d'une image par élément » sont citées comme suit :

Une correspondance est une fonction si
a)Dans l'ensemble de définition il n'y a pas d'élément sans image.
b)Tout élément de l'ensemble de définition a une seule image.

Nous rencontrons aussi l'écriture symbolique de la définition :

Soit $f \subset AxB$
a) $\forall x \in A$, $\exists y, y \in B$ $(x, y) \in f$
b) $(x, y_1) \in f$ *et* $(x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

Bien qu'il ne mette pas en place la définition de la notion de fonction en terme de variable, le manuel cite la notation $y=f(x)$ (*y* variable dépendante et *x* variable indépendante).
Cette théorie est suivie d'une série d'exemples. Le premier exemple concerne l'utilisation de la comptine $\mathbf{C_0}$ pour déterminer les fonctions parmi trois correspondances représentées à partir d'ensembles. Le deuxième exemple demande aux élèves de déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image d'une fonction représentée en diagramme sagittal (ce qui nous renvoi aux compétences exigibles par le programme officiel). A la suite de cet exemple nous rencontrons l'introduction de la notation y=f(x) et sa représentation en diagramme sagittal. Dans le troisième exemple il s'agit de la formule algébrique d'une fonction affine. On demande à l'élève de définir l'ensemble image de la fonction à partir de l'ensemble de définition. Le passage du registre algébrique au diagramme sagittal est mobilisé. L'exemple suivant nécessite de calculer quelques valeurs numériques à partir de la formule algébrique d'une fonction linéaire. Le dernier exemple consiste à trouver l'ensemble de définition et l'ensemble image d'une fonction définie par une liste de couples[1] et les représenter graphiquement à la fois dans un repère orthonormé et à l'aide d'un diagramme sagittal.

2.2 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé

La définition de la représentation graphique des fonctions est présentée dans un plan analytique (muni d'un repère orthonormé). Ensuite cette définition est illustrée par deux exemples. L'un concerne la représentation graphique d'une fonction du second degré et l'autre celle d'une fonction affine(linéaire)[2] dans un repère orthonormé. Les deux fonctions sont définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z.

2.3 Egalité des deux fonctions

Après avoir présenté la définition de l'égalité des fonctions, le manuel l'illustre avec deux exemples dans lesquels il s'agit presque des mêmes types de fonction. Ainsi l'élève doit

---
[1] f={(1,3),(2,5),(3,3),(7,0),(9,-1)}
[2] En Turquie quand on dit la fonction linéaire, cela signifie qu'on parle d'une fonction définie par f(x)=ax+b.

étudier si la restriction d'une fonction linéaire et d'une fonction du second degré à des sous-ensembles finis de Z sont égales.

2.4 Propriétés particulières des fonctions

Nous retrouvons tous les types de propriétés particulières des fonctions indiqués par le programme officiel : les fonctions injectives, non surjectives, surjectives, constantes, la fonction nulle et identique. Bien que les fonctions affines ou polynomiales soient implicitement utilisées lors des exemples et exercices résolus, on n'en parle jamais. Le manuel présente d'abord les définitions formelles ensuite les illustre avec des exemples. Dans certains cas il y a des exercices résolus qui suivent. Nous ne présenterons pas toutes ces définitions. Nous nous limitons aux exercices résolus et points méthodes proposées au cours de leur résolution.

Il y a trois exercices qui concernent la notion de fonction surjective. Les deux premiers sont destinés à étudier la surjectivité d'une fonction affine à partir de la donnée des ensembles A et B (sous-ensembles de Z). La représentation en diagramme sagittal est présente dans les deux cas. Avant de passer au dernier exemple une méthode est proposée comme suit :

> *Pour étudier la bijectivité d'une fonction y=f(x), on écrit d'abord x à la place de y et y à la place de x. Ensuite on calcule y en fonction de x. Et on examine s'il y a un $x \in A$, pour tout $y \in B$.*

Enfin le dernier exercice conduit les élèves à utiliser cette méthode pour étudier la surjectivité d'une fonction affine définie sur |R. On propose également de résoudre cet exercice en utilisant la représentation graphique de la fonction dans le plan analytique. Et pour cette solution on propose une autre méthode :

> *Pour étudier la surjectivité d'une fonction à partir de sa représentation graphique, on trace une parallèle à l'axe des abscisses par un point de l'ensemble d'arrivée. Si cette parallèle coupe la représentation graphique, la fonction est surjective et f(*|R*)=*|R.

Nous remarquons cependant que dans l'énoncé de cette deuxième méthode il y a une imprécision. Est-ce qu'une seule parallèle suffit à vérifier la surjectivité d'une fonction définie sur |R ? Nous croyons qu'il faut remplacer le mot « un point » par un point quelconque.

A la suite de ces méthodes nous ne retrouvons aucun raisonnement ni aucune explication. Cela nous amène à penser qu'on ne demande à l'élève qu'à les appliquer simplement.

Pour la non-surjectivité des fonctions, deux exercices sont proposés : l'un montre la non-surjectivité d'une fonction linéaire définie d'un sous-ensemble de Z dans Z. La représentation en diagramme sagittal est mobilisée. Pour l'autre est énoncée une méthode concernant l'étude de la non-surjectivité d'une fonction définie par $y=f(x)$:

Soit la fonction définie par $y=f(x)$; en écrivant x à la place de y et y à la place de x on étudie les x pour lesquels $y\in B$. Si $x\notin A$, f est une fonction non surjective.

L'élève est donc invité à appliquer cette méthode lors de la résolution du deuxième exercice qui propose d'étudier la non-surjectivité d'une fonction affine définie sur Z. Nous voyons que la résolution analytique est aussi proposée. Et bien sûr la méthode correspondante est énoncée :

Pour étudier la non-surjectivité d'une fonction à partir de sa représentation graphique dans le plan analytique, on trace les droites parallèles à l'axe des abscisses de l'ensemble d'arrivée. Si au moins une d'elles ne coupe pas la représentation graphique, la fonction est non surjective.

En ce qui concerne la fonction injective, le manuel illustre la définition avec son écriture symbolique, une méthode analytique et un certain nombre d'exercices.

f est injective si $\forall x_1,x_2\in A,\ x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ *ou* $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ *Si une droite parallèle à l'axe des abscisses menée par un point de l'ensemble d'arrivée coupe la représentation graphique d'une fonction en un seul point, la fonction est injective.*

Nous constatons qu'il y a cinq exercices résolus : le premier illustre la définition et cette méthode analytique. Les trois exercices suivants concernent l'application directe de l'écriture symbolique de la définition. Le premier exercice demande d'étudier la bijectivité d'une fonction linéaire définie de Z vers Q. Le deuxième invite aussi l'élève à étudier si une fonction linéaire définie sur |R est bijective. Dans le dernier exercice de ce groupe, on demande d'écrire une fonction injective définie sur |R. Il nous semble nécessaire souligner que c'est la première fois que l'élève rencontre un exercice ouvert. Le cinquième exercice n'a pas un rapport direct avec l'injectivité. Il s'inspire beaucoup d'une des questions du concours. L'élève doit déterminer l'ensemble de définition d'une correspondance rationnelle définie sur

|R à partir de sa formule algébrique pour qu'elle soit une fonction. Il faut signaler que cet exercice est tout à fait dans l'esprit du programme de la classe de Terminale.

Après avoir défini les fonctions constantes de manière ensembliste, le manuel fait intervenir sa représentation en diagramme sagittal et deux exemples. Le premier montre que la fonction f définie sur |R par *f(x)=3* est une fonction constante. Les deux types de représentation graphique sont présents : la représentation graphique dans un repère orthonormé et le diagramme sagittal. A la suite de cet exemple, nous trouvons le commentaire[3] suivant :

Si l'ensemble d'arrivée de la fonction constante contient un seul élément, la fonction est également surjective.

L'autre exemple demande d'étudier si l'expression *x=3* est une fonction. La représentation graphique dans un repère orthonormé et en diagramme sagittal est aussi mobilisée.

Enfin le manuel présente comme fonctions particulières la fonction nulle et la fonction identique. En ce qui concerne la fonction nulle nous ne rencontrons que ce bref commentaire « le deuxième élément de chaque point sur l'axe des abscisses est nul ». La définition de la notion de fonction identique est suivie des représentations graphiques dans un repère orthonormé et diagramme sagittal, un exercice résolu concerne l'utilisation directe de la formule de la notion de fonction identique. Il s'agit de calculer la valeur k si *y=f(x)=x-4+k* est une fonction identique. Cette partie se termine par cette phrase « la fonction identique est bijective et l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée sont identiques »

2.5 Ensembles infinis ou finis et ensembles équipotents

Conformément aux consignes du programme officiel les ensembles infinis ou finis et les ensembles équipotents sont présentés à partir de la bijectivité et sur des exemples. Ainsi la définition des ensembles infinis ou finis est suivie d'une série d'exemples dans lesquels on parle de quelques ensembles infinis et ou finis comme les nombres naturels et les jours de la semaine et de leur écriture. En ce qui concerne les ensembles équipotents, il y a deux exemples qui illustrent la définition. L'un montre que deux ensembles finis sont équipotents en utilisant les diagrammes sagittaux. L'autre consiste à montrer que l'ensemble des nombres naturels est infini. Pour ce faire la fonction f définie de l'ensemble des nombres naturels vers l'ensemble des nombres pairs par *f(x)=2x* est mobilisée (ce qui nous renvoie à

[3] Ce manuel présente, les points méthodes ou les connaissances que l'élève doit retenir, en écrivant en bleu. Comme ce commentaire est aussi présenté en bleu, nous l'avons encadré.

l'exemple suggéré par le programme officiel). Alors c'est la bijectivité de *f* qui doit être utilisé comme outil. Un diagramme sagittal est toujours utilisé.

Comme c'est bien indiqué dans le programme officiel, avant de présenter la composition des fonctions le manuel propose la notion de loi de composition interne et ses propriétés (commutativité, associativité…). Cela nous conduit à penser que, puisque la composition est une loi de composition interne entre des fonctions, les auteurs du programme considèrent ce passage important.

2.6 Composition des fonctions

Dans la définition ensembliste de la composition, il y a un mot sur lequel est attirée notre attention. C'est le mot « transporter ». Alors la composition des fonctions est considérée comme « un porteur » qui transporte les éléments d'un ensemble vers un autre. La représentation en diagramme sagittal accompagne la définition. Il y a aussi un certain nombre d'exercices. Le premier exercice consiste à utiliser le passage du diagramme sagittal au registre algébrique. Les deux exercices suivants demandent de composer une fonction affine et une fonction du second degré. Il s'agit des deux types de composée (fog et gof) et on utilise la représentation en diagramme sagittal. Cet exercice sert également à montrer que la composition n'est pas commutative. Le dernier exrcice invite l'élève à étudier l'associativité de la composition à partir de trois fonctions du premier degré.

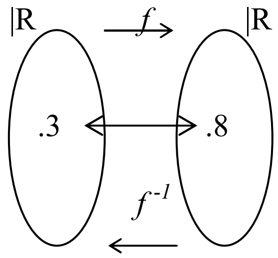
Nous retrouvons pour la deuxième fois la définition de la fonction identique. Mais cette fois-ci elle est définie à partir de la composition. De plus la propriété Iof=foI=f est démontrée. La théorie est suivie d'un exercice dans lequel il s'agit des deux types de composée d'une fonction affine et la fonction identique *(Iof(x) et foI(x)).* Dans la dernière partie de cet exercice on demande de calculer la valeur *foI(3).*

2.7 Définition de l'inverse d'une fonction

Après avoir présenté la définition de l'inverse d'une fonction de manière ensembliste on donne l'interprétation de la définition en diagramme sagittal et la relation entre la fonction inverse et la fonction identique ($\overset{-1}{f}of = fo\overset{-1}{f} = I$). Il y a sept exercices proposés. En regardant la quantité des exercices nous pouvons dire que la fonction inverse est considérée comme importante. Le premier exercice demande à l'élève de travailler dans le cadre de la théorie élémentaire des ensembles. Ainsi l'élève doit trouver l'inverse d'une fonction représentée en diagramme sagittal. Les trois exemples suivants proposent de trouver l'inverse d'une fonction du premier degré. Parmi eux le premier n'utilise pas de calcul ni de formule. Il s'agit de passer du registre de la formule algébrique au registre de la langue naturelle et vice versa. Nous remarquons cependant que cet exercice s'inspire beaucoup d'une des questions du concours (Q36/1998).

Exemple : on considère la fonction f définie sur |R *par f(x)= 3x-1. Trouver l'inverse de f.*
Comme la fonction f est bijective, $f^{-1}(x)$ *existe.*
f : elle prend un élément. Ensuite elle le multiplie par 3 et elle en soustrait 1.
f^{-1} *: elle prend un élément. Ensuite elle y ajoute 1 et elle le divise par 3.*
Brièvement si on écrit comme fonction ceux qu'on a dit en haut :

$f(x)= 3.x-1 \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{3}$ *par exemple ;*$f(3)=3.3-1=8$, $f^{-1}(x)=\frac{8+1}{3}=\frac{9}{3}=3$



$f(3)=8$ *et* $f^{-1}(8)=3$

Avant de passer aux deux exercices résolus suivants le manuel énonce comme une règle la méthode $\mathbf{M}_{\mathbf{xfy}}$ « calculer x en fonction de y » lors de trouver l'inverse d'une fonction :

Règle : on trouve y en écrivant x à la place de y et y à la place de x. Si on écrit $f^{-1}(x)$ *à la place de y, on trouve l'inverse de la fonction f*

Il y a cinq exemples pour lesquels on utilise cette méthode. Les deux premiers sont destinés à trouver l'inverse d'une fonction du premier degré. Parmi eux l'un demande deux fois l'utilisation de la méthode pour montrer que l'inverse de l'inverse d'une fonction est égal à la fonction elle-même $((f^{-1})^{-1}(x)=f(x))$. Et l'autre propose aussi de calculer quelques valeurs numériques de x par la fonction et son inverse. Le troisième exercice invite les élèves à trouver l'inverse d'une fonction rationnelle. Au travers de cet exemple les auteurs du manuel fait intervenir la technique plus courte pour trouver l'inverse que nous appelons « la Recette d'Abracadabra ($\mathbf{R}_\mathbf{a}$) » :

Exemple : Trouver l'inverse de la fonction f définie de |R-{ $\frac{d}{c}$ } *vers* |R-{ $\frac{a}{b}$ } *par* $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$.

$y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow x=\frac{ay+b}{cy+d}$, $cxy+xd=ay+b$, $y(cx-a)=-xd+b$, $y=\frac{-xd+b}{cx-a}$, $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$

$f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$. $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ *les constantes a et d qui se trouvent sur la diagonale changent à la fois la place et le signe.*

Le quatrième exercice comprend trois parties. Il s'agit d'une fonction f linéaire définie sur |R. Dans la première partie l'élève est amené à trouver la double composée de la fonction f. La deuxième demande de déterminer la composée $(f^{-1}of)$ et la dernière la composée $(fof)^{-1}$.
En ce qui concerne le dernier exercice il s'agit d'une composée implicite. L'élève doit trouver l'inverse de l'une des fonctions et calculer l'image de 3 :

Exemple : Si f :|R-*{0}*$\rightarrow$|R-*{1} et* $f(2x-1)=\frac{2x+1}{2x-1}$, *trouver* f^{-1} *et calculer la valeur* $f^{-1}(3)$.

Si on écrit l'inverse de 2x-1 au lieu de x dans la fonction f, on trouve f(x).

Soit 2x-1=y. Si $x=\frac{y+1}{2}$, *l'inverse de 2x-1 est de* $\frac{x+1}{2}$.

$f(2(\frac{x+1}{2})-1)=\frac{2(\frac{x+1}{2})+1}{2(\frac{x+1}{2})-1}$, $f(x)=\frac{x+2}{x}$, $f^{-1}(x)=\frac{2}{x-1}$, $f^{-1}(3)=\frac{2}{3-1}=1$

La relation entre la représentation graphique de la fonction et celle de son inverse dans un repère orthonormé est introduite, sous la rubrique intitulée « la représentation graphique de la fonction inverse dans un repère orthonormé », les deux représentations graphiques sont symétriques par rapport à la droite $y=x$. A la suite nous remarquons qu'il y a quatre exercices résolus. Les deux premiers concernent directement la représentation graphique de la fonction et son inverse. Ainsi l'un demande de représenter graphiquement dans un repère orthonormé une fonction du premier degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. Quant à l'autre il s'agit aussi d'une fonction du premier degré. Mais cette fois-ci elle est définie sur |R.
L'énoncé du troisième exercice nous a donné l'impression qu'il s'agit d'un exercice représentatif dans le sens où la composée est considérée comme une loi de composition interne numérique :

Exemple : Résoudre l'équation $(\frac{2x+7}{3x-5})o(\frac{x+1}{2x+1})(3)=\frac{11}{23}x-2$.

Deux solutions sont proposées. La première solution demande de mettre la valeur numérique 3 dans la première fonction à droite, ensuite la valeur obtenue dans la deuxième fonction. Quant à l'autre solution l'élève est amené à définir d'abord la composée et ensuite l'image de 3. Dans ces deux types de solutions la résolution d'équation paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail.

Le dernier exercice du manuel dans lequel il y a deux composées : l'une « implicite » *(g(2x-3)=2x+4)* et l'autre « explicite » *(* $fog^{-1}(x)=4x-3$*)*. On demande de déterminer la fonction f. L'élève doit d'abord trouver la fonction g comme il l'a déjà fait dans les exercices précédents. Ensuite en utilisant la définition de la composée et la fonction identique il doit trouver la fonction f. Il s'agit donc de l'application directe du cours.

2.8 Synthèse

Constatons tout d'abord que toutes les notions qui apparaissent dans le programme officiel sont abordées par le manuel. Il n'y a aucune activité introductrice. En s'appuyant sur la relation entre fonctions et correspondances la notion de fonction est introduite de manière ensembliste. Nous pensons que ce type d'introduction est très loin de provoquer une motivation chez les élèves. Il est possible qu'ils supposent que la notion de fonction est peu distinguée de la notion de correspondance entre ensembles.

Après ou avant des exercices les points essentiels des connaissances qui servent directement à les résoudre sont simplement énoncés. Il n'y a aucun raisonnement qui les accompagne.

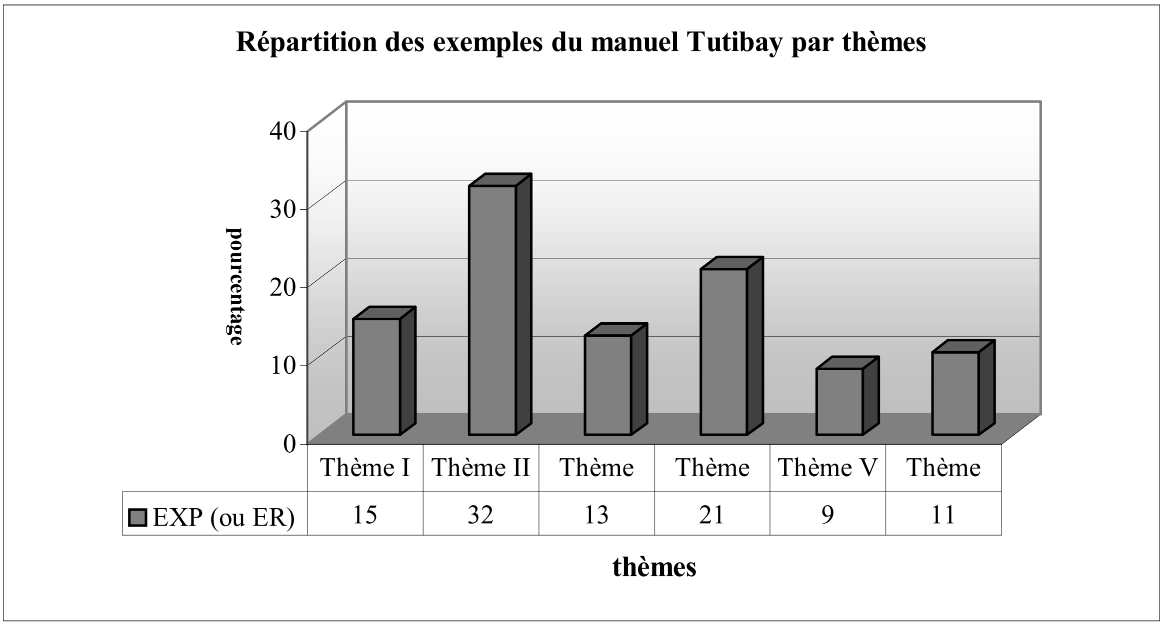
Dans la collection de Tutibay il n'y a pas de travaux pratiques. Le manuel présente la résolution d'un certain nombre d'exercices et chacun contient une solution commentée. De plus le manuel ne poursuit pas un ordre traditionnel[4] (cours-exercices résolus). Toutes les choses semblent passer dans le cours. Par exemple après avoir présenté une définition, cinq ou six exemples (ou exercices résolus) peuvent figurer.

La notion de fonction est toujours présentée comme un objet dans le manuel. Il n'y a aucun exercice dans lequel on utilise la notion de fonction comme un outil.

[4] Nous parlons des manuels turcs.

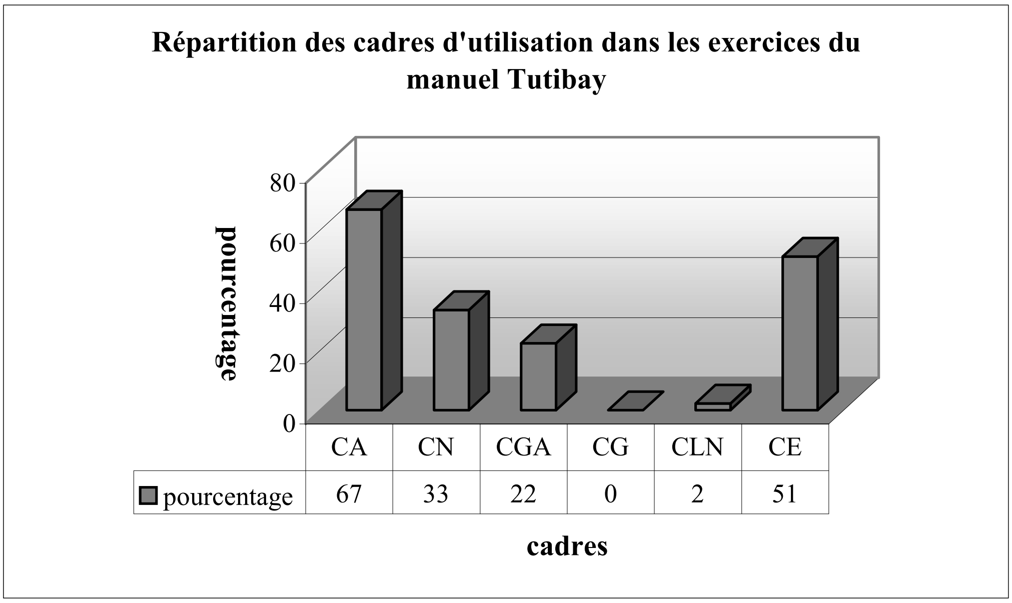
Pour trouver l'inverse d'une fonction définie algébriquement la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ est toujours utilisée. Quant à la recette $\mathbf{R_a}$ elle est présentée dans un seul exercice. Et il n'est jamais repris.

Selon le tableau ci-dessous la plupart des exemples proposés par le manuel font travailler sur les propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières (thème II). Le taux des exemples qui concernent la composition des fonctions est de 21% (thème VI). Le thème I et le thème III se rapprochent par le taux de proposition. Ainsi dans 15% des exemples l'élève est amené à utiliser la définition ensembliste de la notion de fonction ou les ensembles correspondant (thème I). Et 13% font chercher l'inverse des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles (thème III). Par ailleurs les exemples qui font travailler sur la représentation des fonctions dans un repère orthonormé sont les exemples les plus rares du manuel Tutibay (thème V).



Thème I : Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant, Thème II : Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières, Thème III : Recherche de l'inverse des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles, Thème IV : Composition des fonctions, Thème V : Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé, Thème VI : Ensembles finis et équipotents. EXP : Exemples, ER : Exercices résolus, (Effectif : 47 exemples)

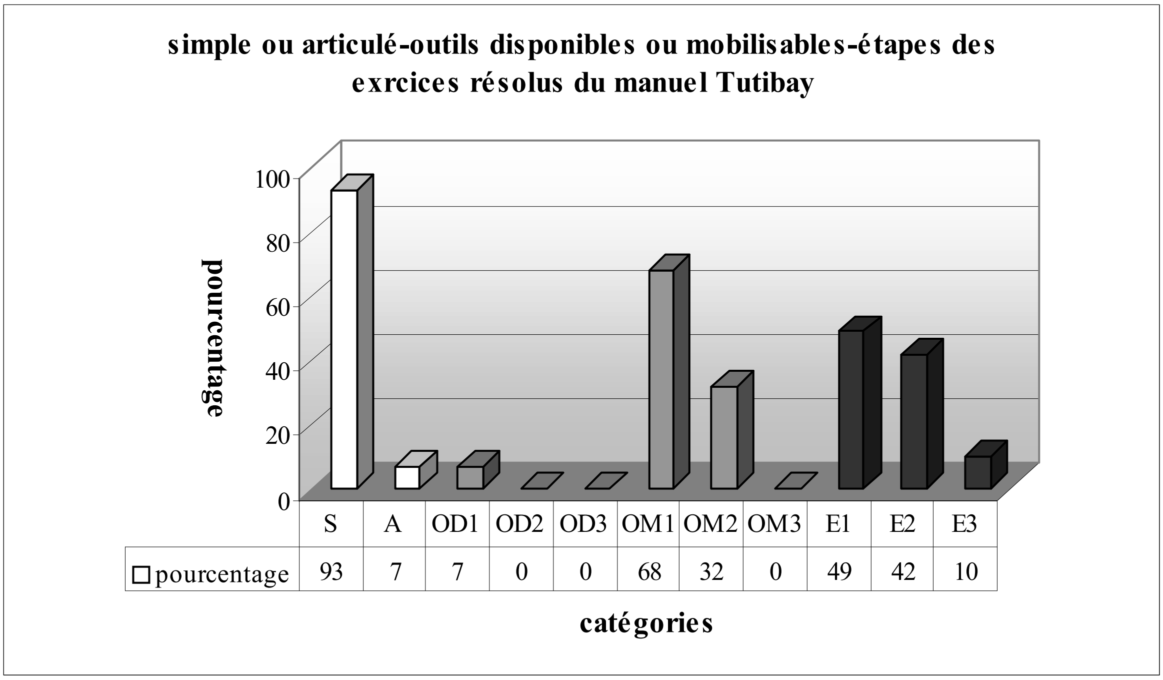
Comme le montre bien le tableau ci-dessous, les cadres majoritairement d'utilisation dans les exercices résolus sont le cadre algébrique et le cadre de la théorie élémentaire des ensembles. Le cadre géométrique est totalement absent. En ce qui concerne le cadre analytique il est peu fréquent. Cela signifie que le manuel Tutibay n'est pas géométriquement riche.



CA :Cadre Algébrique, CN :Cadre Numérique, CGA :Cadre Analytique, CG :Cadre Géométrique, CLN :Cadre de la Langue Naturelle, CE :Cadre de la Théorie Elémentaire des Ensembles.

Le tableau suivant montre bien qu'un très petit nombre des exercices portent sur plusieurs connaissances antérieures (ou ultérieures). La grande majorité d'entre eux font référence directe la notion de fonction. Dans les exercices résolus nous constatons que les auteurs du manuel respectent généralement le programme officiel de la classe de seconde. Il y a un seul exercice qui présente une question du concours dans l'esprit du programme de la classe de terminale. Dans la plupart des exercices l'élève doit mobiliser un seul outil. Tandis que 32% d'entre eux nécessitent de faire appel aux deux outils mobilisables. En ce qui concerne la répartition du nombre des étapes[5] prés de la moitié des exercices comprennent une seule étape. Ce taux descend un petit peu dans les exercices où l'élève doit passer deux étapes pour arriver à la bonne réponse. Par ailleurs, un faible pourcentage d'exercices peuvent être résolus en trois étapes.

[5] Puisqu'on peut résoudre certains exercices en une étape ou deux étapes, il est normal que la somme des pourcentages des étapes dépasse 100%.



S :Simple, A :Articulé, OD1 :Outil disponible 1, OD2 :Outil disponible 2, OM1 :Outil mobilisable 1, OM2 :Outil mobilisable 2,OM3 :Outil mobilisable 3,E1 :Etape 1, E2 :Etape 2, E3 :Etape 3

3. Analyse du manuel officiel

3.1 Définition ensembliste de la notion de fonction

Avant la définition de la notion de la fonction les auteurs du manuel rappellent la définition de la notion de correspondance et mettent en évidence la relation entre ces deux notions. Il n'y a aucune activité préparatoire.

La définition ensembliste des fonctions est suivie de son écriture symbolique, de sa représentation en diagramme sagittal et d'un certain nombre d'exemples. La comptine $\mathbf{C_0}$ n'est pas explicitement présentée. Mais avant de passer aux exemples il y a cependant deux correspondances définies par des diagrammes sagittaux dont l'une est une fonction et l'autre ne l'est pas.

En ce qui concerne les exemples, dans le premier exemple il s'agit d'écrire une correspondance définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par $f(x)=3x$, sous forme d'une liste de couples, de chercher si cette correspondance est une fonction, d'écrire l'ensemble image de f sous forme de liste de couples et de représenter f en diagramme sagittal. Le deuxième exemple fait chercher si une correspondance définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par une liste de couples est une fonction. L'application directe de la définition ensembliste est aussi mise en jeu comme dans l'exemple précédent. Dans le troisième exemple on demande d'écrire une correspondance définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par $f(x)=x^2$ sous forme de liste de couples, de la représenter en diagramme sagittal et de déterminer son ensemble image. Quant au quatrième exemple l'élève doit écrire une fonction définie par un diagramme sagittal sous forme de liste de couples et trouver sa formule algébrique. Dans le cinquième exemple l'élève est amené à écrire sous forme de liste de couples et représenter en diagramme sagittal une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z.

Dans l'exemple suivant on demande de trouver la valeur a si la fonction f est définie sur |R par $f(x)=-2x+3$ et $f(-2)-f(a+1)=f(2a-3)=f(4)$. L'élève doit d'abord calculer les images, ensuite obtenir une équation pour trouver la valeur a. La résolution d'équations s'avère donc un outil devant être disponible dans ce travail. Le septième exercice fait trouver la valeur a si la fonction f est définie sur |R par $f(x)=3x-4$ et $f(2a)=f(a-1)$. La résolution d'équations que l'élève doit se servir est aussi un outil devant être disponible dans ce travail comme dans l'exercice précédent. Quant au dernier exemple on demande de calculer le nombre des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Pour ce faire une formule est simplement donnée sans commentaire et il ne reste à l'élève qu'à l'appliquer.

3.2 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé

Il y a cinq exemples qui illustrent la définition de la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé. Dans le premier exemple il s'agit de représenter une fonction définie de l'ensemble A qui contient quatre prénoms vers l'ensemble B qui contient quatre villes en Turquie par *f={(x, y) : y est la ville natale de x}*. Le deuxième exemple demande de représenter une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. Le quatrième exemple consiste à déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image d'une fonction représentée graphiquement dans un repère orthonormé. A la suite de cet exemple, la méthode qui consiste à chercher si une représentation graphique dans un repère orthonormé est celle d'une fonction est introduite. Mais elle n'est jamais utilisée. Dans l'exemple suivant l'élève doit déterminer graphiquement certaines images et exprimer leur somme. En ce qui concerne le dernier exemple, il s'agit de déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble image d'une fonction représentée graphiquement dans un repère orthonormé et de trouver graphiquement l'image de 2 et le nombre dont l'image est –5. Les connaissances antérieures portant sur les intervalles sont des outils supposés disponibles dans ce travail.

3.3 Egalités des deux fonctions

La définition des fonctions égales est suivie d'un exemple dans lequel l'élève est amené à montrer que les fonctions f et g définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par $f(x)=x^2-1$ et $f(x)=x^3-2x^2+2x-1$ sont égales. L'élève doit déterminer l'ensemble image des deux fonctions et chercher s'ils sont identiques.

3.4 Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières

Nous trouvons tous les types de propriété particulière des fonctions qui figurent dans le programme officiel :fonctions injectives, non surjectives, surjectives, constantes, la fonction nulle et identique. La définition de chaque propriété est illustrée par des exemples ou la représentation en diagramme sagittal ou l'écriture symbolique de la définition.

Ainsi l'écriture symbolique, la représentation en diagramme sagittal et deux exemples sont proposés à la suite de la définition des fonctions injectives. Dans ces deux exemples l'élève doit chercher si une fonction affine définie sur |R est injective. L'application de l'écriture symbolique de l'injectivité est mise en jeu.

Il y a aussi deux exemples qui illustrent la définition des fonctions surjectives. L'un fait chercher si la fonction carrée définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z est surjective. Et l'autre demande de montrer qu'une fonction affine définie sur |R est surjective.

Dans l'exemple des fonctions non surjectives l'élève doit étudier la non surjectivité de la fonction carrée définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z.

La définition des fonctions injectives-non surjectives est suivie de deux exemples. L'un consiste à chercher le type de propriétés d'une fonction affine définie sur Z. Et l'autre demande à l'élève d'inventer une fonction injective définie sur |R.

En ce qui concerne les exemples de la définition de la fonction identique, il y a deux exemples. Dans le premier exemple l'élève doit trouver l'ensemble image de la fonction f identique définie sur un sous-ensemble fini de Z et de représenter f en diagramme sagittal. Dans le deuxième exercice on demande de trouver les valeurs m et n si la fonction f définie sur Z par $f(x)=(2m-1)x+2n-4$ est identique.

La définition des fonctions constantes et celle des fonctions nulles sont illustrées par une dizaine d'exemples dont deux ne font pas référence directe à cette partie. C'est la raison pour laquelle il nous semble préférable de les analyser dans la partie des exercices résolus.

Quant aux autres exemples, le premier exemple présente la représentation en diagramme sagittal d'une fonction constante et d'une fonction nulle définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Dans le deuxième exemple il s'agit de trouver la valeur a si la fonction f définie sur |R par $f(x)=(a+2)x+3$ est constante. L'élève doit comprendre que la variable x n'existe pas dans l'expression de l'image des fonctions constantes. Il doit donc égaliser $a+2$ à zéro pour trouver la valeur demandée. Le troisième exemple demande de trouver les valeurs m et n si la fonction f définie sur |R par $f(x)=\frac{mx^2+nx+2}{4x^2-2x+1}$ est une fonction constante. En sachant que si la fonction f est constante, f(x)=c, ($c \in$ |R) pour tout x réel, l'élève doit obtenir deux polynomes égaux, ensuite trouver les valeurs m et n en utilisant l'égalité des polynômes. Comme les polynômes figurent dans les chapitres qui viennent, dans cet exemple on demande de faire fonctionner une connaissance prématurée. Le quatrième exemple présente la représentation graphique d'une fonction constante définie sur |R dans un repère orthonormé et il demande à l'élève de reconnaître que la représentation graphique des fonctions constantes est parallèle à l'axe des abscisses. Dans l'exemple suivant l'élève est amené à représenter la fonction f définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par $f(x)=0$ dans un repère orthonormé et à reconnaître que la représentation graphique des fonctions nulles sont des points sur l'axe des abscisses. Le sixième exercices comprend six parties : dans la première partie il s'agit de calculer le nombre des fonctions possibles définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre, dans la deuxième partie de calculer le nombre des correspondances qui ne sont pas des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre, dans la troisième partie de calculer le nombre des fonctions injectives définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre, dans la quatrième partie de calculer le nombre des fonctions constantes définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre, dans la cinquième partie de calculer le nombre des fonctions non surjectives définies sur un sous-ensemble fini et discret et dans la dernière partie de calculer le nombre des fonctions bijectives définies sur un sous-ensemble fini et discret. Pour tout ce faire les formules que l'élève doit utiliser sont simplement données sans commentaire. Et l'élève est amené à les appliquer. Les connaissances antérieures liées aux puissances, factorielles et à la permutation sont des outils supposés disponibles dans ce travail. Par ailleurs il faut signaler que dans le programme de la classe de second il n'y a aucune indication qui correspond à e ce type de travaux. Le septième exemple fait trouver les valeurs a et n si la fonction f définie sur |R par $f(x)=(a-8)x+(2a-n+3)$ est identique. En prenant en compte la formule algébrique de la fonction identique ($f(x)=x$) l'élève doit égaliser ($a-8$) à 1 et ($2a-n+ 3$) à zéro pour trouver a et n. La résolution d'équations que l'élève doit mettre en fonctionner est un outil devant être disponible dans ce travail. Dans l'exemple suivant on demande de déterminer la formule algébrique de f et de représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé si la fonction f définie sur |R par $f(x)=(4n-2)x+2n+3$ est constante. Comme dans le deuxième exemple l'élève doit d'abord égaliser le coefficient de x à zéro, ensuite trouver n et la fonction f.

3.5 Définition de l'inverse d'une fonction

Il y a un exemple qui précède la définition de l'inverse d'une fonction à partir des éléments dans lesquels la relation entre l'existence de l'inverse d'une fonction et la bijectivité est mise en évidence. De plus l'écriture symbolique et la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ sont introduites à la suite de la définition.

Par ailleurs nous constatons que conformément au programme le manuel reprend l'inverse d'une fonction selon la composition des fonctions. Dans ce cadre la relation entre la fonction identique et la composée d'une fonction et son inverse sont mis en place. De plus le manuel propose cinq exemples qui font chercher l'inverse des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles. Dans le premier exemple on demande de trouver l'inverse d'une fonction affine définie sur |R. La méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ est utilisée. En ce qui concerne le deuxième exemple comprenant quatre parties, la première partie demande d'écrire une fonction *f* affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z et son inverse sous forme de liste de couples. La deuxième partie demande de trouver algébriquement l'inverse de la fonction *f* en utilisant la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Dans la partie suivante l'élève est amené à déterminer les deux types de composée de la fonction f et son inverse. Enfin dans la quatrième partie il est nécessaire de représenter graphiquement la fonction f et son inverse dans un même repère orthonormé et de reconnaître la relation entre ces deux représentations graphiques. Le troisième exemple consiste à trouver l'inverse de l'inverse d'une fonction affine définie sur |R. L'élève doit faire fonctionner deux fois la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. A la suite de cet exemple la recette $\mathbf{R_a}$ qui correspond aux fonctions affines est introduite. Dans l'exemple suivant il s'agit de trouver l'inverse d'une fonction rationnelle à partir de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Comme dans l'exemple précédent l'introduction de la recette $\mathbf{R_a}$ concernant les fonctions rationnelles est suivie de cette résolution. Quant au dernier exemple, l'élève doit y montrer que la fonction f définie sur |R par $f(x)=\frac{2x+1}{3}$ est bijective et trouver son inverse. En faisant appel à l'écriture symbolique des fonctions injectives et à la définition des fonctions surjectives l'élève doit montrer la bijectivité de la fonction *f* et trouver son inverse à partir de $\mathbf{R_a}$.

3.6 Ensembles infinis et équipotents

Les auteurs du manuel se contentent de donner la définition des ensembles infinis et des ensembles équipotents. Il n'y a ni un exemple comme celui qui est indiqué par le programme ni une démonstration. Mais ils énoncent simplement que comme on peut définir une correspondance bijective entre l'ensemble des nombres naturels et l'un de ses sous-ensembles, l'ensemble des nombres naturels est infini.

3.7 Composition des fonctions

La définition de la composition des fonctions est introduite de manière ensembliste. La représentation en diagramme sagittal de la définition et un certain nombre d'exemples sont mis en place à la suite.

Dans le premier exemple on demande de représenter en diagramme sagittal les fonctions f, g définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par $f(x)=2x-3$ et $g(x)=x^2-1$, de trouver la formule algébrique de la fonction *gof* et de représenter *gof* en diagramme sagittal. Le deuxième exercice comprend trois parties. La première partie demande de trouver les deux types de composition (*gof* et *fog*) en utilisant deux fonctions affines définies sur |R et de vérifier si elles sont identiques. Dans la deuxième partie l'élève doit calculer *(gof) (-1)* et *(fog)(-1)*. En ce qui concerne la dernière partie, elle consiste à trouver pour quelle valeur de k on a $(fog)(2k-1)=4$. En remplaçant x par *2k-1* dans la fonction *fog* l'élève doit obtenir une équation et trouver *k*. Dans le troisième exemple on démontre l'associativité de la composition des fonctions. La représentation en diagramme sagittal est aussi utilisée. Dans l'exemple suivant il s'agit de l'application directe de l'exemple précédent (associativité). Ainsi l'élève doit trouver *(fog)oh* et *fo(goh)* en utilisant deux fonctions affines et une fonction du second degré définies sur |R. Le cinquième exemple fait composer une fonction affine et une fonction polynome définie par morceaux. Il faut signaler que les fonctions définies par morceaux sont dans le programme de la classe de terminale. Une identité remarquable paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Dans le dernier exemple on demande de calculer *(fog)(-2)* en utilisant une fonction f du second degré et une fonction g affine définies sur |R. Deux solutions sont proposées. La première demande de composer ces deux fonctions et ensuite de calculer l'image demandée. Une identité remarquable est un outil devant être disponible dans ce travail. Quant à la deuxième solution, elle consiste à calculer l'image «fonction par fonction ».

Après ces exemples la relation entre la composition et la fonction identique est introduite sous une rubrique « fonction identique ». Il y a un exemple qui illustre cette théorie. L'élève est amené à trouver les deux types de composée d'une fonction du second degré et la fonction identique définies sur |R, ensuite à calculer l'image d'un nombre réel par ces deux composées.

3.8 Exercices résolus (26 exercices)

Nous trouvons quatre thèmes des exercices résolus du manuel officiel. Le thème I (définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant) et le thème II (propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières) ne sont présents que dans les exemples du cours.

Maintenant nous analysons les exercices résolus thème par thème.

3.8.1 Thème III : Recherche de l'inverse d'une fonction (2 exercices)

Dans un exercice il s'agit de calculer *f(1)* si *f* est bijective et $xf^{-1}(x)-2x=-3+3f^{-1}(x)$. L'élève doit d'abord calculer f^{-1} en fonction de *x* et ensuite trouver son inverse à partir de $\mathbf{R_a}$. Enfin il lui reste à calculer l'image demandée.

Dans un autre exercice on propose de trouver la valeur k si la fonction f est définie sur |R par $f(x)=\frac{2x+k}{3}$ et $f^{-1}(-2)=-1$. En faisant appel à la définition de l'inverse d'une fonction l'élève doit obtenir $f(-1)=-2$ et ensuite une équation. La résolution d'équations que l'élève doit se servir est un outil supposé disponible dans ce travail.

3.8.2 Thème IV :Composition des fonctions (20 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Composition des fonctions (5 exercices) : dans un exercice on demande de montrer $(fog)^{-1}(x)=g^{-1}(x)of^{-1}(x)$ en utilisant les fonctions f et g définies sur |R par $f(x)=x-2$ et $g(x)=3x+1$. Il y a plusieurs étapes. L'élève doit d'abord trouver la composée *fog* et son inverse. Ensuite en trouvant l'inverse des fonctions f et g il doit déterminer la composée $g^{-1}of^{-1}$. Enfin il doit vérifier si ces deux composées sont identiques. Dans le deuxième exercice l'élève est amené à calculer *(fofofof)(3)* si la fonction *f* est définie par morceaux de la façon suivante : (*si x est pair,* $f(x)=\frac{x+2}{2}$ *et si x est impair,* $f(x)=x+1$) . L'élève doit trouver l'image demandée «fonction par fonction ». Comme nous l'avons déjà indiqué, ce type de travail relève du programme de la classe de terminale. Le troisième exercice demande de calculer $(gof^{-1})^{-1}(2)$ si les fonctions f et g sont définies sur |R par $f(x)=($*si* $x \geq 2,$ $f(x)=x^2-2x+3$ *et si* $x<2,$ $f(x)=2x+4)$ et $g(x)=x+3$. En faisant appel à l'inverse de la composition des fonctions l'élève doit obtenir $(fog^{-1})(2)$, ensuite trouver l'inverse de g et calculer l'image de 2 «fonction par fonction ». Dans le quatrième exercice on demande de trouver la valeur *m* en utilisant $f^{-1}(x)=1-mf(x)$ et $(fof)^{-1}(x)=3x+1$. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de l'inverse de la composée. En utilisant la fonction identique il doit mettre à la place de x *f(x)* dans l'équation donnée et obtenir *fof*. Enfin il doit comparer ces deux composées *fof* pour trouver la valeur *a*. L'égalité des polynômes que l'élève doit faire fonctionner s'avère un outil devant être disponible dans ce travail. Dans le cinquième exercice on demande de trouver la valeur n si $(fog)(x)=3x+15-2n$ et $g(4)=f^{-1}(3)$, pour les fonctions *f* et *g* définies sur |R. L'élève doit calculer l'image de 4 par *fog* et obtenir $f(g(4))=27-2n$. Ensuite il doit remplacer *g(4)* par $f^{-1}(3)$ et obtenir une équation en faisant appel à la fonction identique.

ii) Décomposition des fonctions (8 exercices) : dans un exercice on demande de « décomposer » $(fog)(x)=3x-4$ en utilisant la fonction *f* définie sur |R par $f(x)=2x+1$ et trouver la fonction g définie sur |R. Sans utiliser la décomposition l'élève est amené à mettre à la place de x $g(x)$ dans la fonction f et obtenir une équation. Ensuite il doit calculer $g(x)$ en fonction de x pour trouver g. Dans le deuxième exercice on propose aussi de déterminer la fonction g définie sur |R en utilisant la fonction f définie sur |R par $f(x)=x+1$ et $(fog^{-1})(x)=3x+8$, dans le troisième exercice de « décomposer » $(fog)(x)=2x^2-x-1$ en utilisant la fonction f définie sur |R par $f(x)=2x-3$ pour trouver g, dans le quatrième exercice de « décomposer » $(gof)(x)=4x+3$ en utilisant la fonction f définie sur |R par $f(x)=2x+7$ pour trouver g, dans le cinquième exercice de « décomposer » $(fog)(x)=27^{2x-4}$ en utilisant $f(x)=3^{2x+1}$ pour trouver g^{-1}. Pour ces quatre derniers exercices il s'agit de la même procédure comme dans le premier exercice. Obtenir une équation sans utiliser la décomposition est toujours utilisé. La résolution d'équations dans les quatre premiers exercices paraît comme un outil devant être disponible dans ce travail mais celle d'équations exponentielles très particulières dans le dernier exercice est une tâche des chapitres suivants. Dans un autre exercice on demande de calculer $f^{-1}(3)$ si la fonction g est définie par $g(x)=x^2-x$ et $(fog)(x)=2x^2-2x+5$. L'élève est amené à écrire $f(x^2-x)=2x^2-2x+5$ et à obtenir $f(t)=2t+5$ en utilisant la méthode du changement de variable (soit $t=x^2-x$). Ensuit il doit trouver l'inverse de f et l'image demandée. En ce qui concerne le septième exercice, il consiste à « décomposer » $(fog)(x)=4x-3$ en utilisant g définie sur |R par $g(x)=3x+2$ pour trouver f définie sur |R. Deux solutions sont proposées. La première solution demande de mettre en fonctionnement la décomposition. Ainsi l'élève doit d'abord trouver l'inverse de f et ensuite en faisant appel à la fonction identique il doit déterminer le fonction g. Quant à la deuxième solution en effet elle n'est pas très différente de la première. En écrivant $f(3x+2)=4x-3$ l'élève est amené à obtenir une composée (implicite) et trouver l'inverse de la fonction $3x+2$ et le mettre à la place de x dans la composée (implicite). Dans le huitième exercice il s'agit de trouver g si la fonction f est définie sur |R par $f(x)=x^2+5$ et $(g^{-1}of)^{-1}(x)=x+1$. En appliquant deux fois la définition de l'inverse des fonctions l'élève doit obtenir $g(x)=f(x+1)$. Ensuite il lui reste à calculer $f(x+1)$ pour trouver g. Une identité remarquable paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail.

iii) Décomposition implicite des fonctions (7 exercices) : dans un exercice il s'agit de déterminer la fonction f définie sur |R si $f(x-2)=4x+3$, dans le deuxième exercice de déterminer la fonction *f* définie sur |R si $f(3x-1)=2x+3$. Dans le premier exercice en posant $x-2=u$ l'élève est amené à obtenir $x=u+2$ et à le mettre à la place de x dans la composée (implicite). Cela lui permet d'obtenir la fonction demandée sans mettre en fonctionnement la décomposition. Dans la résolution on indique également qu'on peut aussi trouver *f* en mettant à la place de x l'inverse de $x-2$. Quant à la solution du deuxième exercice, l'élève doit faire fonctionner la décomposition en posant $h(x)=3x-1$. Ainsi il doit trouver l'inverse de *h* et la mettre à la place de x dans la composée. Il est très intéressant qu'il n'y ait aucune indication qui fait un lien entre les solutions proposées de l'exercice précédent et celle de cet exercice. Dans le troisième exercice on demande de trouver la valeur *k* si $f(2x-3)=4x+k$ et $f^{-1}(5)=8$, pour la fonction *f* bijective définie sur |R. En faisant appel à la définition de l'inverse des fonctions, l'élève doit d'abord obtenir $f(8)=5$, ensuite trouver pour quelle valeur de *x* on a $2x-3=8$ et remplacer x par cette valeur dans la composée (implicite). Le quatrième exercice consiste à calculer $f^{-1}(2)$ si la fonction f est définie sur |R et $f(2x+5)=3x-4$. En faisant appel à la définition de l'inverse des fonctions l'élève doit obtenir $f^{-1}(3x-4)=2x+5$ et ensuite trouver pour quelle valeur de *x* on a $3x-4=2$. Il s'agit de la même procédure comme dans l'exercice précédent. Dans un autre exercice on propose de calculer $(g^{-1}of)(2)$ si la fonction *g* est définie sur |R par $g(x)=\frac{2x-3}{5x-4}$ et $f(x-2)=5x+3$. L'élève doit d'abord calculer $f(2)$ comme dans les exercices précédents. Ensuite il doit trouver l'inverse de *g* en faisant fonctionner la recette $\mathbf{R_a}$ et calculer l'image de $f(2)$. Le sixième exercice consiste à déterminer g si $f^{-1}(3x-1)=10x+1$ et $(f^{-1}og^{-1})(x)=5x$. Il y a plusieurs étapes. L'élève doit d'abord trouver f^{-1} et mettre à la place de x $g^{-1}(x)$ dans la fonction f^{-1} et ensuite obtenir une équation. Enfin il doit calculer $g^{-1}(x)$ en fonction de x et trouver son inverse. Dans le dernier exemple on demande de calculer $(g^{-1}of)(4)$ en utilisant $f(5x-1)=x+3$ et $g(3x-2)=x-2$. L'élève est amené à calculer l'image demandée «fonction par fonction ». En déterminant pour quelle valeur de *x* on a $5x-1=4$ il doit calculer $f(4)$. Ensuite de la définition de l'inverse des fonctions il doit obtenir $g^{-1}(x-2)=3x-2$. Pour calculer $g^{-1}(f(4))$ il s'agit aussi de la même procédure.

3.8.3 Thème V :Image d'un nombre réel ou une expression algébrique (3 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Calculer l'image d'une expression algébrique en fonction de f(x) (1 exercice) : l'élève est amené à calculer $f(x+2)$ en fonction de $f(x)$ si la fonction f est définie, pour les valeurs où elle est définie, par $f(x)=\frac{1}{x-2}$. L'élève doit d'abord calculer *f(x+2)*, ensuite *x* en fonction de *f(x)* et le mettre à la place de x dans l'image de *x+2* par *f*.

ii) Calculer l'image d'un nombre réel par une fonction (2 exercices) : dans un exercice on demande de calculer g(1) si la fonction f est définie par $f(x)=2^x+3^x$ et $g(x)=\frac{f(x+2)}{f(x)}$. En calculant l'image de *x+2* l'élève doit déterminer la fonction g et ensuite trouver l'image demandée. Les connaissances antérieures liées aux puissances sont des outils supposés disponibles dans ce travail. Le deuxième exercice fait trouver la différence *f(101)-f(2)* si la fonction f définie par $f(x)=(a+2)x+a+1$ est constante. L'élève doit d'abord déterminer la fonction f. Pour ce faire il doit égaliser le coefficient de x à zéro en raison de l'inexistence de variable dans l'expression de l'image des fonctions constantes. Ensuite en sachant que l'image de chaque nombre est identique il doit trouver nulle la différence demandée.

3.8.4 Thème VI :Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (1 exercice)

Nous pouvons trouver un seul exercice résolu qui concerne la représentation graphique des fonctions. Dans cet exercice on demande de trouver la valeur de $\frac{f(-3)-f^{-1}(9)}{f(0)-f^{-1}(0)}$ à partir de la représentation graphique de la fonction *f*. L'élève doit prendre en compte que la représentation graphique d'une fonction bijective dans un repère orthonormé est également celle de son inverse.

3.9 Synthèse

Nous remarquons tout d'abord que contrairement au programme (et aux autres manuels de lycée) le manuel officiel ne met pas en place l'utilisation de la bijectivité comme outil pour la démonstration de l'équipotence. Les auteurs du manuel se contentent de présenter la définition des ensembles infinis et des ensembles équipotents.

A part cela toutes les notions indiquées par le programme sont abordées. La notion de fonction est introduite à partir de la définition ensembliste. La comptine $\mathbf{C_o}$ n'est pas explicitement présentée. Dans des exemples elle est cependant utilisée. En ce qui concerne la méthode utilisée pour trouver la fonction inverse, nous pouvons rencontrer les deux méthodes : méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ et recette $\mathbf{R_a}$. Pour tous les exercices qui figurent dans le cours la première est utilisée. La deuxième est implicitement introduite dans des exemples comme une deuxième méthode. A partir de là, la méthode $\mathbf{M}_{\mathbf{xfy}}$ est totalement disparue.

Malgré leur inexistence dans le programme le manuel officiel propose aussi, dans des exercices résolus, certaines formules pour le calcul du nombre des correspondances, fonctions, non-fonctions, injectives, non-injectives définies de A vers B (A et B sont les sous-ensembles finis et discrets) comme dans le manuel Aydin.

Par ailleurs dans le manuel officiel nous pouvons aussi constater l'influence du concours. Et elle ne se limite pas à la recette $\mathbf{R}_{\mathbf{a}}$. Par exemple la décomposée (implicite) *(f(ax+b)=dx+c)* est un des thèmes plus fréquents du concours. Le manuel propose beaucoup d'exercices attachés à ce thème et trois solutions :

Exercice 2 : Trouver f si f(x-2)=4x+3, pour la fonction f définie sur IR.

Solution : Soit x-2=u donc x=u+2. On écrit à la place de x u+2 :

$f(u+2-2)=4(u+2)+3 \Rightarrow f(u)=4u+11$. *Si l'on écrit à u x,* $f(x)=4x+11$ *.....(1)*

On peut trouver f en écrivant à la place de x, (x+2) qui est l'inverse de (x-2)....(2)

Exercice 3 : Trouver f si f(3x-1)=2x+3, pour la fonction f définie sur IR.

Solution : Soit 3x-1=h(x). On trouve f en mettant à la place de x, h^{-1} *dans l'expression.*

$h^{-1}(x)=\frac{x+1}{3}$ *et* $f(3x-1)=2x+3 \Rightarrow f(3.\frac{x+1}{3}-1)=2(\frac{x+1}{3})+3$ *(on écrit* $\frac{x+1}{3}$ *à la place de x)*

$\Rightarrow f(x)=\frac{2x+11}{3}$ *.......(3)*

Nous constatons tout d'abord qu'il n'y a aucune indication qui fait un lien entre ces solutions proposées. Le manuel traite ces deux exercices comme s'il s'agissait d'exercices différents. Dans la solution n°1 l'élève doit utiliser la méthode du changement de variable. Mais elle est cependant assez prématurée chez les élèves de seconde. Et elle reste uniquement réservé à cet exercice. La solution n° 2 est toujours proposée par le manuel comme tous les manuels de préparation au concours. Elle demande à l'élève de trouver d'abord l'inverse de *ax+b* et ensuite le mettre à la place de x dans *f(ax+b)=dx+c*. Il nous semble que ce type de solution ne permet pas à l'élève de reconnaître qu'il s'agit d'une décomposée, *ax+b* est une fonction et on utilise aussi ici la définition de la fonction identique. Même si la proposition de la troisième solution enlève nos inquiétudes, elle n'est plus jamais reprise.

Nous rencontrons la même situation dans la décomposition des fonctions. Sans mettre en fonctionnement la décomposition, l'élève est à chaque fois conduit à obtenir une équation et à calculer la fonction demandée en fonction de x. Ainsi la décomposition se ramène à une résolution d'équations. Nous avons encadré certains exemples et leurs solutions comme suit :

Exemple 7 : Trouver g si la fonction f est définie sur |R *par f(x)=2x+1 et (fog)(x)=3x-4.*

Solution : $(fog)(x)=3x-4 \Rightarrow f[g(x)]=3x-4 \Rightarrow 2g(x)+1=3x-4 \Rightarrow 2g(x)=3x-5 \Rightarrow g(x)=\frac{3x-5}{2}$

Exemple 11 :Trouver g si la fonction f est définie sur |R *par f(x)=x+1 et* $(fog^{-1})(x)=3x+8$.

Solution : $(fog^{-1})(x)=3x+8 \Rightarrow f(g^{-1}(x))=3x+8$ *et* $f(g^{-1}(x))=g^{-1}(x)+1$ *donc*

$3x+8=g^{-1}(x)+1 \Rightarrow g^{-1}(x)=3x+7 \Rightarrow g(x)=\frac{x-7}{3}$.

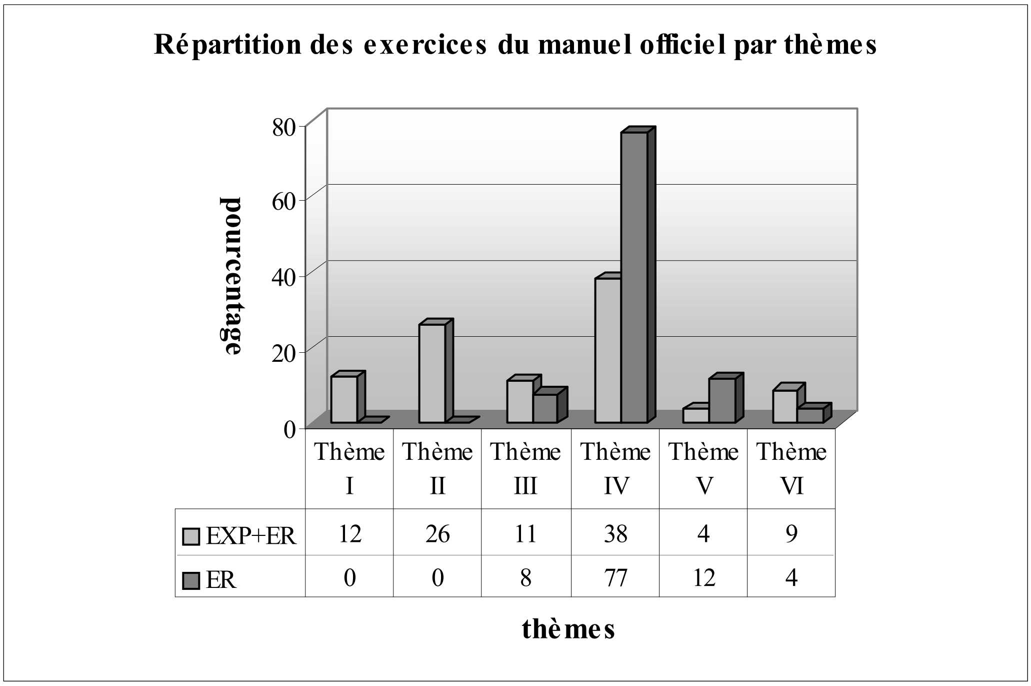
Par ailleurs le manuel essaie systématiquement d'habituer les élèves à la décomposée (implicite). Même s'il s'agit d'une décomposée normal, l'élève est à chaque fois amené à la rendre en décomposée (implicite) et utiliser la résolution décrite plus haut. Nous proposons un exercice typique :

Exemple 15 : Trouver g si la fonction f est définie sur |R *par f(x)=2x+7 et (gof)(x)=4x+3.*

Solution : $g(f(x))=4x+3 \Rightarrow g(2x+7)=4x+3$

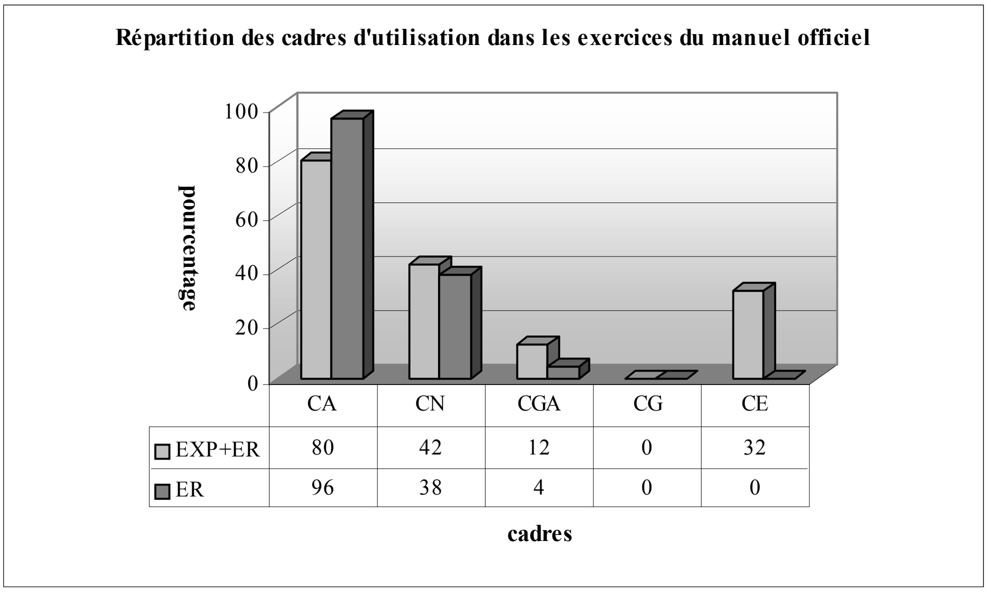
$$\Rightarrow g(x)=4(\frac{x-7}{2})+3 \Rightarrow g(x)=2x-11$$

Nous pouvons trouver certains exercices résolus qui concernent les notions relevant du programme des classes suivantes. Par exemple dans un exercice on peut demander à l'élève de composer une fonction affine et une fonction polynôme définie par morceaux qui est en principe dans le programme de terminale.



Thème I :Définition ensembliste de la notion de fonction…Thème II :Propriétés particulières des fonctions…Thème III :Recherche de l'inverse d'une fonction, Thème IV :Composition des fonctions, Thème V :Image d'un nombre réel…Thème VI :Représentation graphique des fonctions EXP :Exemples (effectif :55 exemples), ER :Exercices résolus (effectif :26 exercices)

Selon les thèmes les exercices résolus du manuel officiel se décomposent en quatre. Comme le bien montre le tableau ci-dessus, les thèmes I et II ne sont présents que dans le cours. Le thème « écrasant » est le thème IV avec un taux de 77%. Il y a seulement 12% des exercices dans lesquels il s'agit de calculer l'image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique. Le thème VI est le thème le plus marginal des exercices du manuel.

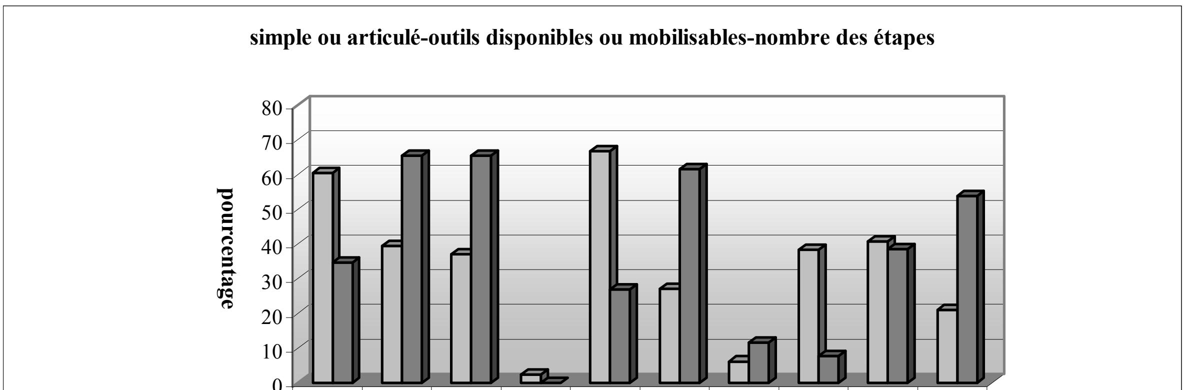


En ce qui concerne les cadres d'utilisation dans les exercices résolus, la quasi-totalité des exercices utilisent le cadre algébrique. Ce cadre est suivi du cadre numérique avec un taux de 38%. Il y a seulement 4% des exercices pour lesquels le cadre analytique est utilisé. Le cadre géométrique et le cadre de la théorie élémentaire des ensembles sont totalement absents.

Cela signifie que le manuel officiel est algébriquement riche et géométriquement très pauvre.

Par ailleurs La plupart des exercices résolus portent sur plusieurs connaissances antérieures. De plus la résolution de bon nombre des exercices présente plusieurs étapes. Le tableau ci-dessous montre que 65% des exercices résolus font utiliser plusieurs connaissances antérieures (A :articulé). Tandis que 35% des exercices ne sont destinés qu'à mobiliser des connaissances qui font référence directe à la notion de fonction (S :simple). Dans 65% des exercices l'élève doit faire appel à une seule connaissance antérieure (OD1 :un outil disponible). Il n'y a aucun exercice qui nécessite de disposer des deux connaissances antérieures (OD2 : deux outils disponibles).

Plus du quart des exercices demandent de mobiliser une connaissance qui fait référence directe à la notion de fonction (OM1 : un outil mobilisable). Tandis que dans 62% il s'agit des deux connaissances à mobiliser (OM2 :deux outils mobilisables). Le taux des exercices qui conduisent l'élève à mobiliser trois connaissances liées directement à la fonction est de 12% (OM3 : trois outils mobilisables). En ce qui concerne la répartition des exercices suivant le nombre des étapes, lors de la résolution de plus de la moitié il s'agit des trois étapes (E3 :trois étapes). 38% présentent un travail qui ait deux étapes (E2 : deux étapes). Dans seuls 8% des exercices l'élève peut arriver à la bonne réponse en une seule étape (E1 :une étape).



	S	A	OD1	OD2	OM1	OM2	OM3	E1	E2	E3
EXP+ER	60	40	37	2	67	27	6	38	41	21
ER	35	65	65	0	27	62	12	8	38	54

S :Simple, A :Articulé, OD1 :Outil disponible 1, OD2 :Outil disponible 2, OM1 :Outil mobilisable 1, OM2 :Outil mobilisable 2,OM3 :Outil mobilisable 3,E1 :Etape 1, E2 :Etape 2, E3 :Etape 3

4. Analyse du manuel de préparation au concours Güvender

4.1 Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles

Le manuel Güvender attribue un chapitre propre à la notion de fonction. Il n'y a aucune activité préparatoire. Ainsi le chapitre commence par le cours en présentant la définition ensembliste de la notion de fonction. Comme les manuels précédents (de lycée ou de dérsané) l'interprétation de la définition en diagramme sagittal, la présentation de l'ensemble de définition, de l'ensemble d'arrivée et de l'ensemble image grâce à un exemple, la comptine $\mathbf{C_o}$ et un certain nombre d'exemples sont mis en place à la suite de la définition.

Dans le premier exemple il s'agit de déterminer l'ensemble image d'une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. L'élève doit calculer les images et ensuite représenter la fonction en diagramme sagittal. Après cet exemple la comptine $\mathbf{C_o}$ est introduite comme une remarque :

> *Remarque : Pour qu'une correspondance f définie de A vers B puisse être une fonction,*
> *1) Il faut que dans l'ensemble de définition (dans A) il n'y ait aucun élément sans image (vacant). Mais dans l'ensemble d'arrivée (dans B) il peut y avoir des éléments vacants.*
> *2) Il faut que chaque élément de l'ensemble de définition n'ait pas plus d'une image.*

Le deuxième exemple comprend quatre parties dont chacune consiste à appliquer directement cette remarque. Ainsi dans chaque partie l'élève doit chercher si une correspondance *f* définie par une liste de couples d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre est une fonction. En ce qui concerne l'exemple suivant qui comprend six parties il s'agit aussi de l'application directe de la définition (cf. la comptine $\mathbf{C_o}$) au moyen de correspondances définies algébriquement pour les cinq premières parties et dans une correspondance définie graphiquement pour la dernière partie. La première partie demande de montrer que la correspondance f_1 définie sur |R par $f_1=\{(x, y) : y=\frac{2x+1}{x^2-4}\}$ est une fonction ; la deuxième partie fait étudier la correspondance f_2 définie sur |R par $f_2=\{(x, y) : |y|=x^2+3\}$, la troisième partie, la correspondance f_3 définie sur |R par $f_3=\{(x, y) : y=x-5\}$, la quatrième partie, la correspondance f_4 définie sur Z par $f_4=\{(x, y) : y=\frac{2x+1}{3}\}$ et la cinquième partie, la correspondance f_5 définie sur Z par $f_5=\{(x, y) : y=x^2+1\}$. Dans la dernière partie l'élève doit chercher si une correspondance *f* définie sur un sous-ensemble fini et discret et représentée graphiquement dans un repère orthonormé est une fonction. Dans la première partie l'élève est ainsi amené à s'apercevoir que la correspondance f_1 n'est pas définie pour les nombres réels –2 et 2 : dans l'ensemble de définition il y a des éléments sans images (vacants). La résolution d'équations du second degré paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Comme chaque élément de l'ensemble de définition a deux images (par exemple *pour* $x=1,\ y=\pm 4$), la correspondance f_2 n'est pas non plus une fonction. La notion de valeur absolue à laquelle l'élève doit faire appel est un outil supposé disponible dans ce travail. En ce qui concerne la correspondance f_3, les nombres naturels entre 0 et 4 n'ont pas d'image. Ce n'est donc pas une fonction. Puisqu'il y a des nombres entiers sans images dans l'ensemble de définition, la correspondance f_4 ne désigne pas non plus une fonction. Comme l'image de tous les éléments de l'ensemble de définition est un nombre entier, la correspondance f_5 est une fonction. Dans toutes ces parties les connaissances antérieures liées aux ensembles de nombres doivent être disponibles.

Le dernier exemple demande de trouver la somme de quelques images par une fonction définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par une liste de couples.

Avant de passer aux propriétés des fonctions le manuel donne simplement la formule du calcul du nombres des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre sous le titre « nombre des fonctions » et l'illustre avec un exemple.

4.2 Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières

Dans la collection de Güvender nous trouvons la définition des fonctions injectives, des fonctions surjectives, des fonctions non surjectives et la définition de la fonction identique, des fonctions constantes et des fonctions égales. Contrairement aux manuels précédents ce manuel donne aussi la définition des fonctions paires et impaires. Toutes ces définitions sont illustrées par un exemple. De plus la définition de la fonction identique et celle des fonctions constantes sont suivies de représentation graphique de ces fonctions dans un repère orthonormé et la définition des fonctions injectives de son écriture symbolique.

Quant à l'exemple qui illustre la bijectivé des fonctions, il comprend quatre parties. Les trois premières parties sont destinées à chercher si des fonctions définies d'un sous-ensemble fini de Z dans un autre par un diagramme sagittal sont injectives. Il s'agit de l'application directe de la définition de la bijectivité. Dans la quatrième partie l'élève est amené à chercher si une fonction affine définie sur |R est injective. La mobilisation de l'interprétation formelle de la bijectivité est mise en jeu.

Un exemple comprenant plusieurs parties accompagne aussi la surjectivité des fonctions. Les deux premières parties proposent de chercher si une fonction définie d'un sous-ensemble fini de Z dans un autre par un diagramme sagittal est surjective. Dans les trois dernières parties l'élève doit aussi chercher si une fonction affine définie sur |N, une fonction du second degré définie sur Z et une fonction affine définie sur Z sont surjectives. L'élève est amené à représenter les fonctions en diagramme sagittal et à chercher s'il y a des éléments « vacants » dans l'ensemble d'arrivée. Par ailleurs, on donne la définition des fonctions bijectives au cours d'une remarque à la suite de cet exemple. En ce qui concerne l'exemple de la non surjectivité, il comprend quatre parties. Dans les trois premières parties, il s'agit de chercher si les fonctions définies d'un sous-ensemble fini de Z dans un autre par des diagrammes sagittaux sont ou non surjectives. La quatrième partie consiste à montrer qu'une fonction affine définie de Z vers |R est non surjective. La mobilisation de la définition est indispensable. Dans la dernière partie l'élève doit prendre en compte que les éléments qui ne sont pas des nombres entiers sont vacants dans l'ensemble d'arrivée (|R). Alors la fonction est non surjective.

L'exemple qui concerne les fonctions constantes demande de montrer qu'une fonction définie d'un sous-ensemble fini de Z dans un autre par un diagramme sagittal est constante. En ce qui concerne l'exemple qui illustre la définition de fonction identique, l'élève est amené à chercher si la fonction f définie sur un sous-ensemble fini de Z par $f(x)=x$ est une fonction identique. La représentation en diagramme sagittal est mobilisée.

Pour illustrer la définition des fonctions égales, le manuel propose un exemple pour lequel on demande de chercher si une fonction du second degré et une fonction du troisième degré définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z sont égales.

A la suite de la définition des fonctions paires et impaires il y a un exemple pour lequel on demande de chercher si les fonctions f , g et h définies par $f(x)=x^2+|x|$, $g(x)=2x^3+5x$ et $h(x)=2x^2-3x$ sont impaires ou paires. Par ailleurs il faut signaler que ce type des fonctions figure dans le programme de la classe de terminale.

4.3 Quatre opérations sur les fonctions ($\mp,\times,\div$)

Les quatre opérations sur les fonctions sont simplement citées sans explication ni démonstration. De plus la multiplication d'une fonction par un nombre réel est aussi introduite.

Il y a deux exemples proposés. Le premier exemple comprend quatre parties dont chacune propose d'effectuer une opération sur une fonction du second degré et une fonction affine définies sur |R. En ce qui concerne le deuxième exemple, on demande de déterminer

l'ensemble image de la fonction *(f+3g)* en utilisant une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans |R et une fonction affine définie d'un autre sous-ensemble fini de Z dans |R. L'élève doit comprendre qu'il doit effectuer cette opération pour les éléments communs des ensembles de définition des fonctions.
Par ailleurs nous constatons qu'il y a un certain nombre d'exemples qui ne font pas référence directe aux opérations sur les fonctions. C'est la raison pour laquelle nous les analyserons dans la partie des exercices résolus.

4.4 Définition de l'inverse d'une fonction

La définition de l'inverse d'une fonction à partir des éléments est suivie de sa représentation en diagramme sagittal et de son écriture symbolique. De plus on énonce simplement de manière symbolique que l'inverse de l'inverse d'une fonction est égal à la fonction elle-même.
Par ailleurs le manuel met en évidence la relation entre la bijectivité et l'existence de l'inverse d'une fonction dans la remarque suivante :

Remarque :Si la fonction f définie de A vers B n'est pas bijective, f^{-1} n'est pas une fonction de B vers A mais une correspondance.

Cette remarque est illustrée par un exemple dans lequel on demande de chercher si une fonction définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre a une inverse. L'élève doit étudier la bijectivité de la fonction. La représentation en diagramme sagittal de la fonction est utilisée.
La méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ est introduite sous le titre « trouver la fonction inverse » comme suit :

Comme $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, pour trouver $f^{-1}(x)$ on calcule x en fonction de y et on change les places de x et y.

A la suite il y a deux exemples qui appliquent directement cette méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. L'un demande de trouver l'inverse de la fonction *f* définie sur |R par $f(x)=\frac{3x+2}{4}$. Et l'autre, l'inverse de la fonction f définie sur |R par $f(x)=\sqrt[3]{x+2}-1$.
La règle suivante est donnée avec la recette $\mathbf{R_a}$:

Règle : 1) $f(x)=ax+b \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$

2) Si $f: IR-\left\{-\frac{d}{c}\right\} \to IR-\left\{\frac{a}{c}\right\}$, $f(x)=\frac{ax+b}{xc+d} \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ ……………(***R**$_a$*)

Après cette règle il y a cinq exemples. Le premier exemple consiste à calculer $f^{-1}(-1)$ si la fonction f est définie par $f(x)=2x+3$. L'élève doit trouver l'inverse de f à partir de **R$_a$** et ensuite déterminer l'image demandée. Dans le deuxième exercice il s'agit de trouver l'inverse d'une fonction rationnelle en utilisant **R$_a$**. En ce qui concerne l'exemple suivant, il consiste à trouver la valeur a si $f(x-1)=x^2+3x+a$ et $f^{-1}(2)=3$. L'élève doit d'abord obtenir *f(3)=2* en faisant fonctionner la définition de l'inverse d'une fonction. Ensuite il doit trouver pour quelle valeur de x on a $x-1=3$. Cela lui permet d'obtenir une équation et de trouver la valeur a à partir de la composée implicite. Comme le quatrième exercice montre que le raisonnement et le respect de l'ordre de présentation des notions ne sont pas très importants pour ce type de manuels, nous proposons cet exemple et sa résolution :

Exemple : Trouver f^{-1}, *si* $f\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)=x+1$.

Solution : Comme $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, $f\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)=x+1 \Rightarrow f^{-1}(x+1)=\frac{x+1}{x^2+1}$.

Si on écrit x-1 à la place de x,

$$\Rightarrow f^{-1}(x-1+1)=\frac{x-1+1}{(x^2-1)+1} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{x^2-2x+2}$$

Nous ne trouvons aucun raisonnement qui explique pourquoi on écrit *x-1* à la place de *x*. La première étape de la résolution fait référence directe à la définition de l'inverse d'une fonction. Mais la deuxième étape prescrit une tâche s'appuyant sur la décomposition[1] des fonctions qui n'est pas encore présentée.

Le dernier exemple consiste à calculer $f^{-1}(16)$ si la fonction f est définie par $f(x)=2^{x+1}$. L'utilisation de la définition de l'inverse est aussi mise en jeu. En posant $f^{-1}(16)=a$ l'élève doit obtenir *f(a)=16* et une équation exponentielle très particulières[2]. La résolution de cette dernière paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail.

[1] On appelle décomposition le fait de trouver f [ou g] connaissant fog et g [ou f].

[2] *f(a)=16* $\Rightarrow 2^{a+1}=16 \Rightarrow 2^{a+1}=2^4 \Rightarrow a+1=4 \Rightarrow a=3$.

Cette partie se termine par une remarque dans laquelle on met en évidence la relation entre la représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormé et celle de son inverse.

4.5 Composition des fonctions

La définition de la composition des fonctions est suivie de son interprétation en diagramme sagittal et deux exemples. Dans le premier exemple il s'agit de trouver les deux types de composée (*fog et gof*) des deux fonctions affines définies sur |R. Le deuxième exemple demande de calculer *(fog)(4)* si les fonctions *g* et *f* sont définies sur |R par $g(x)=x^2-2x-9$ et $f(x)=x^{1997}+x^{1998}+5$. Le calcul de l'image demandée fonction par fonction est indispensable. L'élève doit d'abord calculer l'image de 4 par g et ensuite le mettre à la place de x dans la fonction *f*.

Par ailleurs certaines propriétés de la composition des fonctions sont introduites. Nous trouvons ainsi la non-commutativité (une remarque explique que dans certains cas la composition est commutative), l'associativité, la composée d'une fonction et de la fonction identique, la composée d'une fonction et son inverse, l'inverse de la composition de deux fonctions ou trois fonctions et la décomposition des fonctions.

Avant de terminer cette partie, le manuel propose six exemples. Dans le premier exemple on demande de calculer *(fogoh)(2)* en utilisant une fonction du second degré et deux fonctions affines définies sur |R. Sans trouver la formule générale de composée *fogoh* l'élève doit calculer l'image de 2 « fonction par fonction ». Dans le deuxième exemple l'élève est amené à déterminer *g* si la fonction *f* est définie par *f(x)=3x+2* et la composée *fog*, par *(fog)(x)=6x+11*. Sans faire appel à la décomposition l'élève doit mettre à la place de x *g(x)* dans la fonction *f* et obtenir une équation. Ensuite il doit calculer *g(x)* en fonction de *x*. Dans le troisième exemple on demande de calculer *(gof)(3)* en utilisant les composées implicites *f(x+2)=5x+3* et *g(x-3)=3x+1*. La décomposition des fonctions n'est pas préconisée. L'élève doit d'abord trouver pour quelle valeur de *x* on a *x+2=3* et obtenir *f(3)*. Ensuite il doit suivre la même procédure pour *g[f(3)]*. L'exemple suivant invite l'élève à calculer $(f^{-1}ogof)(-2)$ en utilisant les fonctions f et g définies sur |R par $f(x)=5^{x+2}$ et $g(x)=x^2+4$. Le calcul de l'image fonction par fonction est toujours mobilisé. Dans la dernière étape l'élève doit faire appel à la définition de l'inverse d'une fonction et obtenir une équation exponentielle très particulière. Le cinquième exemple consiste à calculer *(gof)(2)* en utilisant deux fonctions polynomes définies par morceaux. Dans cet exemple il s'agit aussi de calculer l'image demandée

« fonction par fonction » sans faire fonctionner la formule générale de composition des fonctions. En ce qui concerne le dernier exemple, on demande de « décomposer » la fonction *fog(x)=4x-1* en utilisant la fonction *g(x)=2x+3*. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de *g* à partir de $\mathbf{R_a}$ et ensuite effectuer la décomposition en faisant appel à la définition de la fonction identique.

4.6 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé

A la suite de la définition il y a cinq exemples. Dans le premier exemple il s'agit de représenter graphiquement la fonction carrée définie d'un sous-ensemble fini de Z dans |R. Le deuxième exemple demande de représenter graphiquement une fonction affine définie sur |R. Le tableau de valeurs apparaît pour la première fois depuis le début du chapitre sans commentaire. A la fin de ces deux exemples l'élève est amené à reconnaître la différence entre les représentations graphiques des fonctions. En ce qui concerne les exemples suivants, il s'agit de lire et interpréter la représentation graphique des fonctions. L'élève doit graphiquement déterminer la valeur $\frac{f(-2)+f(-1)}{f(3)+f(5)}$ dans le troisième exemple, déterminer la valeur $f(-1)+f^{-1}(2)+f(2)$ en faisant appel à la définition de l'inverse d'une fonction dans le quatrième exemple et déterminer la valeur $(fog^{-1}of)(4)$ en mettant en fonctionnement la composition des fonctions dans le dernier exemple.

4.7 Exercices résolus (48 exercices)

A part les exercices qui sont proposés à la fin de la partie des quatre opérations sur les fonctions tous les exercices résolus du manuel Güvender sont en forme de QCM.
Maintenant nous analysons les exercices résolus thème par thème.

<u>4.7.1 Thème I : Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles (1 exercice)</u>

Ce thème est le thème le plus marginal du manuel Güvender. Nous pouvons trouver un seul exercice qui peut être considéré dans cette partie. Cet exercice demande de déterminer l'intervalle d'arrivée de la fonction *f* définie par $f(x)=x^2+2x+3$ si son ensemble de définition est A=[2,3). En sachant que [2,3) est l'ensemble des valeurs de la variable telles que $2\leq x<3$ l'élève doit obtenir $4\leq x^2<9$ et $4\leq 2x<6$, ensuite par addition $8\leq x^2+2x<15$ et enfin

$11 \leq x^2+2x+3<18$. Les connaissances antérieures liées aux intervalles et inéquations sont les outils devant être disponibles dans ce travail.

<u>4.7.2 Thème II : Recherche de l'inverse d'une fonction définie algébriquement (4 exercices)</u>

Nous pouvons classer les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Utilisation de la relation entre l'inverse des fonctions et la bijectivité (1 exercice) : dans un exercice il s'agit de chercher la fonction inversible parmi les fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. En faisant appel à la relation entre la bijectivité et l'inverse des fonctions l'élève doit étudier la bijectivité des fonctions proposées.

ii) Trouver l'inverse d'une fonction définie algébriquement (3 exercices) : dans un exercice on demande de trouver l'inverse de la fonction f définie de |R-{-1} vers |R-{3} par $x=\frac{f(x)+2}{3-f(x)}$. C'est une question du concours(Q41/1997). En faisant appel à la définition de l'inverse d'une fonction l'élève est amené à remplacer *f(x)* par *y* sans calculer *f(x)* en fonction de *x*. Cela lui permet d'obtenir l'inverse demandée d'une manière assez économique. Dans le deuxième exercice[3] on demande de trouver l'inverse de la fonction définie sur |R par $f(x)=x^2-4x+3$. L'utilisation de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ est indispensable. La résolution d'équations du second degré paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Le dernier exemple propose de calculer $f^{-1}(-5)$ en utilisant une fonction *f* définie par morceaux (si *x<2, f(x)=-x+1* et si *x*≥*2, f(x)= -x-3*). En appliquant la définition de l'inverse d'une fonction l'élève doit obtenir *f(a)= -5* (soit $f^{-1}(-5)=a$) et trouver les deux valeurs *a*. Ensuite il doit vérifier leur appartenance aux ensembles de définition des fonctions.

<u>4.7.3 Thème III : Composition des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles (20 exercices)</u>

Voici les catégories des exercices selon la tâche prescrite :

i) Composition des fonctions (6 exercices) : dans un exercice l'élève est amené à calculer *(fof)(5)* si la fonction f est définie par morceaux de la façon suivante *(si x<1, f(x)=3x et si* $x \geq 1$, $f(x)=\frac{3-x}{2}$*)*. Sans trouver la formule générale de composée *fof* l'élève doit calculer l'image demandée «fonction par fonction ». Le deuxième exercice consiste à trouver la

[3] Par ailleurs dans l'énoncé de l'exercice nous ne pouvons pas trouver l'indication utilisée x>2 dans la résolution. C'est peut-être dû à une erreur d'impression.

valeur a si les fonction f et g sont définies par $g(x)=3x-1$, $f(x)=\frac{2x+1}{x+5}$ et $(g^{-1} of)(a)=2$. Il s'agit de plusieurs étapes. L'élève doit d'abord calculer $g(2)$ et $f(a)$, ensuite obtenir une équation $g(2)=f(a)$ en appliquant la définition de l'inverse d'une fonction. La résolution d'équations que l'élève doit utiliser est un outil supposé disponible dans ce travail. Dans un autre exercice il s'agit de trouver la valeur u si $f(x)=\frac{2x+u}{x+1}$ et $(fof)(x)=\frac{x-9}{3x-2}$. C'est une question du concours (Q29/1990). L'élève est amené à donner à x la valeur zéro dans les deux fonctions et obtenir $f[f(0)]=\frac{9}{2}$ et $f(0)=u$ donc $f(u)=\frac{9}{2}$. Ensuite il lui reste à obtenir une équation et à trouver la valeur u. En ce qui concerne le quatrième exemple, l'élève doit repérer $f(5)$ par f parmi les propositions données si la composée fof est définie par $(fof)\ (x)=4x-3$. En posant $f(x)=ax+b$ l'élève doit composer la fonction f avec elle-même, puis déterminer les deux fonctions f possibles en utilisant l'égalité des polynômes et calculer les images possibles. Dans le cinquième exemple demande de trouver $(fofof)(3)$ à partir d'une fonction définie sur un sous-ensemble fini et discret par une liste de couples. L'élève doit trouver l'image « fonction par fonction ». Dans le dernier exemple on demande de trouver la valeur $\frac{(f.g-h)(-1)}{(fogoh)(1)}$ si les fonctions f, g et h sont définies par $f(x)=x+3$, $g(x)=x^2-1$ et $h(x)=x^3+2$. Après avoir calculé les images de -1 par les fonctions en cause l'élève est amené à effectuer les opérations. En ce qui concerne l'image de 1 par $fogoh$, l'élève doit la calculer «fonction par fonction ».

ii) Décomposition des fonctions (1 exercice) : il y a un seul exercice pour lequel on demande de décomposer la fonction $(fog)(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ en utilisant la fonction $f(x)=3x$ et trouver la fonction g. Deux solutions sont proposées. La première solution consiste à décomposer fog en utilisant la définition de la fonction identique et de l'inverse de la fonction f. Quant à la deuxième solution, l'élève doit mettre g(x) à la place de x dans la fonction f et obtenir une équation. Il lui reste à calculer g(x) en fonction de x.

iii) Décomposition implicite des fonctions (13 exercices) : dans un exercice il s'agit de calculer $f(8)$ si $f(3x+2)=5x-4$, dans le deuxième exercice qui est l'une des questions du concours (Q23/1987), de calculer $f(0)$ si $f(2x+3)=3x+2$, dans le troisième exercice, de calculer $f(2)$ si $f(\frac{3x-1}{2x+1})=2x-3$, dans le quatrième exercice qui est une question du concours (Q27/1989), de calculer $f(2)$ si $f(\frac{x+2}{x-1})=\frac{x-1}{x+2}$, dans le cinquième exercice, de calculer $f(-\frac{1}{4})$

si $f(x^2-x)=x^2+x+3$. Comme il s'agit de la même procédure dans tous ces exercices, nous nous contentons d'analyser le premier. L'élève doit d'abord trouver pour quelle valeur de *x* on a *3x+2=8* et ensuite mettre cette valeur dans la composée implicite *f(3x+2)=5x-4*. Cela lui permet d'obtenir l'image cherchée. Par ailleurs dans la quatrième question, en utilisant la méthode du changement de variable l'élève est amené à s'apercevoir $f(x)=\frac{1}{x}$ sans calcul et à trouver l'image cherchée.

Par ailleurs le sixième exercice fait trouver la somme *f(-1)+f(1)* si $f(\frac{ax-b}{bx-a})=x^2+x+1$ et $a\neq b$. L'élève doit donner à la place de x les valeurs numériques 1 et –1 dans la composée implicite. Ensuite il doit simplifier et obtenir les images de 1 et –1. Le septième exercice de cette partie propose de trouver la somme *f(-1)+f(0)* si la fonction f est définie sur |R et $f(2x+1)=(si\ x\geq-\frac{1}{2}, x-1\ \ et\ si\ x<-\frac{1}{2}, 3-x)$. L'élève doit d'abord trouver pour quelles valeurs de *x* on a *2x+1=-1* et *2x+1=0* . Ensuite il doit remplacer x par ces valeurs dans la formule de la fonction qui est définie pour ces valeurs de *x*.

Dans le huitième exercice l'élève doit déterminer la fonction *f* si $f(x^2+x)=2x^2+2x+2$, dans le neuvième exercice qui est une question du concours (Q32/1992), déterminer *f* si $f(2x+1)=\frac{x^2+3}{5}$, dans le dixième exercice, déterminer *f* si $f(2x+1)=4x^2-3$, dans le onzième exercice, déterminer *f* si $f(\frac{x^2+1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}$, dans le douzième exercice, déterminer *f* si $f(\frac{x+2}{2x-3})=\frac{x}{x+1}$, dans le treizième exercice, déterminer *f* si $f(\frac{3x-1}{2x+1})=x+4$. A part dans les exercices huit et onze, l'élève doit suivre la même procédure. Par exemple dans le neuvième exercice il doit d'abord chercher l'inverse de la fonction implicite *2x+1* et ensuite remplacer x par cette valeur dans la composée implicite $f(2x+1)=\frac{x^2+3}{5}$. En ce qui concerne le huitième exercice, en posant $t=x^2+x$ l'élève doit faire en fonctionnement la méthode du changement de variable. Cela lui permet d'obtenir la fonction *f* sans calcul. Dans le onzième exercice en faisant appel à la factorisation et à une identité remarquable l'élève doit déterminer la fonction f. La méthode du changement de variable est aussi utilisée.

<u>4.7.4 Thème IV : Image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique par une fonction (20 exercices)</u>

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Calculer l'image d'un nombre réel par des fonctions définies indirectement (7 exercices) : dans un exercice il s'agit de calculer *f(3)* si $f:IR \to IR$, *f(x+1)=f(x)-x* et *f(1)=1*, dans le deuxième exercice, de calculer *f(4)* si *f(x+1)=x.f(x)* et *f(2)=5*, dans le troisième exercice, de calculer *f(2)* si $f(x)=\frac{f(x+1)}{x}$ et *f(4)=12*. Pour ces exercices l'élève doit donner à *x* des valeurs numériques correspondant à l'image cherchée et à l'image énoncée. Par exemple dans le premier exercice l'élève doit donner à *x* les valeurs 1 et 2 et trouver *f(3)*.

En ce qui concerne le quatrième exercice, il consiste à calculer *f(2)* si $f(\frac{x}{2})=xf(\frac{2}{x})+x^2+1$. L'élève doit donner à x les valeurs 4 et 1 et obtenir deux équations ; ensuite calculer l'image à partir de la méthode de substitution.

Dans le cinquième exercice on propose de trouver la différence *f(3)-f(-3)* si $f(x+2)+f(x-1)=3x+1$, dans le sixième exercice, de trouver la différence *f(2)-f(0)* si $f(x)+f(x+1)=2x+3$. Pour ces exercices l'élève doit aussi donner à *x* des valeurs numériques liées aux images et obtenir un système linéaire d'équations. Ensuite par addition il doit trouver la différence des images. Dans le septième exemple il est nécessaire de trouver *f(102)* si la fonction f est définie sur IR et *f(x+2)=f(x)+2*, *f(2)=1*. L'élève doit d'abord mettre en ordre l'expression et donner à *x* des valeurs qui varient de 2 à 100. Par addition il doit obtenir la différence des images de 102 et 2 et enfin l'image de 102.

ii) Calculer l'image d'une expression algébrique en fonction de f(x) (3 exercices) : dans un exercice il s'agit de calculer *f(3x)* en fonction de *f(x)* si $f(x)=3^{2x-1}$, dans le deuxième exercice, de calculer $f(\frac{x}{2})$ en fonction de *f(x)* si $f(x)=2^{x+2}$, dans le troisième exercice qui est une question du concours (Q36/1995), de calculer *f(x-1)* en fonction de *f(x)* si $f(x)=\frac{x}{x+1}$. La procédure à suivre est identique. Par exemple dans le premier exercice l'élève doit d'abord calculer *f(3x)*. Ensuite il doit calculer 3^{2x} en fonction de *f(x)* et le mettre à la place de 3^{2x} dans *f(3x)*. Dans les deux premiers exercices la résolution d'équations exponentielles très particulières et dans l'autre exercice la résolution d'équations paraît comme un outil devant être disponible dans ce travail.

iii) Calculer l'image d'un nombre réel par une fonction définie algébriquement (10 exercices) : dans un exercice il s'agit de déterminer *f(16)* parmi plusieurs possibilités si *f(a.b)=f(a)+f(b)*, dans le deuxième exercice, de déterminer *f(1)* parmi plusieurs possibilités si f :$|R \rightarrow |R^+$ et *f(m.n)=f(m).f(n)*, dans le troisième exercice, de calculer *f(6)* si *f(x+y)=f(x).f(y)* et *f(2)=5*. Pour le premier exercice en sachant *16=2.2.2.2* l'élève doit obtenir *f(2.2.2.2)=f(2)+f(2)+f(2)+f(2)* et ensuite *f(16)=4f(2)*. En ce qui concerne le deuxième exercice, en posant *n=1* l'élève doit obtenir *f(m)=f(m).f(1)* et ensuite trouver *f(1)*. Dans le troisième exercice l'élève doit d'abord obtenir *f(6)=f(2+4)=f(2)+f(4)*, ensuite il fait la même chose pour *f(4)* et obtenir *f(6)=3f(2)*. Enfin il lui reste à remplacer *f(2)* par 5.

Le quatrième exercice demande de déterminer la fonction *f* si *f* est affine et $f^{-1}(5)=4$, $f^{-1}(7)=3$, le cinquième exercice, de calculer *f(1)* si *f* est affine et *f(5)=3*, *f(3)=5* et le sixième exercice, de trouver le produit *m.n* si la fonction *f* est définie par *f(x)=mx+n* et $f^{-1}(4)=5$, $f^{-1}(3)=6$. Ces trois derniers exemples présentent un travail fondé sur la formule générale des fonctions affines. Et la résolution du système linéaire d'équations dont l'élève doit se servir est un outil de travail. Dans les exercices quatre et six en faisant appel à la définition de l'inverse d'une fonction, l'élève est amené à remplacer la fonction inverse par la fonction.

Par ailleurs le septième exercice demande de calculer $f(\sqrt{3}+1)$ si la fonction f est définie par $f(x)=x^2-2x+1$. Remplacer x par $\sqrt{3}+1$ n'est pas préconisé. L'élève est amené à reconnaître l'identité remarquable pour obtenir $f(x)=(x-1)^2$. Cela lui permet de résoudre l'exercice d'une manière assez économique. Dans le huitième exercice l'élève doit calculer $f(x-1)$ si la fonction *f* est définie par $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$. La mobilisation de l'identité remarquable $(a+b)^3$ est préconisée. Dans le neuvième exercice on demande de calculer *f(x-1)* si la fonction *f* est définie par $f(x)=x^2+4x+5$. L'élève est aussi amené à obtenir une identité remarquable en décomposant 5 en 4+1.

En ce qui concerne le dernier exercice de cette partie, il consiste à calculer $\frac{f(2)}{f(1)}$ si la fonction *f* est définie par $f(x)=a^x-b^x$ et $a\neq b$. En calculant les images mises en jeu l'élève doit obtenir

$\frac{a^2-b^2}{a-b}$. A partir de là le travail devient une factorisation. Une identité remarquable que l'élève doit utiliser est un outil supposé disponible dans ce travail.

4.7.5 Thème V : Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (3 exercices)

Dans ce thème nous trouvons trois exercices. Ils ne sont pas différents. Un exercice fait trouver la somme $f(0)+g^{-1}(4)$ à partir des représentations graphiques des fonctions f et g définies sur IR. Le deuxième exercice propose de déterminer pour quelles valeurs de *x* on a *f(x+4)=0* et de trouver leur somme en utilisant la représentation graphique de *f* dans un repère orthonormé. L'élève doit d'abord trouver les valeurs pour lesquelles f est nulle et les égaliser à *x+4*, ensuite pour trouver les valeurs de *x* et leur somme.

En ce qui concerne le dernier exercice, l'élève est amené à trouver $\frac{(gof^{-1})(2)}{(f^{-1}og)(3)}$ en utilisant les représentation graphiques des fonctions *f*, *g* et *g(x)=2x-2*. La mobilisation de la composition et de la définition de l'inverse d'une fonction est indispensable. De plus pour déterminer les images, l'élève doit aussi utiliser la formule algébrique de la fonction *g*.

4.8 Synthèse

D'abord nous constatons que le manuel Güvender donne la notion de fonction dans un chapitre uniquement réservé à cette notion. Comme la plupart des manuels précédents il n'y a aucune activité préparatoire. Les auteurs du manuel commencent par la définition ensembliste de la notion de fonction. La comptine $\mathbf{C_0}$ est introduite comme une remarque et appliquée dans une dizaine d'exemples. Contrairement aux autres manuels le tableau de variation est présent. Mais il est utilisé une seule fois dans un exemple concernant la représentation graphique d'une fonction affine définie sur |R sans commentaire.

Par ailleurs le manuel aborde la plupart des notions qui figurent dans le programme de la classe de seconde. Mais les définitions des ensembles finis et infinis, les ensembles équipotents et l'utilisation de la bijectivité comme outil pour la démonstration de l'équipotence des ensembles infinis sont totalement absents. De plus nous trouvons les fonctions paires ou impaires et les quatre opérations sur les fonctions qui relèvent du programme de la classe de terminale.

En ce qui concerne les méthodes préconisées pour trouver l'inverse d'une fonction, la méthode **M_{xfy}** est d'abord introduite. Elle est utilisée une seule fois pour une fonction qui peut relever aussi de la recette **R_a** et à chaque fois pour les fonctions qui n'en relèvent pas.

Dans la collection de Güvender nous pouvons trouver la plupart des questions du concours ou très ressemblantes. Par ailleurs certains exercices qui s'inspirent d'une des questions concours peuvent apparaître à la suite de notions qui ne font pas référence directe à ces exercices. Par exemple les exercices suivants sont proposés à la suite des quatre opérations sur les fonctions au moment où l'inverse d'une fonction et la composition des fonctions ne sont pas encore introduits.

Exemple 1 : Trouver f(8) si f(3x+2)=5x-4.

Exemple 2 : Déterminer f(x) si $f(x^2+x)=2x^2+2x+2$

Cela signifie que le but principal de ce type de manuels est de présenter des questions du concours et d'entraîner les élèves. Afin de montrer le niveau de cet entraînement et l'inspiration des exercices des questions du concours, nous avons encadré tous les exercices résolus ou non résolus d'un même type dans le manuel Güvender.

Trouver f(8) si f(3x+2)=5x-4 (exercice résolu)

Etant donné f(2x+3)=3x+2, quelle est la valeur f(0) ? (exercice résolu) :Q23/1987)

Etant donné $f(\frac{3x-1}{2x+1})=2x-3$*, quelle est la valeur f(2) ? (exercice résolu)*

Etant donné $f(\frac{x+2}{x-1})=\frac{x-1}{x+2}$*, quelle est la valeur f(2) ? (exercice résolu)*

Etant donné $f(x^2-x)=x^2+x+3$*, quelle est la valeur* $f(-\frac{1}{4})$ *? (exercice résolu)*

Etant donné f(2x-3)=3x+2, quelle est la valeur f(5) ? (Test 1,exercice solution non proposée)

Etant donné f(2x+1)=x+2, quelle est la valeur f(0) ? (Test 1,exercice solution non proposée)

Etant donné $f(\frac{x+1}{x-1})=2x+3$*, quelle est la valeur f(2) ? (Test 1,exercice solution non proposée)*

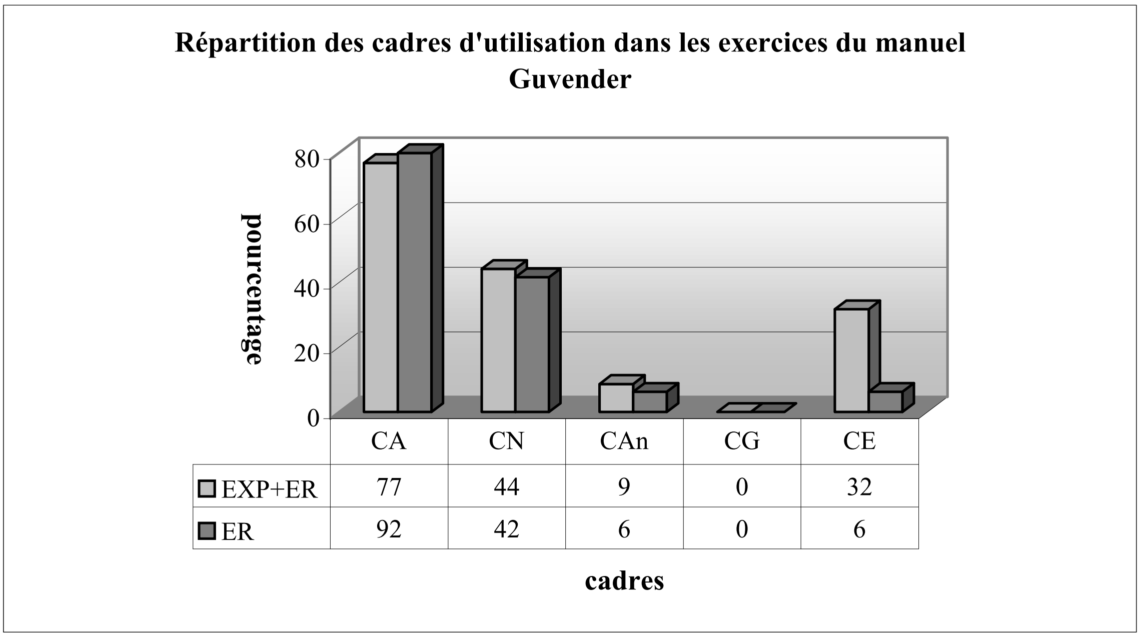
Etant donné f(3x+4)=x+1, quelle est la valeur $f^{-1}(5)$ *? (Test 1,exercice solution non proposée)*

Etant donné f(3x-4)=9x+2, quelle est la valeur f(0) ? (Test 2,exercice solution non proposée)

Etant donné $f(x^2+x)=2x+3$*, quelle est* $f(-\frac{1}{4})$ *? (Test 3,exercice solution non proposée)*

Etant donné $f(\frac{2x+2}{x-3})=\frac{x+3}{x-2}$*, quelle est* $f^{-1}(2)$ *? (Test 3,exercice solution non proposée)*

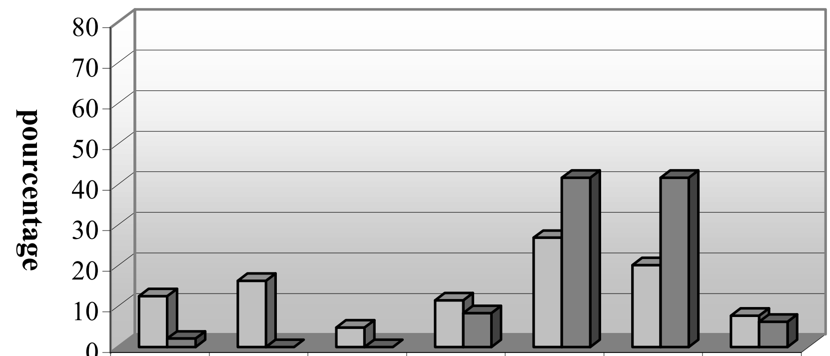
En ce qui concerne les cadres d'utilisation dans les exercices, le cadre algébrique est le cadre écrasant. Comme le montre bien le tableau suivant, 92% des exercices résolus utilisent le cadre algébrique. Le cadre analytique et le cadre de la théorie élémentaire des ensembles sont très peu utilisés. Quant au cadre géométrique il n'y a aucun exercice résolu (ni exemple) qui fait intervenir ce cadre. Si on prend en compte ensemble les exercices résolus et les exemples, seul le taux d'utilisation du cadre de la théorie élémentaire des ensembles change sensiblement. Et il monte de 6% à 32%. C'est dû au fait que le manuel utilise souvent ce cadre pour les représentations en diagrammes sagittal dans le cours.



CA :Cadre Algébrique, CN :Cadre Numérique, CAn :Cadre Analytique, CG :Cadre Géométrique, CE :Cadre de la Théorie Elémentaire des ensembles

Selon le tableau ci-dessous tous les thèmes qui figurent dans les questions du concours apparaissent aussi dans le manuel. Les thèmes V et VI sont les thèmes plus fréquents des exercices résolus. Le taux des exercices qui concernent directement l'inverse d'une fonction est de 8%. Par ailleurs, nous ne rencontrons les exercices liés aux propriétés particulières des fonctions et aux quatre opérations sur les fonctions que dans le cours. Dans 6% des exercices il s'agit de travailler sur la représentation graphique des fonctions. En ce qui concerne le thème I, il est le thème le plus marginal.

Répartition des exercices du manuel Guvender par thèmes



	Thème I	Thème II	Thème III	Thème IV	Thème V	Thème VI	Thème VII
EXP+ER	13	16	5	12	27	20	8
ER	2	0	0	8	42	42	6

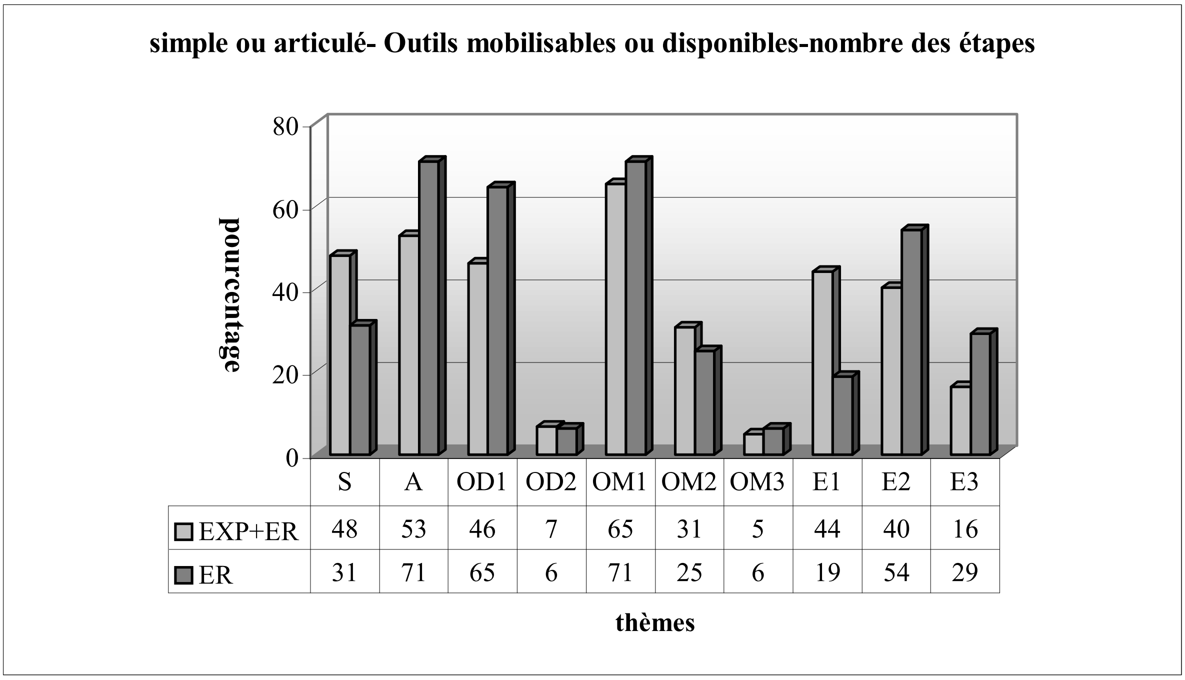
thèmes

Thème I :Définition de la notion de fonction et ensembles, Thème II : Propriétés particulières des fonctions, Thème III : Quatre opération sur les fonctions, Thème IV : Recherche de l'inverse des fonctions…, Thème V : Composition des fonctions, Thème VI :Image d'un nombre… Thème VII :Représentation graphique des fonctions…,EXP :Exemples(Effectif :56 exemples), ER :Exercices résolus(Effectif :48 exercices).

Comme nous l'avons déjà indiqué, la plupart des exercices relèvent du programme officiel du seconde. Mais on peut aussi trouver les exercices qui portent sur des connaissances dans le programme des classes suivantes (par exemple fonctions définies par morceaux). Par ailleurs la majorité des exercices résolus du manuel Güvender font utiliser plusieurs connaissances antérieures. De plus la résolution de bon nombre des exercices présente plusieurs étapes. Quant on regarde le tableau ci-dessous, on remarque que 71% des exercices résolus portent sur plusieurs connaissances antérieures (A :articulé). Tandis que 31% des exercices ne sont destinés qu'à mobiliser des connaissances liées directement à la notion de fonction (S :simple). Par ailleurs dans 65% des exercices l'élève doit faire appel à une seule connaissance antérieure (OD1 :un outil disponible). Ce taux descend à 6% dans les exercices résolus qui nécessitent de disposer des deux connaissances antérieures (OD2 : deux outils disponibles).

La plupart des exercices demandent de mobiliser une connaissance qui fait référence directe à la notion de fonction (OM1 : un outil mobilisable). Tandis que dans un quart des exercices il s'agit des deux connaissances à mobiliser (OM2 :deux outils mobilisables). Un très petit nombre conduisent l'élève à mobiliser trois connaissances liées directement à la fonction (OM3 : trois outils mobilisables). En ce qui concerne la répartition des exercices suivant le nombre des étapes, lors de la résolution de plus de la moitié il s'agit des deux étapes

(E2 :deux étapes). 29% présentent un travail qui ait trois étapes (E3 : trois étapes). Dans 19% des exercices l'élève peut arriver à la bonne réponse en une seule étape (E1 :une étape).



S :Simple, A :Articulé, OD1 :Outil disponible 1, OD2 :Outil disponible 2, OM1 :Outil mobilisable 1, OM2 :Outil mobilisable 2,OM3 :Outil mobilisable 3,E1 :Etape 1, E2 :Etape 2, E3 :Etape 3

5. Comparaison des analyses des manuels

Place de la notion de fonction dans les manuels

Nous constatons tout d'abord que les quatre manuels de lycée (ML) présentent la notion de fonction dans un chapitre commun avec les correspondances entre ensembles et la loi de composition interne. Le manuel de préparation au concours (MPC) Güvender se distingue de tous les manuels par le fait de consacrer un chapitre propre aux fonctions. Tandis que les manuels MPC Uğur et Zafer abordent les fonctions avec la notion de correspondance.

Par ailleurs conformément au programme les manuels ML introduisent la loi de composition interne et ses propriétés avant passer à la composition des fonctions. Mais dans les manuels MPC elle est présentée, après les fonctions, dans un chapitre différent.

Activités introductrices

Comme il n'y a aucune indication dans le programme officiel de la classe de seconde pour l'introduction des fonctions, dans tous les manuels (surtout les manuels ML), nous ne trouvons aucune activité introductive. Ainsi le manuel ML Altın commence directement par le cours comme les manuels MPC. Les manuels ML Tutibay et officiel conseillent d'abord de se rappeler la notion de correspondance et ensuite ils mettent en évidence la relation entre les correspondances et les fonctions en énonçant « toute correspondance n'est pas une fonction. Et les fonctions sont des correspondances particulières ». En ce qui concerne le manuel ML Aydın, il parle d'abord de la relation entre les fonctions et les correspondances comme les manuels ML Tutibay et officiel. Mais il se distingue sensiblement de tous les manuels par la mise en cause de l'utilisation différente du mot « fonction » dans la vie courante et en mathématiques. De plus ce manuel propose aussi un exemple grâce auquel la comptine $\mathbf{C_0}$ est utilisée. Il est cependant difficile de considérer cette activité comme une activité introductive.

Introduction de la notion de fonction

Bien que le programme n'indique pas la façon de définir «les fonctions », tous les manuels n'utilisent que la définition ensembliste de la notion de fonction. Mais seuls le manuel ML Tutibay et le manuel MPC Zafer parlent très brièvement du sens des fonctions en terme de variable en citant qu'à partir de la notation $y=f(x)$ y est appelé variable dépédante et x variable indépendante.

En ce qui concerne la comptine $\mathbf{C_0}$, elle est présente presque dans tous les manuels mais de manière différente. Par exemple les manuels MPC qualifient cette comptine d'une remarque.

Dans le manuel officiel elle n'est pas explicitement introduite. Mais l'élève est amené à reconnaître les fonctions à partir d'exemples en les faisant fonctionner. Le manuel ML Tutibay la propose comme un résultat de la définition ensembliste et d'un exemple. Tandis que dans le manuel Altın elle apparaît comme une mise en garde. Aydın la met en fonctionnement trois fois dans la même page: à partir d'exemple introductrice, dans la définition et dans l'écriture symbolique de la définition.

Notions qui apparaissent dans le programme officiel de la classe de seconde abordées par les manuels

Nous constatons que toutes les notions qui apparaissent dans le programme de la classe de seconde sont abordées par tous les manuels. Comme les manuels MPC sont utilisés par tous les élèves (surtout les élèves de terminale), nous pouvons y trouver des notions qui relèvent du programme des classes suivantes. Ainsi certaines propriétés particulières des fonctions comme les fonctions injectives, surjectives, non-surjectives, bijectives et certaines fonctions particulières comme la fonction identique, les fonctions constantes et les fonctions nulles sont mises en place dans les manuels ML et MPC. Par ailleurs les manuels MPC se différencient par la mise en place de notions qui appartiennent aux classes suivantes. Par exemple les fonctions de permutation qui sont dans le programme de la classe de première sont présentes dans les manuels Zafer et Uğur. Les fonctions paires ou impaires et les quatre opérations sur les fonctions qui relèvent du programme de terminale sont abordées par Güvender et Zafer.

Il y a une autre diversité entre les manuels sur la présentation des formules qui servent à calculer le nombre des correspondances définies de A vers B (A et B sous-ensembles finis et discrets) qui sont des fonctions ou n'en sont pas, des fonctions injectives, bijectives… etc. Dans le programme de seconde il n'y a aucune indication qui concerne ce type de travaux. Malgré cela les manuels ML Altın et officiel donnent presque toutes les formules dans des exercices résolus sans commentaire. Ainsi l'élève rencontre pour la première fois ce type d'exercices et de formules et il est amené à les appliquer simplement. Le manuel ML Aydın ne propose, comme point de méthode pour un exemple, que la formule qui sert à calculer le nombre des correspondances définies de A vers B qui sont des fonctions. Tandis que dans le manuel ML Tutibay il n'y a aucune formule. En ce qui concerne les manuels MPC, Güvender propose seulement la formule dont l'élève se servira pour calculer le nombre des fonctions comme dans le manuel Aydın sous une rubrique spéciale. Dans le manuel Zafer l'élève rencontre les formules qui concernent le nombre des fonctions, des fonctions injectives, bijectives et nulles dans les exercices résolus comme dans les manuels ML Altın et officiel.

Uğur présente aussi la plupart des formules même celles qui servent à trouver le nombre des fonctions de permutation ou non permutation sous une rubrique spéciale.
En ce qui concerne l'utilisation de la bijectivité comme outil pour la démonstration de l'équipotence qui est indiquée et illustrée avec un exemple par le programme, dans les manuels MPC nous ne la trouvons pas, pas plus que les ensembles finis ou infinis ni les ensembles équipotents. Il est très intéressant que le manuel officiel ne mette pas non plus en place cette utilisation de la bijectivité. Et il se contente de présenter la définition des ensembles infinis et des ensembles équipotents. Les autres manuels ML font fonctionner la bijectivité pour démontrer le caractère infini de l'ensemble des nombres naturels.

Méthodes privilégiées pour trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement : méthode $\boldsymbol{M_{xfy}}$ *et recette* $\boldsymbol{R_a}$

Les manuels ML présentent une grande diversité quant aux méthodes privilégiées pour trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement. Ainsi, dans le manuel officiel nous pouvons trouver les deux méthodes : méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ et recette $\mathbf{R_a}$. Pour tous les exercices (à part un seul exercice) qui figurent dans le cours la première est utilisée. Dès que la deuxième est implicitement introduite dans des exemples comme une deuxième méthode. La méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ n'est plus utilisée. Altın privilégie une seule méthode. C'est la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Nous ne rencontrons la recette $\mathbf{R_a}$ ni dans le cours ni dans les exercices résolus. Comme le manuel officiel, le manuel Aydın utilise les deux méthodes. Mais ce manuel se différencie des autres manuels par l'attribution d'un titre à la recette $\mathbf{R_a}$ dans le cours. Ainsi après avoir traité quelques exemples avec la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$, la recette $\mathbf{R_a}$ est introduite sous le titre « trouver l'inverse de certaines fonctions par des démarches courtes ». Ensuite la méthode plus mathématisée n'est plus jamais reprise. Dans le manuel Tutibay les deux méthodes sont présentes. La méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ est toujours utilisée. Quant à la recette $\mathbf{R_a}$ elle est présentée dans un seul exercice. Et elle n'est jamais mise en fonctionnement.
Dans les manuels MPC il y a une grande homogénéité à ce propos. Ainsi Güvender introduit d'abord $\mathbf{M_{xfy}}$ sous une rubrique. Elle est utilisée une seule fois pour une fonction qui peut relever aussi de la recette $\mathbf{R_a}$ et à chaque fois pour les fonctions qui n'en relèvent pas. A part cela, $\mathbf{R_a}$ est la seule méthode privilégiée. Dans les collections Zafer et Uğur la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ est d'abord mise en place grâce à une remarque. Et elle n'est mobilisée que pour deux fonctions pour lesquelles on peut utiliser aussi $\mathbf{R_a}$. A part pour les fonctions pour lesquelles l'utilisation de $\mathbf{M_{xfy}}$ est indispensable (par exemple les fonctions exponentielles), c'est toujours $\mathbf{R_a}$ qui est utilisé comme dans le manuel Güvender.

Enoncé simple des points essentiels des connaissances qui servent directement à résoudre des exercices

Les manuels MPC se distinguent des manuels ML (à part Tutibay) en donnant sans commentaire des points essentiels des connaissances qui servent directement à résoudre des exercices. Les manuels Uğur et Zafer sont les manuels MPC qui proposent le plus de remarques. Ainsi nous trouvons treize remarques dans le manuel Zafer et dix dans le manuel Uğur. De plus ces remarques sont très semblables. Par exemple dans une remarque la formule générale des fonctions affines est tout à coup introduite. Ensuite l'élève est amené à résoudre un exercice dans lequel l'utilisation de cette formule est mise en jeu.

Le manuel Tutibay se différencie des autres manuels ML par la mise en place de ce genre de remarques. Les remarques qui figurent dans ce manuel s'intensifient lors de la recherche des propriétés des fonctions à partir de leur représentation graphique dans un repère orthonormé.

Utilisation de la notion de fonction dans les manuels d'un point de vue outil et objet

En général dans tous les manuels la notion de fonction est présentée comme un objet. A part l'utilisation de la bijectivité comme outil pour la démonstration de l'équipotence dans les manuels Tutibay, Altın et Aydin, dans tous les manuels nous ne rencontrons aucune situation ni exercice dans lesquels les fonctions sont utilisées comme un outil.

Exercices résolus

Les manuels ML se distinguent par la place des exercices résolus. Ainsi le manuel Tutibay ne poursuit pas un ordre traditionnel (cours-exercices résolus). Tous les exercices résolus sont proposés dans le cours. Après avoir présenté une notion, cinq ou six exemples (ou exercices résolus) peuvent figurer dans ce manuel. Dans le manuel Altın les exercices résolus se sont présentés en deux parties sous le titre « applications ». La première partie se trouve avant la notion de fonction inverse et la composition des fonctions. Quant à la deuxième partie, elle figure au bout du chapitre. Les exercices résolus du manuel Aydın se décomposent en trois parties. La première partie qui figure à la suite de la composition des fonctions et l'inverse d'une fonction est proposée sous le titre « Exercices divers ». La deuxième partie est intitulée « trouver f [ou g] lorsqu'on a donné la composée fog et g [ou f]». Dans cette partie il y a ainsi des exercices concernant la décomposition des fonctions. En ce qui concerne la dernière partie, elle est intitulée « test résolu ». Il y a des exercices à choix multiple. Ainsi le manuel

Aydın se distingue des autres manuels LM[1] et se rapproche des manuels MPC en proposant des exercices résolus en forme de QCM. Dans le manuel officiel la plupart des exercices résolus sont mis en place à la fin du chapitre. Mais il se rapproche beaucoup des autres par le fait de proposer des exercices résolus dans le cours qui ne correspondent pas directement aux notions qui les précédent.

En ce qui concerne les manuels MPC, ils présentent une homogénéité. Les exercices résolus sont mis en place généralement à la fin du chapitre sous forme de QCM. Mais il y a aussi certains exercices qui figurent dans le cours. Mais ces exercices ne font pas référence directe aux notions qui les précédent.

Thèmes qui apparaissent dans les exercices résolus des manuels

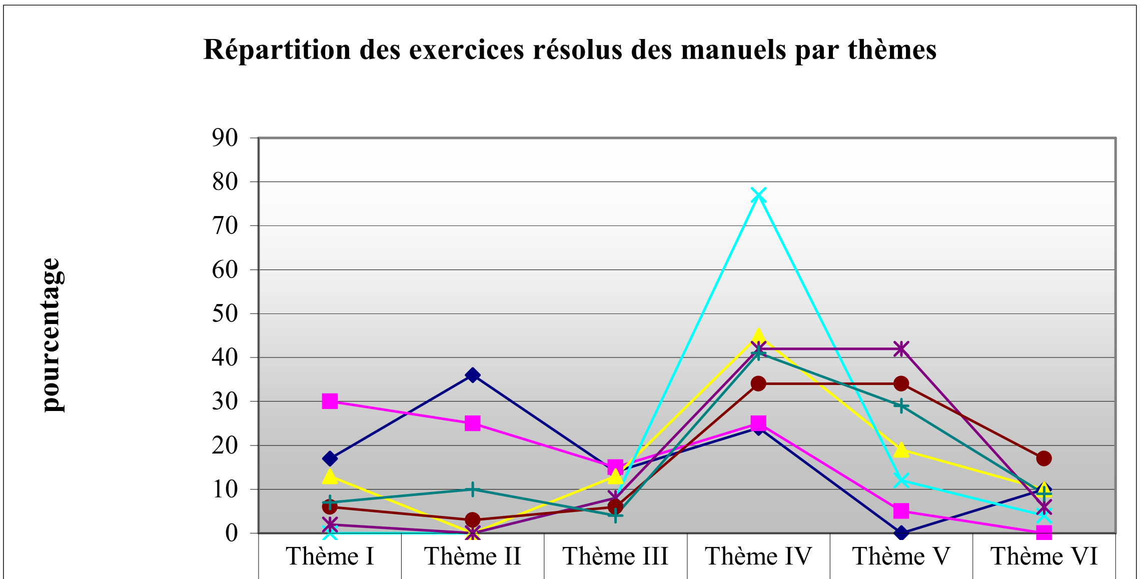
Selon les thèmes il y a certains manuels ML qui s'approchent des manuels MPC et il y a aussi certains manuels MPC qui s'approchent des manuels ML. Comme le montre bien le tableau ci-dessous, les exercices qui font utiliser la définition ensembliste des fonctions (thème I) sont plus fréquents dans les manuels LM, à l'exception du manuel officiel, que dans les manuels MPC. Les manuels se rapprochent beaucoup par le taux d'exercices portant sur la recherche de l'inverse des fonctions définies algébriquement (thème III). Comme le thème V est un des thèmes les plus fréquents des questions du concours, le taux correspondant pour les manuels ML montre aussi très bien le degré de l'influence du concours sur ces manuels. En revanche ce type d'exercices est totalement absent dans le manuel Tutibay. Et dans le manuel Altın il n'y a que 5% des exercices à ce thème. Tandis que les manuels officiel et Aydın font travailler les élèves sur ce thème respectivement dans 12% et 19% des exercices.

Pour le thème IV dans tous les manuels on trouve un taux assez élevé. Les manuels Tutibay et Altın se distinguent des autres manuels par le taux le moins élevé. Au contraire le manuel officiel se distingue par le taux plus élevé.

En ce qui concerne le thème VI, il est l'un des thèmes les plus marginaux des exercices pour la plupart des manuels. De plus les manuels ML et MPC ne présentent pas d'homogénéité. Ainsi dans le manuel Altın il n'y a aucun exercice dans lequel il est nécessaire de travailler sur la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé. Tandis que les manuels Tutibay et Aydın en proposent 10% et le manuel officiel 4%. Par ailleurs Güvender et Zafer ne mettent en place respectivement que 6% et 9% des exercices à ce thème. Alors qu'il y a 17% des exercices dans le manuel Uğur.

[1] En effet à l'exception du manuel Altın les autres manuels LM proposent à la fin du chapitre des tests qui contiennent des exercices en forme de QCM. Mais ils ne sont pas corrigés.

Le thème II nous amène aussi à voir la différence entre les manuels ML par rapport à l'intérêt du concours comme pour le thème V. Ainsi il n'y a aucun exercice dans lequel il s'agit de travailler sur les propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières (thème II) dans les manuels Aydın, officiel et Güvender. Par contre les manuels Tutibay, Altın et Zafer en proposent respectivement 36%, 25% et 10%. Un très petit nombre des exercices du manuel Uğur relèvent du thème II.



	Thème I	Thème II	Thème III	Thème IV	Thème V	Thème VI
Tutibay	17	36	14	24	0	10
Altın	30	25	15	25	5	0
Aydın	13	0	13	45	19	10
Officiel	0	0	8	77	12	4
Güvender	2	0	8	42	42	6
Uğur	6	3	6	34	34	17
Zafer	7	10	4	41	29	9

thèmes

Thème I :Définition de la notion de fonction et ensembles, Thème II : Propriétés particulières des fonctions, Thème III : Recherche de l'inverse des fonctions…, Thème IV : Composition des fonctions, Thème V :Image d'un nombre… Thème VI :Représentation graphique des fonctions (Effectif des exercices Tutibay :42 exercices, Altın :20 exercices, Aydın :31 exercices, Officiel :26 exercices, Güvender :48 exercices, Uğur :65 exercices, Zafer :69 exercices)

Présentation des questions du concours et répétition du même type d'exercices

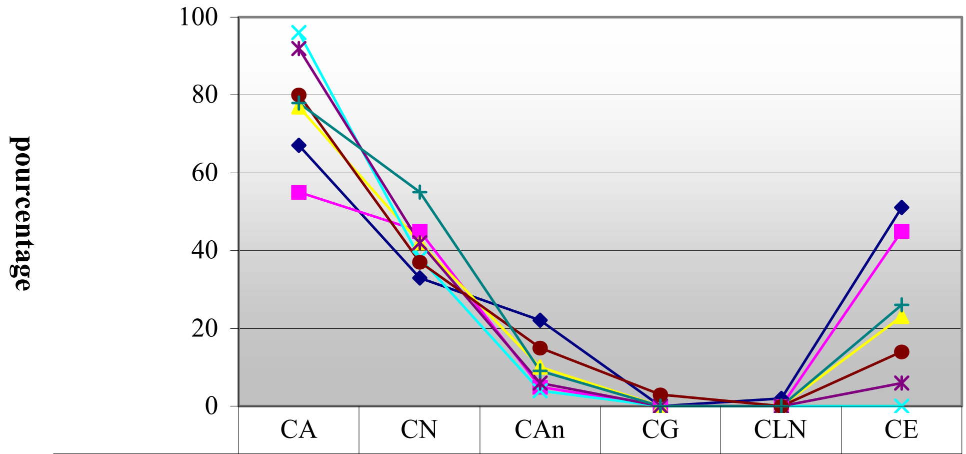
Nous constatons que dans les manuels MPC on peut trouver la plupart des questions du concours ou des questions ressemblantes. De plus le même type d'exercices est répété plusieurs fois. Comme nous l'avons déjà dit, dans le cours ces manuels (et manuel officiel) proposent certains exercices qui ne font pas référence directe aux notions qui les précédent.

Cela signifie que pour ce type de manuels le but primordial est de présenter le type de questions du concours et d'entraîner les élèves.
En ce qui concerne les manuels ML, nous pouvons aussi trouver certains types de questions du concours mais pas autant que dans les manuels MPC. La répétition des mêmes types d'exercices n'est pas non plus évidente.

Cadres d'utilisations dans les exercices résolus

Le tableau suivant montre qu'il y a une grande homogénéité dans tous les manuels en ce qui les cadres d'utilisation dans les exercices résolus. On peut d'emblée dire que les manuels sont algébriquement très riches et géométriquement très pauvres.
Ainsi le cadre algébrique est le cadre « écrasant » dans les tous les manuels. Son taux varie de 55% à 96%. Les manuels Güvender et officiel sont les manuels les plus algébriques avec un taux supérieur à 90%. A l'exception du manuel Uğur il n'y a aucun manuel qui propose des exercices dans lesquels le cadre géométrique est utilisé. Par ailleurs le cadre de la langue naturelle n'est réservé qu'au manuel Tutibay avec un taux très bas.
En ce qui concerne le cadre analytique, il est aussi un des cadres moins utilisé dans les manuels. Il n'y a pas de stabilité selon les groupes de manuels. Le manuel Tutibay se distingue à nouveau des autres manuels par un taux plus élevé. Ainsi il fait travailler les élèves dans 22% des exercices dans le cadre analytique. Ce taux descend un petit peu dans le manuel Uğur. Güvender, officiel et Altın se rapprochent par une utilisation rare de ce cadre. Zafer et Aydın proposent presque 10% des exercices dont la résolution se fait dans ce cadre.
Pour l'utilisation du cadre de la théorie élémentaire des ensembles, ni les manuels ML et ni les manuels MPC ne sont très homogènes. Ainsi dans les manuels Zafer, Uğur et Güvender le taux des exercices où il s'agit d'utiliser ce cadre est respectivement de 26%, 14% et 6%. Le manuel officiel est le seul manuel dans lequel ce cadre est totalement absent. Tandis qu'environ la moitié des exercices des manuels Tutibay et Altın et 23% du manuel Aydın font fonctionner ce cadre. Si l'on excepte le manuel Zafer et officiel, on peut dire que les manuels ML sont plus ensemblistes que les manuels MPC.

Répartition des cadres d'utilisation dans les exercices résolus par manuels



	CA	CN	CAn	CG	CLN	CE
Tutibay	67	33	22	0	2	51
Altın	55	45	5	0	0	45
Aydın	77	42	10	0	0	23
Officiel	96	38	4	0	0	0
Güvender	92	42	6	0	0	6
Uğur	80	37	15	3	0	14
Zafer	78	55	9	0	0	26

cadres

CA :Cadre Algébrique, CN :Cadre Numérique, CAn :Cadre Analytique, CG :Cadre Géométrique, CLN :Cadre de la Langue Naturelle, CE :Cadre de la Théorie Elémentaire des ensembles(Effectif des exercices Tutibay :42 exercices, Altın :20 exercices, Aydın :31 exercices, Officiel :26 exercices, Güvender :48 exercices, Uğur :65 exercices, Zafer :69 exercices)

Méthodes privilégiées pour décomposer les fonctions (décomposer ou résoudre une équation)

Nous rencontrons une situation qui ressemble à celle de la recette $\mathbf{R_a}$ dans la « décomposition » des fonctions. Lorsqu'il s'agit de « décomposer » une fonction (fog) en utilisant f, sans mettre en fonctionnement la décomposition, l'élève est à chaque fois conduit à obtenir une équation et à calculer la fonction demandée en fonction de x. Ainsi la décomposition se ramène à une résolution d'équations. Ce type de solution apparaît comme une solution proposée systématiquement dans les manuels Güvender, Uğur et comme une deuxième solution dans le manuel Zafer. En ce qui concerne les manuels ML, dans Tutibay et Altın nous ne rencontrons pas cette solution. Tandis que le manuel officiel la propose systématiquement comme Güvender et le manuel Aydın se rapproche du manuel Zafer par la mise en place de cette solution comme une deuxième méthode.

Par ailleurs comme la « décomposée implicite » est un des thèmes les plus fréquents des questions du concours, elle est aussi très fréquente dans les manuels MPC. En ce qui concerne les manuels ML, dans les manuels officiel, Altın et Aydın on essaie systématiquement d'habituer les élèves à la décomposée (implicite). Même s'il s'agit d'une décomposée normale[2], l'élève est à chaque fois amené à la mettre sous forme de décomposée (implicite). Dans le manuel Tutibay nous ne rencontrons pas ce type de solution.

Exercices qui sont illustrés par les notions relevant du programme des classes suivantes

Le but principal des manuels MPC est de préparer les élèves au concours. C'est pourquoi il est normal qu'ils proposent des exercices illustrés par des notions du programme des classes de première et terminale. Mais nous trouvons aussi ce type d'exercices dans les manuels ML. Par exemple les fonctions polynomes définies par morceaux qui relèvent du programme de terminale figurent dans les exercices résolus des manuels officiel et Aydın. Tutibay et Aydın proposent un exercice dans lequel il s'agit de la recherche de l'intervalle de définition le plus large d'une fonction rationnelle qui appartient aussi au programme de terminale. L'égalité des polynomes et la résolution d'équations exponentielles très particulières sont ultérieurement introduites dans les chapitres suivants en seconde. Mais elles sont utilisées par les manuels officiel et Aydın. L'élève rencontre pour la première fois les fonctions affines sur lesquelles il n'y a aucune indication dans le programme de seconde dans un exercice du manuel Aydın. La méthode du changement de variable est mise en fonctionnement dans les classes ultérieures. Malgré cela le manuel officiel propose des exercices dans lesquels cette méthode est utilisée.

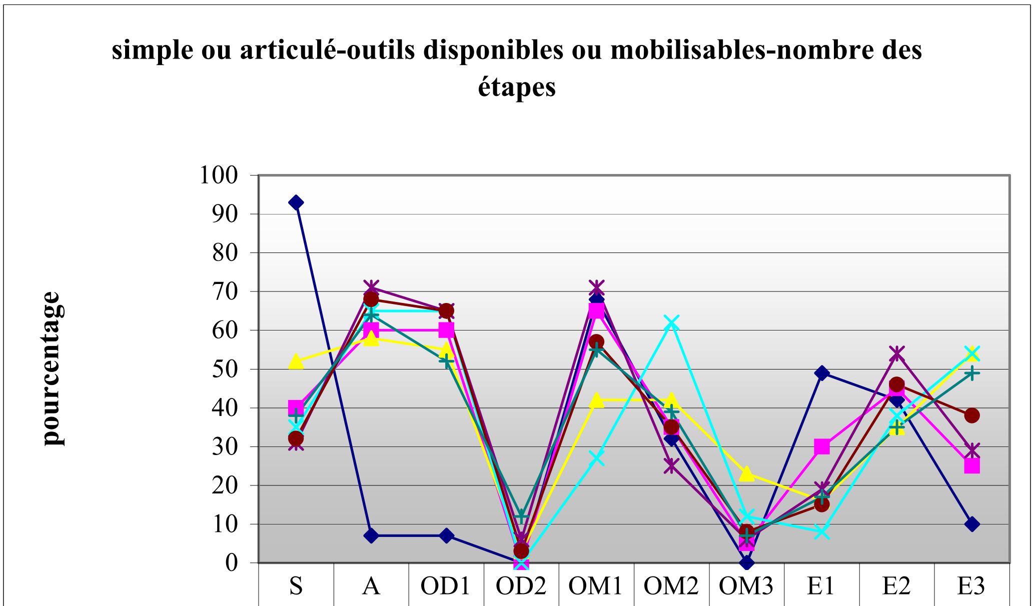
Simple ou articulé-outils disponibles ou mobilisables-nombre d' étapes

Le tableau ci-dessous montre qu'à part Tutibay les manuels présentent une grande homogénéité en ce qui concerne le contenu des exercices. Le manuel Tutibay est le manuel le plus simple. Dans 93% des exercices de ce manuel l'élève ne doit utiliser que des connaissances qui font référence directe à la notion de fonction. Par contre Güvender est le manuel le plus complexe. Ainsi il propose 71% des exercices dans lesquels l'élève doit se servir de connaissances antérieures. A l'exception du manuel officiel les manuels MPC

[2] Lorsqu'on donne la composée comme la suite gof(x)=3x+2 et l'une des fonctions f(x)=2x+1, on demande de trouver l'autre fonction. On conduit l'élève à écrire g(2x+1)=3x+2 pour obtenir une composée implicite. Dans la résolution on demande de trouver d'abord l'inverse de $ax+b$ et ensuite le mettre à la place de x dans $f(ax+b)=dx+c$. Mais ce type de solution ne permet pas à l'élève de reconnaître qu'il s'agit d'une décomposée, $ax+b$ est une fonction et on utilise aussi ici la définition de la fonction identique.

proposent plus d'exercices portant sur plusieurs connaissances antérieures que les manuels ML.

En ce qui concerne le nombre des outils disponibles, il est très intéressant de constater que dans les trois manuels officiel, Güvender et Uğur le taux des exercices qui demandent d'utiliser un seul outil disponible soit identique (65%).



	S	A	OD1	OD2	OM1	OM2	OM3	E1	E2	E3
Tutibay	93	7	7	0	68	32	0	49	42	10
Altın	40	60	60	0	65	35	5	30	45	25
Aydın	52	58	55	3	42	42	23	16	35	54
Officiel	35	65	65	0	27	62	12	8	38	54
Güvender	31	71	65	6	71	25	6	19	54	29
Uğur	32	68	65	3	57	35	8	15	46	38
Zafer	38	64	52	12	55	39	7	17	35	49

Si l'on ne prend pas en compte 3% des exercices du manuel Aydın, il n'y a aucun manuel ML qui propose des exercices dans lesquels il est nécessaire d'utiliser deux outils disponibles. En ce qui concerne les manuels MPC, Zafer se distingue des autres par le taux le plus élevé. Ainsi dans ce manuel 12% des exercices font utiliser deux outils disponibles contre 6% dans Güvender et 3% dans Uğur.

Par ailleurs dans les manuels officiel et Aydın la plupart des exercices demandent de mobiliser plusieurs connaissances qui font référence directe à la notion de fonction (OM2+OM3). Cette fois-ci Tutibay et Altın se reprochent des manuels MPC par le taux le moins élevé. Ainsi le taux de ce type d'exercices est respectivement de 31%, 43% et 46%

dans les manuels Güvender, Uğur et Zafer contre 32% dans le manuel Tutibay et 40% dans le manuel Altın.

Quant au nombre des étapes dans les exercices résolus, les manuels Tutibay et Altın se distinguent des autres manuels par un taux moins élevé d'exercices dans lesquels l'élève doit passer par plusieurs étapes pour arriver à la bonne réponse. Les manuels MPC présentent une grande homogénéité à ce propos. Ainsi il y a environ 84% des exercices de ce type dans ces manuels. Il est très intéressant que dans le manuel officiel seuls 8% des exercices puissent être résolus en un seule étapes.

6. Conclusion

Après avoir analysé les manuels, nous avons remarqué que les manuels se repartent en trois catégories différentes en ce qui concerne l'enjeu de la préparation au concours : manuels ML loin du concours, manuels ML très proche du concours et manuels MPC. Tutibay et Altın sont les manuels qui sont dans la première catégories. Dans ces manuels l'influence du concours n'est pas très forte. Il est très rarement possible de trouver des questions du concours ou des questions ressemblant et tous les thèmes des questions du concours. Dans ces manuels la recette $\mathbf{R_a}$ n'est pas proposée (ou très implicitement dans quelques exercices). En ce qui concerne les manuels ML très proche du concours, dans ces manuels l'influence du concours est très forte. Dans certains cas ils se rapprochent des manuels MPC. Par exemple ils essaient d'habituer systématiquement les élèves à des types de questions du concours (composée implicite par exemple). On peut ainsi trouver certaines questions du concours ou des questions ressemblant. La recette $\mathbf{R_a}$ est introduite et la seule méthode utilisée dans les exercices résolus. En ce qui concerne la dernière catégorie, c'est les manuels MPC. Ils sont les manuels qui consistent à préparer au concours. Il est tout à fait possible de trouver toutes les questions du concours, ou ressemblant et tous les thèmes des questions du concours.

Par ailleurs, dans tous les manuels les fonctions sont introduites à partir de leur définitions ensembliste. Il n'y a pas d'autres définitions. Mais dans certains manuels (un manuel ML et un manuel MPC) on trouve très brièvement le sens des fonctions en terme de variable.

Les manuels MPC proposent plus de remarques dans lesquelles des connaissances essentielles dont l'élève se servira pour résoudre des exercices sont introduites. Comme nous l'avons déjà dit, dans ces manuels on peut trouver aussi presque toutes les questions du concours ou des questions ressemblantes. De plus ils proposent, dans le cours, des exercices résolus (bien sûr la plupart de ces exercices sont des questions du concours) qui ne font pas référence directe aux notions qui les précédent. Tout cela nous amène à conclure que l'objectif principal de ce type de manuel est de rappeler des connaissances essentielles ou antérieures des élèves, de présenter les types de questions du concours.

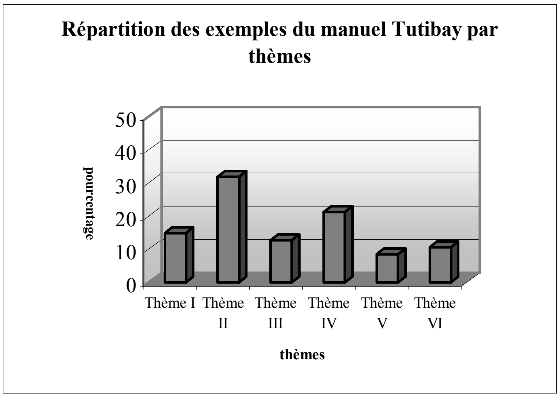
L'intérêt du concours conduit les manuels ML, surtout les manuels de la deuxième catégorie, à ne pas respecter, dans les exercices résolus, le programme de la classe de seconde. Ainsi on peut trouver des exercices illustrés par des notions du programme des classes suivantes (les fonctions polynomes définies par morceaux, la recherche de l'intervalle de définition le plus large des fonctions rationnelles par exemple) ou des notions du programme de seconde qui sont introduites ultérieurement (l'égalité des polynomes, la résolution d'équations exponentielles très particulières) ou des notions pas indiquées par le programme de seconde (les fonctions affines, le nombre des fonctions définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par exemple). Ainsi l'élève peut rencontrer pour la première fois certaines notions dans les exercices résolus.

Par ailleurs, les manuels MPC proposent beaucoup plus d'exercices de même type que les manuels ML. Cela montre l'autre objectif de ces manuels qui consiste à entraîner des élèves et à leur faire acquérir une automatisme en les faisant travailler dans des mêmes types d'exercice.

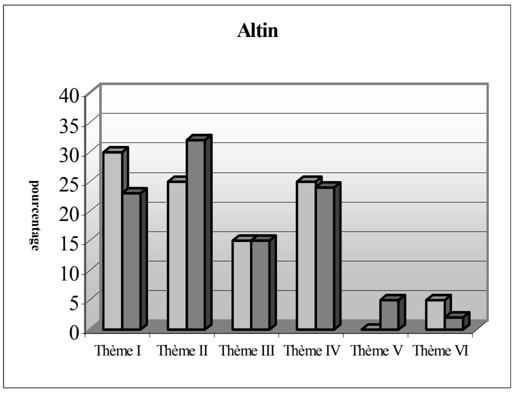
Comme il n'y a aucune question du concours dans laquelle la notion de fonction paraît comme un outil, dans les manuels MPC on ne trouve aucune situation (comme l'utilisation de la bijectivité comme outil pour la démonstration de l'équipotence suggérée par le programme de seconde) ni aucun exercice dans lesquels les fonctions sont utilisées comme outils. En ce qui concerne les manuels ML, à l'exception du manuel officiel, ils font utiliser la bijectivité comme un outil pour démontrer l'équipotence en proposant l'exemple indiqué par le programme. A part cela, la notion de fonction n'est jamais utilisée comme un outil. De plus comme nous l'avons déjà vu, les questions du concours sont très courtes et il n'y a pas de vrais problèmes. C'est pourquoi on ne trouve pas non plus de ce type de problèmes dans les manuels MPC. Il est cependant très intéressant de constater que c'est aussi valable pour les manuels ML.

Dans tous les manuels le cadre algébrique est le cadre « écrasant ». Et le taux d'utilisation de ce cadre atteint jusqu'à 98%. De plus le cadre géométrie analytique et géométrique sont les cadres les moins utilisés. Donc on peut dire que les manuels sont très algébriques et moins géométriques. Le changement de cadre est ainsi très rare.

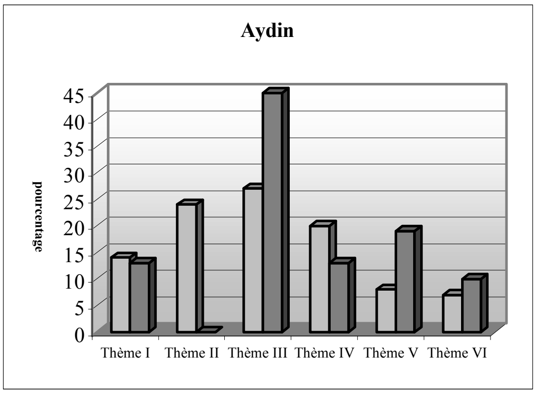
La plupart des manuels (à part Tutibay) proposent majoritairement des exercices qui portent sur plusieurs connaissances antérieures des élèves. De plus ces exercices demandent à l'élève de passer par plusieurs étapes.



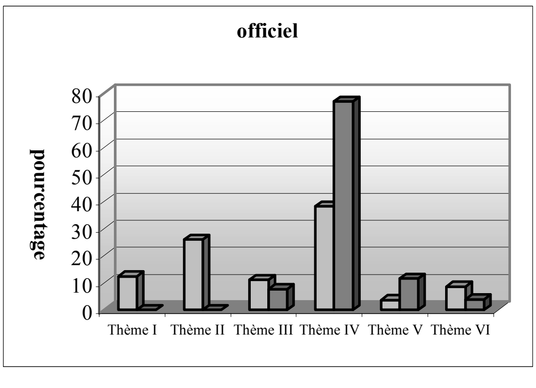
Thème I :Définition ensembliste de la notion de fonction…, Thème II :Propriétés particulières.., Thème III :Recherche de l'inverse des fonctions…, Thème IV :Composition des fonctions, Thème V :Représentation graphique des fonctions…, Thème VI :Ensembles finis et équipotents.



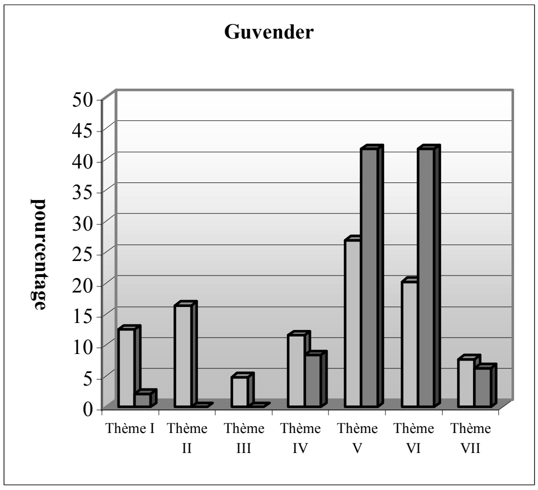
Thème I :Définition ensembliste. …Thème II :Propriétés particulières… Thème III : Recherche de l'inverse…, Thème IV : Composition des fonctions…,, Thème V : Représentation graphique, Thème VI :Recherche de l'image d'un nombre réel….,



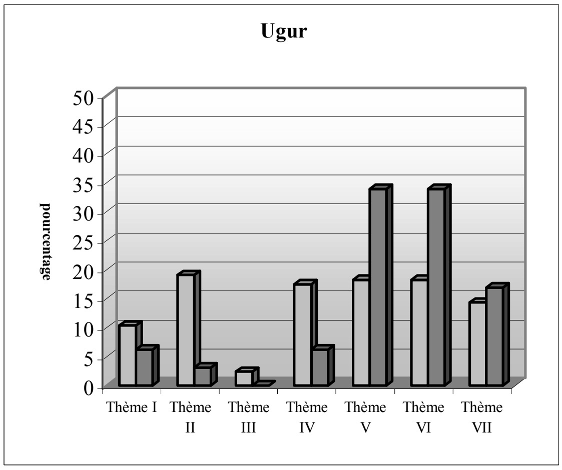
Thème I :Définition ensembliste…t, Thème II :Propriétés particulières…, Thème III :Composition des fonctions, Thème IV :Recherche de l'inverse des fonctions…, Thème V : Image d'un nombre réel…Thème VI :Représentation graphique…,



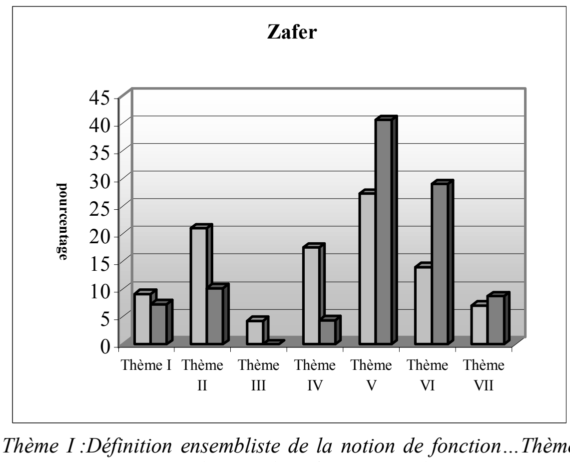
Thème I :Définition ensembliste…, Thème II :Propriétés particulières… Thème III :Recherche de l'inverse d'une fonction, Thème IV :Composition des fonctions, Thème V :Image d'un nombre réel…Thème VI :Représentation graphique…



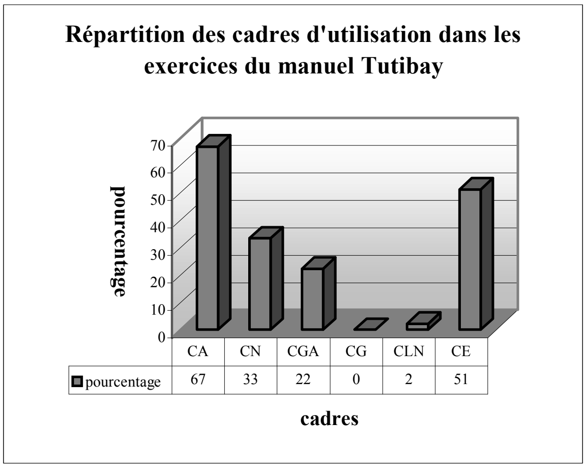
Thème I :Définition de la notion de fonction, Thème II : Propriétés particulières, Thème III : Quatre opération sur les fonctions, Thème IV : Recherche de l'inverse des fonctions…, Thème V : Composition des fonctions, Thème VI :Image d'un nombre… Thème VII :Représentation graphique …



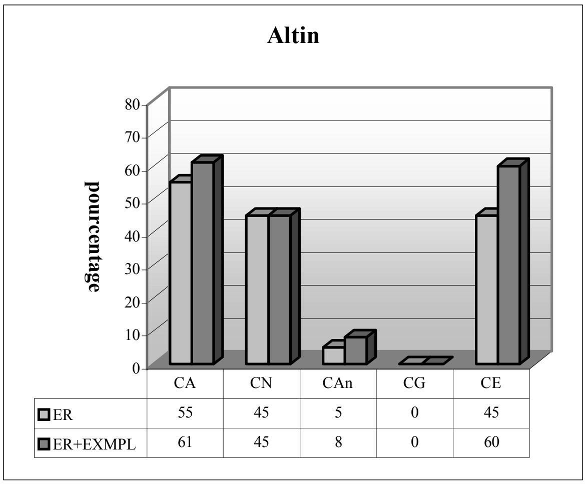
Thème I :Définition ensembliste de la notion de fonction…Thème II : Propriétés particulières des fonctions…Thème III : Quatre opérations sur les fonctions, Thème IV :Recherche de l'inverse d'un fonction, Thème V :Composition des fonctions, Thème VI :Image d'un nombre réel…Thème VII :Représentation graphique des fonctions…

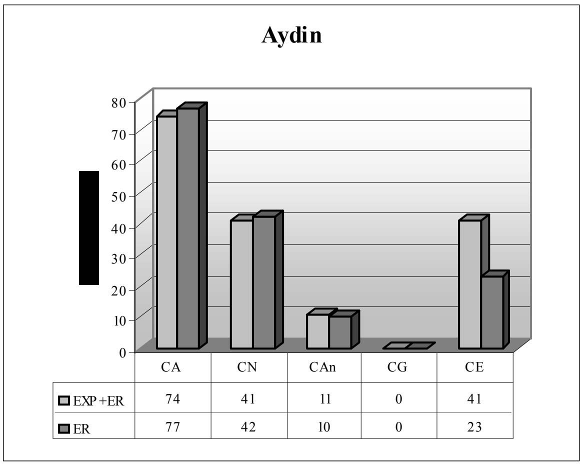


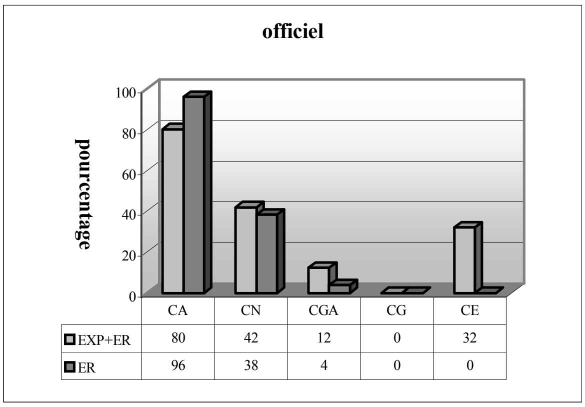
Thème I :Définition ensembliste de la notion de fonction…Thème II :Propriétés particulières des fonctions…Thème III :Quatre opérations sur les fonctions, Thème IV :Recherche de l'inverse d'une fonction, Thème V :Composition des fonctions, Thème VI :Image d'un nombre rée…Thème VII :Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé

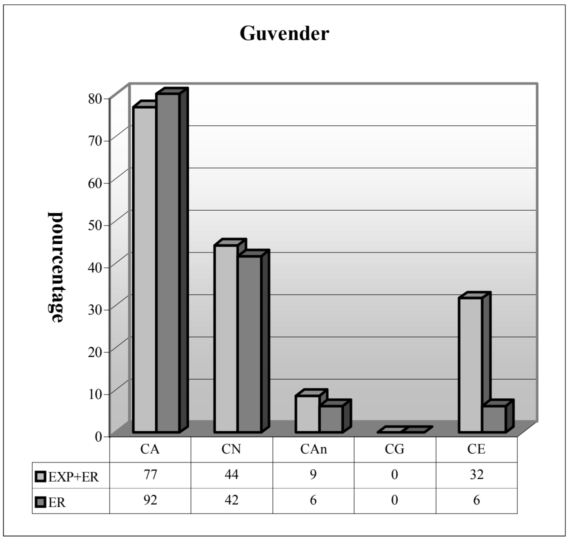


CA :Cadre Algébrique, CN :Cadre Numérique, CAn :Cadre Analytique, CG :Cadre Géométrique, CE :Cadre de la Théorie Elémentaire des ensembles

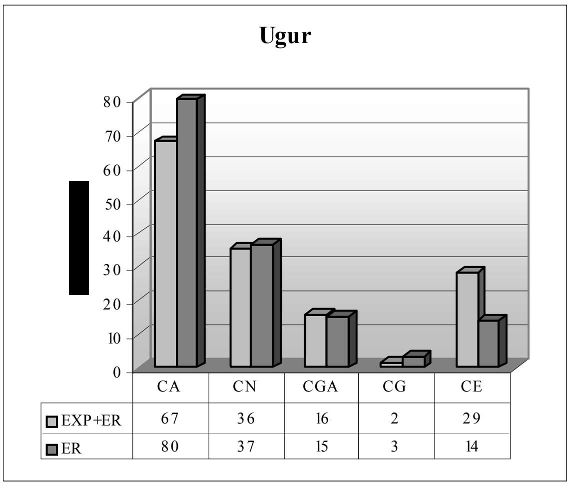




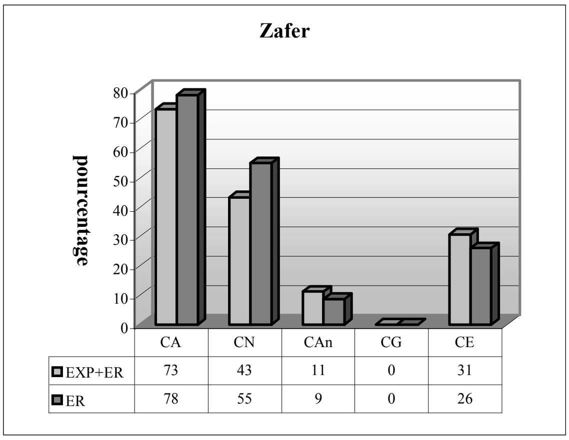




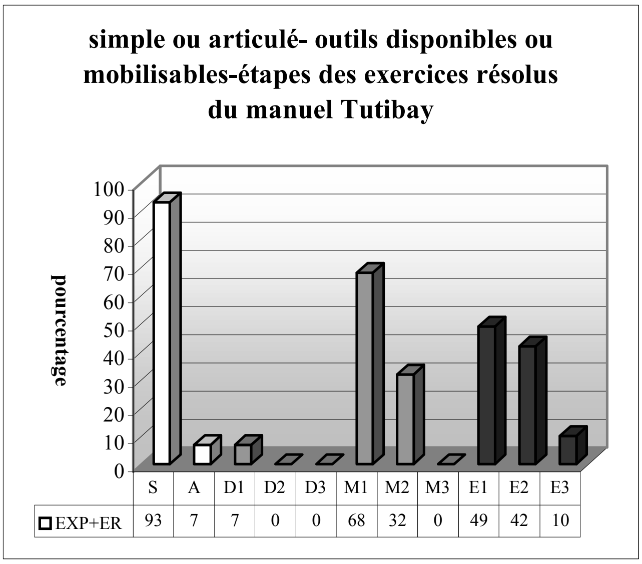
CA :Cadre Algébrique, CN :Cadre Numérique, CAn :Cadre Analytique, CG :Cadre Géométrique, CE :Cadre de la Théorie Elémentaire des ensembles



CA :Cadre Algébrique, CN :Cadre Numérique, CAn :Cadre Analytique, CG :Cadre Géométrique, CE :Cadre de la Théorie Elémentaire des ensembles

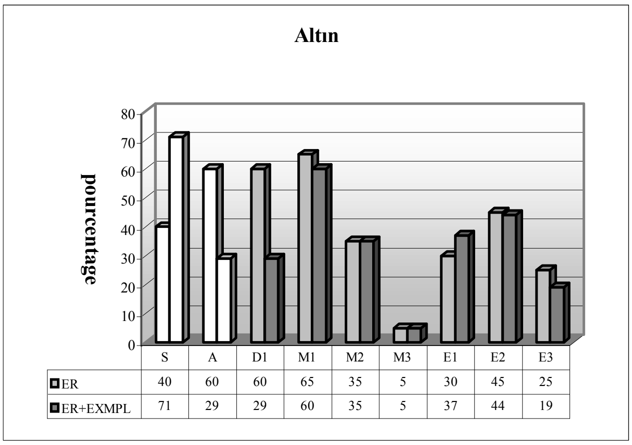


CA :Cadre Algébrique, CN :Cadre Numérique, CAn :Cadre Analytique, CG :Cadre Géométrique, CE :Cadre de la Théorie Elémentaire des ensembles



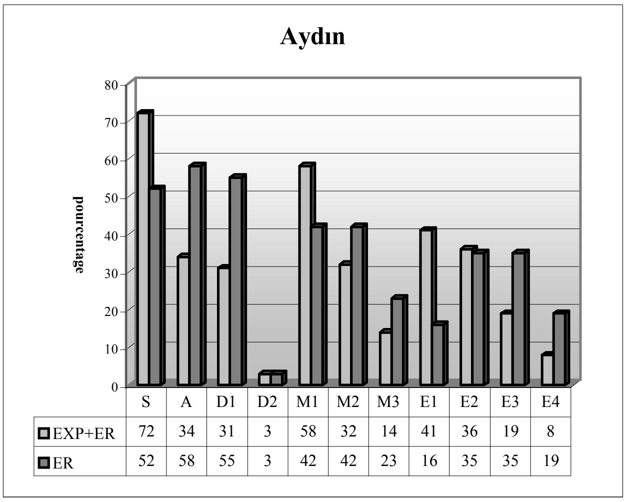
	S	A	D1	D2	D3	M1	M2	M3	E1	E2	E3
EXP+ER	93	7	7	0	0	68	32	0	49	42	10

S :Simple, A :Articulé, D1 :Outil disponible 1, D2 :Outil disponible 2, M1 :Outil mobilisable 1, M2 :Outil mobilisable 2, M3 :Outil mobilisable 3,E1 :Etape 1, E2 :Etape 2, E3 :Etape 3



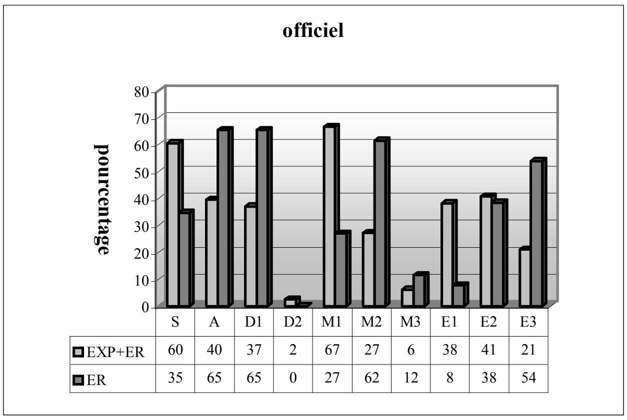
	S	A	D1	M1	M2	M3	E1	E2	E3
ER	40	60	60	65	35	5	30	45	25
ER+EXMPL	71	29	29	60	35	5	37	44	19

S :Simple, A :Articulé, D1 :Outil disponible 1, D2 :Outil disponible 2, M1 :Outil mobilisable 1, M2 :Outil mobilisable 2, M3 :Outil mobilisable 3,E1 :Etape 1, E2 :Etape 2, E3 :Etape 3

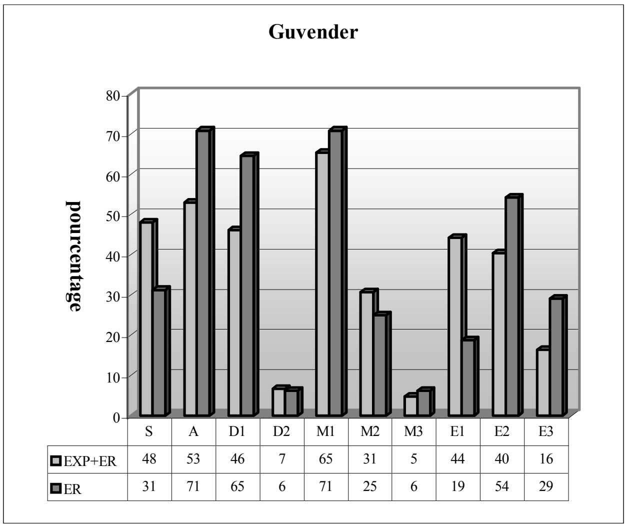


	S	A	D1	D2	M1	M2	M3	E1	E2	E3	E4
EXP+ER	72	34	31	3	58	32	14	41	36	19	8
ER	52	58	55	3	42	42	23	16	35	35	19

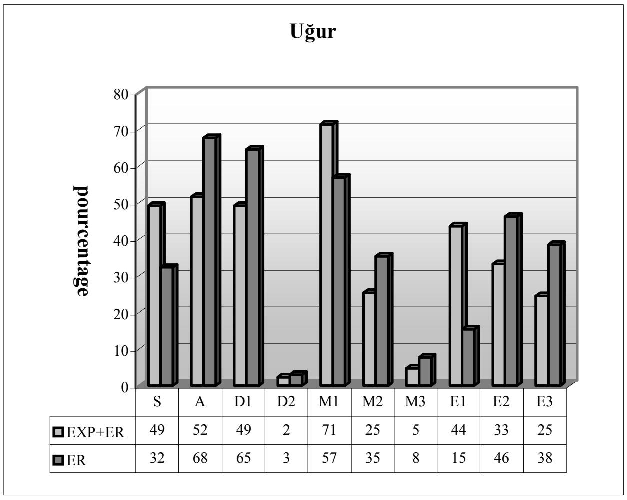
S :Simple, A :Articulé, D1 :Outil disponible 1, D2 :Outil disponible 2, M1 :Outil mobilisable 1, M2 :Outil mobilisable 2, M3 :Outil mobilisable 3,E1 :Etape 1, E2 :Etape 2, E3 :Etape 3



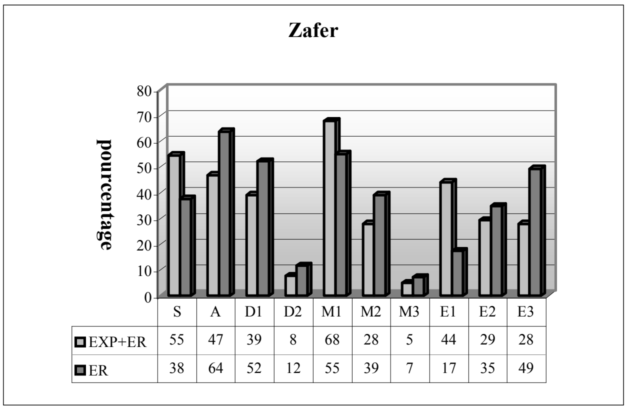
	S	A	D1	D2	M1	M2	M3	E1	E2	E3
EXP+ER	60	40	37	2	67	27	6	38	41	21
ER	35	65	65	0	27	62	12	8	38	54



	S	A	D1	D2	M1	M2	M3	E1	E2	E3
EXP+ER	48	53	46	7	65	31	5	44	40	16
ER	31	71	65	6	71	25	6	19	54	29



	S	A	D1	D2	M1	M2	M3	E1	E2	E3
EXP+ER	49	52	49	2	71	25	5	44	33	25
ER	32	68	65	3	57	35	8	15	46	38



	S	A	D1	D2	M1	M2	M3	E1	E2	E3
EXP+ER	55	47	39	8	68	28	5	44	29	28
ER	38	64	52	12	55	39	7	17	35	49

CHAPITRE IV

ANALYSE DES THEMES DU CONCOURS D'ENTREE A L'UNIVERSITE (CEU) EN TURQUIE

Plan du chapitre IV :

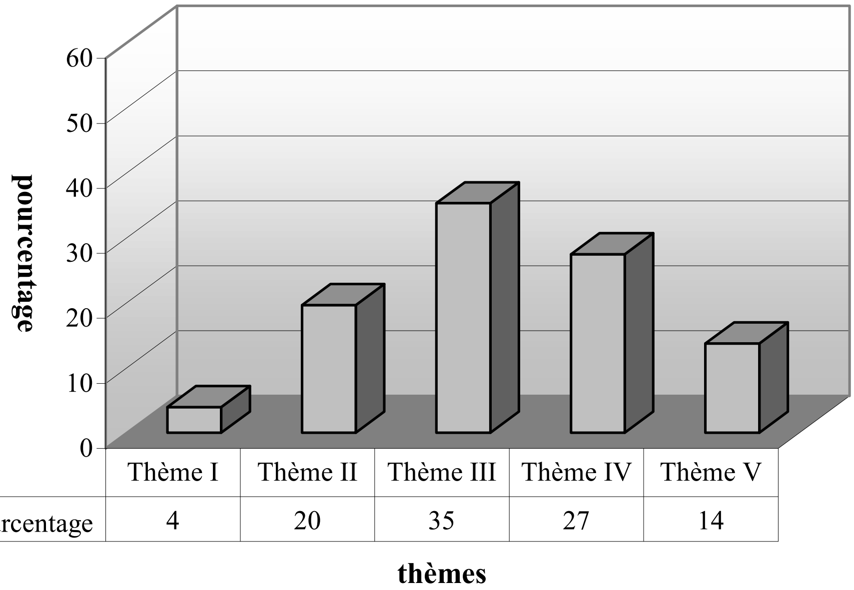
Dans cette partie, nous allons analyser les thèmes du concours national d'entrée à l'université en Turquie de l'année 1970 jusqu'à présent. Comme nous voulons montrer le non-renouvellement des types de questions proposées, nous avons choisi cette longue période.
Nous repérons ce qui est attendu de la part des élèves par les institutions qui ont posé les sujets de concours. Cela permet de comparer avec les attentes des institutions qui ont mis en place l'enseignement de la fonction à travers les programmes et manuels de lycée. En particulier, pour chaque question, nous préciserons les connaissances qui sont en jeu, en analysant la tâche prescrite et en étudiant par exemple l'autonomie des élèves.

1. Thèmes du concours de 1970 à 2003 sur les fonctions du programme de seconde

Nous trouvons cinq thèmes principaux dans les annales du concours (sujets proposés lors des épreuves de l'année 1970-2003) : définition ensembliste des fonctions et ensembles correspondants (thème I), recherche de l'inverse à partir d'une fonction définie algébrique (thème II), composition des fonctions à partir des définitions ensemblistes (thème III), image d'un nombre réel ou d'une expression par une fonction définie algébriquement (thème IV) et représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (thème V).
Le tableau suivant montre la répartition des questions du concours de 1970 à 2003 suivant les thèmes. Ainsi les questions qui font travailler sur la composition des fonctions sont les questions les plus fréquentes du concours (thème III). Elles sont suivies des questions qui demandent de calculer l'image d'un nombre réel ou d'une expression par une fonction définie algébriquement avec un taux de 27% (thème IV). Il y a 20% des questions dans lesquelles l'élève est amené à chercher l'inverse des fonctions définies algébriquement (thème II), tandis que dans seulement 12% des questions il s'agit de travailler sur la représentation graphique

des fonctions dans un repère orthonormé (thème VI). Le thème I est le thème le plus marginal du concours.

Répartition des questions du concours suivant les thèmes (1970-2002)



	Thème I	Thème II	Thème III	Thème IV	Thème V
pourcentage	4	20	35	27	14

Thème I :Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant, Thème II :Recherche de l'inverse à partir d'une fonction algébrique, Thème III :Composition des fonctions, Thème IV :Image d'un nombre réel ou une expression par une fonction définie algébriquement, Thème V :Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (effectif : 51 questions)

1.1 Thème I :Définition ensembliste des fonctions et ensembles correspondant (2 questions)

Dans la question (Question n° 8/Année 1974[1]) il s'agit de travailler sur des correspondances définies de la manière ensembliste. L'élève doit repérer parmi ces correspondances celle qui est une fonction. C'est donc l'utilisation de la définition ensembliste de la notion de fonction (cf. la comptine $\mathbf{C_0}$). Ainsi l'élève doit à la fois étudier s'il y a des éléments « vacants » et s'il y a des éléments qui ont plus d'une image dans l'ensemble de définition des correspondances proposées. Rappelons que c'est le cadre de la théorie élémentaire des ensembles qui est le cadre du travail.

Dans la question (Q9/1976) on demande de trouver l'ensemble d'arrivée d'une fonction du premier degré définie sur l'ensemble des nombres pairs. L'élève peut utiliser directement l'expression générale des nombres pairs (2n) ou expérimenter numériquement. Les

[1] Voir Annexe II.

connaissances antérieures auxquelles l'élève doit faire appel sont donc liées aux ensembles des nombres pairs et impairs.

1.2 Thème II :Recherche de l'inverse à partir d'une fonction algébrique (10 questions)

Nous pouvons classer les questions en trois catégories différentes selon la tâche prescrite:

i) Travail sur la formule algébrique de l'inverse d'une fonction définie algébriquement (6 questions) : dans la question (Q1/1970) il s'agit de déterminer la formule algébrique de l'inverse d'une fonction affine, dans les questions (Q7/1973, Q11/1976 et Q41/1997) de déterminer la formule algébrique de l'inverse d'une fonction rationnelle, dans la question (Q46/1998) de chercher l'inverse d'une fonction du second degré. Dans la question (Q41/1997) la fonction f est donnée par $x=\frac{f(x)+2}{3-f(x)}$. L'élève doit d'abord calculer la fonction f en fonction de x et ensuite trouver son inverse. La question invite cependant l'élève à s'apercevoir qu'il ne lui reste qu'à faire la dernière étape de la résolution à partir de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Ainsi l'élève peut facilement trouver l'inverse de la fonction en utilisant la définition ensembliste de la fonction inverse $(f(x)=y\Rightarrow x=f^{-1}(y))$.Dans la question (Q46/1998) une identité remarquable et la relation entre racine carrée et valeur absolue dont l'élève doit se servir sont les outils supposés disponibles. La question (Q16/1981) fait trouver la valeur a si la fonction f est définie sur IR par $x\rightarrow f(x)=\frac{-2x}{x+a}$ et $f(x)=f^{-1}(x)$. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de f. Ensuite il doit utiliser l'égalité des polynômes.

ii) Recherche de l'intervalle de définition (2 questions) : dans la question (Q44/1998) on demande de définir l'ensemble d'arrivée d'une fonction rationnelle. L'élève doit trouver l'inverse de la fonction. Ensuite il doit trouver pour quelle valeur le dénominateur est nul.

La question (Q43/1997) fait trouver le couple (a,b) dans le cas où la fonction f bijective est définie de IR-{2} vers IR-{3} par $f(x)=\frac{ax-4}{3x-b}$. L'élève doit prendre en compte que pour $x=2$ le dénominateur de la fonction f est nul et pour $x=3$ le dénominateur de son inverse nul. Ces deux questions relèvent du programme officiel de la classe de terminale.

iii) Existence d'une inverse (2 questions) : il s'agit d'utiliser la relation entre bijectivité et fonction inverse. Dans la question (Q25/1988) l'élève doit déterminer laquelle a une fonction inverse parmi des fonctions définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par une liste de couples. Alors il s'agit d'une question qui renvoie l'élève aux choix. L'élève doit étudier la bijectivité des fonctions proposées en sachant qu'une fonction doit être bijective pour avoir un inverse. La question (Q3/1971) fait déterminer quelle est la fonction dont l'inverse n'est pas une fonction parmi des fonctions définies algébriquement. En connaissant la relation entre la bijectivité et l'inversibilité des fonctions, l'élève doit chercher si les fonctions proposées sont bijectives.

1.3 Thème III :Composition des fonctions (18 questions)

Nous pouvons classer les questions en quatre catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Composition des fonctions (8 questions) : il y a cinq question dans lesquelles on demande de composer deux fonctions définies algébriquement. Dans la question (Q4/1971) il est nécessaire de composer une fonction du second degré et une fonction affine. L'identité remarquable $(a+b)^2$ paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. La question (Q5/1975) consiste à composer une fonction du troisième degré et une fonction affine. Les identités remarquables sont aussi des outils devant être disponibles dans ce travail. Dans la question (Q6/1973) il est nécessaire de déterminer l'ensemble image de la composée d'une fonction affine et une fonction du second degré en utilisant l'ensemble de définition. Deux solutions sont possibles. L'élève peut trouver la composée ensuite l'ensemble image. Il peut aussi déterminer l'ensemble image « fonction par fonction » sans trouver la formule algébrique de la composée. La question (Q2/1970) fait trouver les deux types de composée d'une fonction du premier degré et une fonction du second degré *(fog et gof)*. Ensuite elle renvoie l'élève aux réponses proposées pour choisir celle qui est vraie. Dans la question (Q37/1995) on demande à l'élève de trouver pour quelle valeur de x on a $(g^{-1}of)(x)=-16$ en mobilisant les fonctions f et g définies par $f(x)=2x+1$ *et* $g(x)=\frac{2x-1}{x+5}$. L'élève doit trouver d'abord l'inverse de g et ensuite la composée $(g^{-1}of)$. La résolution d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Dans la question (Q17/1982) la formule algébrique de la composée n'est pas en jeu. Ainsi on conduit l'élève à calculer la valeur *fog(2)* si les fonctions f et g sont définies sur IN par $f:x\to\sum_{n=1}^{x}n$ et $g:x\to\sum_{n=1}^{x}n^2$. L'élève doit trouver la valeur *fog(2)* « fonction par fonction ». La notion de somme à laquelle l'élève doit faire appel est donc un outil devant être disponible dans ce travail. Par ailleurs il faut signaler que la notion de somme relève du programme de la classe de première. La question (Q14/1978) demande de composer une fonction définie par morceaux sur IN avec elle-même. L'élève doit aussi faire appel aux connaissances antérieures portant sur les nombres pairs et impairs. Dans la question (Q29/1990) on demande de trouver la valeur u en utilisant

$f(x)=\frac{2x+u}{x+1}$ *et* $fof(x)=\frac{x-9}{3x-2}$. L'élève doit définir la composition de la fonction f avec elle-même. L'égalité des polynômes dont l'élève dont l'élève doit se servir est un outil devant être disponible dans ce travail.

ii) Décomposition implicite des fonctions (4 questions) : la question (Q21/1986) fait trouver la fonction *f* en utilisant la composée (implicite) $f(2x+3)=x^2+1$. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction implicite $2x+3$ et ensuite en utilisant la définition de la fonction identique il doit trouver la fonction f. Dans la question (Q32/1992) l'élève doit faire la même chose pour la fonction $f(2x+1)=\frac{x^2+3}{5}$. L'identité remarquable $(a+b)^2$ s'avère un outil supposé disponible pour la résolution de ces deux questions. La question (Q27/1989) présente aussi le même travail que dans les précédentes. Mais cette fois-ci la fonction implicite et la composée sont rationnelles. De plus cette question permet aussi à l'élève de trouver la bonne réponse, sans calcul, en s'apercevant que la fonction *f* est une fonction inverse ($f(x)=\frac{1}{x}$). La question (Q23/1987) dans laquelle la fonction implicite et la composée sont du premier degré fait calculer l'image de 0 par f . Deux solution sont possibles. La première solution invite l'élève à trouver la fonction f comme il l'a déjà fait dans les questions précédentes et ensuite à calculer la valeur f(0). Dans la deuxième l'élève doit d'abord trouver pour quelle valeur de x la fonction implicite est égale à zéro et ensuite mettre cette valeur à la place de x dans la composée.

iii) Décomposition des fonctions (5 questions) : il y a cinq questions pour lesquelles on demande de décomposer des fonctions définies algébriquement. Il est très intéressant que les deux questions (Q26/1988) et (Q28/1989) soient quasiment identiques, bien qu'elles aient été proposées dans des années différentes. Dans leur énoncé nous ne remarquons qu'une petite différence : la fonction g devient f. Puisque cet exemple est très représentatif pour montrer le non-renouvellement des types des questions du concours, nous présentons intégralement ces questions:

(Q26/1988) : Si $(fog)(x)=\frac{x}{x^2+1}$ *et* $g(x)=x+1$, *laquelle de ces fonctions ci-dessous est la fonction f ?*

A) $\frac{x+1}{x^2+2x+2}$ *B)* $\frac{x-1}{x^2-2x+2}$ *C)* $\frac{x^2+1}{x+1}$ *D)* $\frac{x^2+1}{x}$ *E)* $\frac{x}{x+1}$

(Q28/1989) : Si $(fog)(x)=\frac{x}{x^2+1}$ *et* $f(x)=x+1$*, laquelle de ces fonctions ci-dessous est la fonction g ?*
$A)-\frac{x+1}{x^2+2x+2}$ $B)\frac{x-1}{x^2-2x+2}$ $C)\frac{1}{x+1}$ $D)\frac{x}{x+1}$ $E)\frac{-x^2+x-1}{x^2+1}$

Dans la question (Q26/1988) l'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction g. Ensuite en faisant appel à la définition de la fonction identique il doit « décomposer » fog pour trouver la fonction f. Dans la question (Q28/1989) l'identité remarquable n'est pas utilisée. De plus l'élève peut déterminer g sans trouver l'inverse de la fonction f. Ainsi il peut mettre g(x) à la place de x dans la fonction f et ensuite arriver à la bonne réponse en calculant g(x) en fonction de x. La résolution d'équations paraît donc comme un outil supposé disponible dans ce travail. Dans la question (Q34/1994) la procédure utilisée dans les questions précédentes ne permet pas à l'élève de résoudre la question. Il doit donc essayer les fonctions proposées dans les choix en composant avec la fonction f. La factorisation est un outil qui facilite le travail. Dans la question (Q35/1994) il s'agit d'une composée affine et une fonction logarithmique en base 2 de x. En faisant appel aux connaissances déjà acquises portant sur cette dernière qui relève du programme de la classe de première l'élève doit trouver l'inverse de la fonction. Ensuite il va trouver la fonction demandée en mettant en fonctionnement la définition de la fonction identique. La question (Q15/1980) demande de « décomposer » ($g^{-1}of$) en utilisant f pour trouver g. La procédure à suivre n'est pas différente que dans la plupart des questions précédentes. L'élève doit deux fois faire appel à l'inverse d'une fonction.

iv) Démonstration de l'injectivité de la composition des fonctions (1 exercice) : dans la question (Q10/1976) on donne la démonstration ensembliste de l'injectivité de la composition des fonctions injectives dans l'énoncé de la question et on demande de la reconnaître. L'élève doit simplement choisir quelle définit cette activité parmi les réponses proposées.

1.4 Thème IV :Image d'un nombre réel ou une expression algébrique par une fonction (14 questions)

Nous pouvons classer les questions en cinq catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Utilisation indispensable de la formule générale des fonctions affines (2 questions) : dans deux questions l'utilisation de la formule algébrique des fonctions affines est indispensable. La question (Q22/1987) fait calculer l'image de 1 en utilisant le fait que f soit une fonction affine et l'image des deux nombres réels *(f(2)=3 et f(3)=2)*. L'élève doit d'abord déterminer la fonction f en mobilisant la formule générale algébrique des fonctions affines. Ensuite il doit calculer l'image de 1. La résolution du système linéaire d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. En ce qui concerne la question (Q38/1996), cette fois-ci la formule algébrique des fonctions affines est donnée dans l'énoncé. On demande de calculer le produit de a et b lorsque $f^{-1}(3)=4$ *et* $f^{-1}(2)=5$. Deux solutions sont possibles. L'élève peut trouver l'inverse de la fonction f. Ensuite en faisant appel à la résolution du système linéaire d'équations il peut trouver a et b. Dans l'autre solution il peut trouver $f(4)=3$ *et* $f(5)=2$ en utilisant la définition ensembliste de la fonction inverse. Ainsi il peut obtenir un système linéaire d'équations pour trouver a et b.

ii) Calculer l'image d'un nombre réel par des fonctions définies indirectement (4 questions) : il y a quatre questions dans lesquelles il s'agit de calculer l'image d'un nombre réel à partir d'une image connue et d'une fonction définie indirectement. Nous voudrions mettre en place les deux questions pour soit confirmer au non-renouvellement du concours et soit faire mieux voir le type de questions :

(Q13/1978) : Si $f(n)=\frac{n}{3}f(n+1)$ *et* $f(5)=\frac{9}{16}$, *quelle est la valeur f(2) ?*

A)$\frac{3}{4}$ *B)2* *C)*$\frac{2}{3}$ *D)*$\frac{3}{2}$ *E)*$\frac{1}{2}$

(Q31/1991) : Si $f(x) : IR \rightarrow IR$, $f(x)=xf(x+1)$ *et* $f(4)=\frac{4}{3}$, *quelle est la valeur f(2) ?*

A) 14 *B) 12* *C) 10* *D) 8* *E)6*

Dans la question (Q13/1978) l'élève doit mettre respectivement à la place de x les valeurs numériques 2,3 et 4 dans la formule pour aller de la valeur f(5) vers f(2). Dans la question (Q31/1991) il s'agit aussi du même travail. L'élève doit donner en x les valeurs numériques 2 et 3 dans la formule pour obtenir l'image de 2. Puisque les questions (Q39/1996 et Q40/1997) présentent aussi le même travail que dans les questions précédentes, nous passons à la catégorie suivante.

iii) Calculer l'image d'une expression algébrique en fonction de f(x) (2 questions) : la question (Q30/1990) fait trouver l'image de l'expression $2x$ par f. Ensuite il doit remplacer 2^{3x} par $2f(x)$ en sachant l'égalité $2f(x)=2^{3x}$. Alors les connaissances antérieures dont l'élève doit se servir sont liées aux puissances. Dans la question (Q36/1995) il s'agit aussi de la même procédure. La résolution d'équations paraît comme un outil devant être disponible dans ce travail.

iv) Calculer l'image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique par une fonction définie algébriquement (5 questions) : dans la question (Q24/1988) dans laquelle il s'agit de l'identité remarquable $(a+b)^3$ en extension comme formule algébrique de la fonction demande de trouver l'image de $x+1$. L'élève peut trouver cette dernière en mettant directement à la place de x dans la fonction. Mais la factorisation de l'identité remarquable facilite beaucoup le travail et réduit le risque d'erreurs. La question (Q48/1999) fait calculer la différence $f(1-x)-f(x)$ à partir d'une fonction trinôme du second degré. L'identité remarquable $(a+b)^2$ est un outil supposé disponible dans ce travail. Dans la question (Q12/1977) il est nécessaire de calculer quelques valeurs à partir de deux fonctions définies de IRxIR vers IR. L'une des fonctions associe à chaque couple réel (a,b) la valeur $\min(a\sqrt{2}, b\sqrt{3})$ et l'autre la valeur max(3a,2b). Les notions de maximum et minimum que l'élève doit faire fonctionner sont donc les outils devant être disponibles dans ce travail. La question (Q20/1985) demande de déterminer la valeur $f(1)$ parmi plusieurs possibilités si la fonction f est définie par $f(a.b)=f(a)+f(b)$. L'élève doit prendre en compte 1.1=1 pour trouver $f(1)$. Dans la question du concours de 2003 (Q51/2003) on demande de calculer la somme $f(-1)+f(0)+f(1)$ si la fonction f est définie par $f(x)=|x-2|-|x|$. L'élève doit calculer les images concernées pour trouver la somme demandée. La notion de valeur absolue dont l'élève doit se servir s'avère un outil supposé disponible dans ce travail.

v) Déterminer la formule algébrique d' une fonction représentée en langue naturelle (1 question) : dans la question (Q45/1998) on donne une fonction définie par la suivante « la fonction f associe à chaque nombre entier la somme de ce nombre et son inverse » et on demande à l'élève la représentation algébrique de cette fonction. La notion d'inverse s'avère un outil devant être disponible dans ce travail.

1.5 Thème V : Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (7 questions)

Nous pouvons classer les questions en trois catégories différentes suivant la tâche prescrite :

i) Lire ou interpréter la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (3 questions) : dans toutes les questions l'élève doit reconnaître qu'on repère les éléments de l'ensemble de départ sur l'axe des abscisses et ceux de l'ensemble d'arrivée sur l'axe des ordonnées. La question (Q18/1982) demande de déterminer graphiquement pour quelle valeur de x on a f[f(x)]=3. Dans la question (Q42/1997) l'élève doit calculer la valeur

$\frac{f(2)+f^{-1}(2)}{f(f(1))}$ à partir de la représentation graphique de la fonction f bijective dans un repère orthonormé. Il doit prendre en compte que la représentation graphique d'une fonction bijective est également celle de son inverse (en échangeant les axes). La question (Q47/1998) il est nécessaire de calculer la valeur $\frac{g(1)+fog(2)}{f(4)}$ à partir des représentations graphiques des deux fonctions dans un repère orthonormé. L'élève doit aussi ici faire appel à la composée que dans les questions précédentes.

ii) Utilisation indispensable de l'équation des fonctions pour déterminer graphiquement des valeurs demandées (3 questions) : il s'agit aussi de déterminer quelques valeurs à partir des représentations graphiques données des fonctions dans un repère orthonormé. Mais il est bien nécessaire de définir (ou utiliser) l'équation des fonctions. Dans la question (Q33/1993) on demande de calculer la valeur $\frac{fog(8)}{fof(2)}$ à partir des représentations graphiques de la parabole f et la droite g. Les deux points communs de ces dernières sont précisés. Pour trouver quelques valeurs l'élève doit définir l'équation de la droite g. La question (Q49/1999) fait calculer la valeur $(f^{-1}og(6))+(gof^{-1})(-1)$ en utilisant la représentation graphique de la fonction linéaire f et de la fonction g dans un repère orthonormé. L'élève doit utiliser la composée et l'inverse de la fonction. De plus l'équation de la fonction linéaire dont l'élève doit se servir est un outil supposé disponible dans ce travail. Dans la question (Q50/2000) l'élève est amené à déterminer la valeur $(fog^{-1}of)(0)$ à partir de la représentation graphique de la fonction f et de la fonction g définie par $g(x)=x^{3}$. Pour quelques valeurs nécessaires l'élève doit faire appel à l'équation de la fonction g. Comme la question précédente la composée et l'inverse sont les outils mobilisables du travail.

iii) Calculer l'image d'un nombre réel par une fonction définie géométriquement (1 question) : dans la question (Q19/1982) il s'agit de travailler sur une fonction f définie géométriquement par *f : x →f(x)= « la mesure de l'aire hachée»*. Il y a trois carrés juxtaposés sur une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Les cotés de ces carrés sont respectivement de 1,2 et 4. L'élève doit d'abord déterminer la formule algébrique de la fonction en calculant la mesure de l'aire hachée. Ensuite il doit trouver l'image de 3. Ainsi l'aire du carré et du rectangle paraît comme un outil devant être disponible dans ce travail.

2. Synthèse

Dans notre synthèse nous reprendrons successivement les différentes dimensions prises en compte dans l'analyse et nous comparons avec les résultats de l'analyse du programme et des manuels.

Thèmes qui apparaissent dans les questions

Globalement il y a peu de thèmes et peu de questions différentes. Il est tout à fait possible de rencontrer les mêmes types de question avec des petites modifications selon les années. La composition des fonctions à partir de leurs formules algébriques est le thème le plus fréquent. Elle est suivie par la recherche de l'image d'un nombre ou d'une expression algébrique et du calcul de l'inverse d'une fonction à partir de sa formule algébrique. Les questions qui concernent la géométrie analytique ou la géométrie sont peu fréquentes. En ce qui concerne le travail sur la définition ensembliste de la fonction c'est un thème très marginal du concours.

Si l'on compare ces résultats avec les résultats obtenus par l'analyse des manuels, dans tous les manuels MPC et certains manuels ML il est possible de trouver tous ces thèmes avec un taux qui varie d'un manuel à l'autre. Ainsi à part le manuel officiel tous les manuels ML se distinguent beaucoup du concours par le taux très élevé du thème I. Dans les manuels MPC le taux de proposition de ce thème n'est pas très différent de celui du concours.

Comme nous l'avons déjà indiqué, la composition des fonctions et l'image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique par une fonction sont les thèmes les plus fréquents du concours. C'est aussi valable pour les manuels MPC et certains ML. Ainsi à part les manuels Tutibay et Aydın chaque manuel propose majoritairement des exercices portant sur la composition des fonctions. Le manuel officiel se distingue beaucoup des autres par le taux plus élevé encore de proposition de ce type d'exercices.

Par ailleurs les exercices qui demandent de calculer l'image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique sont plus nombreux dans les manuels MPC (thème V). Dans le manuel Tutibay il n'y a aucun exercice à ce thème. Tandis que Altın ne propose que 5% des exercices. Les manuels Zafer et Uğur sont très proches du concours par le taux attribué au thème V (respectivement 29% et 34%). Güvender est le manuel qui met en place le plus d'exercices à ce thème (42%).

Comme dans le concours il n'y a aucune question dans lequel il s'agit de travailler sur les propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières, pour les manuels MPC et les manuels où l'influence du concours est très forte (officiel et Aydın), le thème II est très peu fréquent. Par contre Tutibay et Altın se distinguent beaucoup du concours en proposant respectivement 36% et 25% des exercices à ce thème.

En ce qui concerne le thème III, puisque les manuels proposent beaucoup d'exercices liés à la recherche de l'inverse des fonctions dans le cours, il nous semble préférable de prendre en compte l'ensemble des résultats des exemples et des exercices résolus (EXP+ER). Les manuels ne se différencient pas beaucoup et ils sont proches du concours par le taux attribué à ce thème.

Si l'on regarde le thème VI, on observe une diversité. Les manuels Altın, Aydın, Uğur et Zafer se rapprochent du concours. Les manuels officiel et Güvender sont les manuels qui proposent moins d'exercices pour lesquels l'élève doit travailler sur la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé.

Formes des questions

Les questions du concours sont généralement très courtes. De plus dans l'énoncé de certaines questions on n'indique pas les ensembles où les fonctions données sont définies.

(Q30/1990) : Si $f(x)=2^{3x-1}$ *, laquelle de ces réponses proposées ci-dessous est la valeur f(2x) en fonction de f(x) ?*

A)3f(x) *B)3[f(x)]²* *C)2f(x)* *D)2[f(x)]²* *E)2[f(x)]³*

(Q7/1973) : Laquelle de ces fonctions suivantes est l'inverse de la fonction définie par $y=\dfrac{3x-1}{2x+1}$ *?*

A)$y=\dfrac{3-2x}{1+2x}$ *B)* $y=\dfrac{2x+1}{3x+1}$ *C)* $y=\dfrac{2x+1}{3x-1}$ *D)* $y=\dfrac{1+x}{3-2x}$ *E)* $y=\dfrac{3x+1}{2x+1}$

(Q29/1990) : Etant donné la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x+u}{x+1}$ *et la fonction fof définie par* $fof(x)=\dfrac{x-9}{3x-2}$*, quel est le nombre u ?*

A)-3 *B)-2* *C)-1* *D)0* *E)1*

Nous pensons que ce type de questions peut engendrer chez les élèves l'idée que la seule chose importante est de trouver à tout prix la bonne réponse (numérique ou algébrique) en

négligeant des « détails » plus formels. Il n'est pas nécessaire de se demander si la fonction est définie et dans quelles conditions on peut appliquer une formule ou une procédure…
Nous constatons aussi ce type de situations dans les manuels. En général soit les manuels n'indiquent pas des ensemble de définition des fonctions soit ils demandent de travailler pour les valeurs où les fonctions sont définies ou dans les conditions convenables.

Programmes, contenu du concours et manuels

Nous remarquons que les questions du concours contiennent en général des applications directes du cours. Il n'y a aucune question qui fait intervenir la notion de fonction comme un outil. La plupart des questions relèvent du programme officiel du seconde. Mais on peut aussi trouver des questions qui font utiliser des connaissances non indiquées par le programme et des connaissances relevant du programme des classes suivantes. Par exemple dans le concours il y a deux questions dans lesquelles la formule générale des fonctions affines est utilisée. Par contre dans les programmes il n'y a aucune indication concernant ces fonctions. C'est la raison pour laquelle dans les manuels MPC et certains manuels ML l'élève rencontre pour la première fois ce type d'exercices comme des exercices résolus.
Par ailleurs les fonctions définies par morceaux figurent dans le programme de terminale. Et il y a une question du concours qui les concernent. Dans certains manuels ML, comme dans la situation précédente, on peut trouver des exercices résolus illustrés par ces fonctions.
Comme nous l'avons déjà vu lors de l'analyse du programme de seconde, l'utilisation de la bijectivité comme outil pour la démonstration de l'équipotence est suggérée par le programme. Mais il n'y a aucune question qui provoque cette utilisation dans le concours. Les propriétés particulières des fonctions et fonction particulières occupent une grande place dans le programme de seconde. Malgré cela dans le concours il n'y a presque aucune question (à part la démonstration de l'injectivité de la composition des fonctions et la relation entre la bijectivité et l'inversibilité des fonctions (Q10/1976)).C'est pourquoi les manuels MPC et certains manuels ML ne proposent pas d'exercices de ce type ou n'en proposent qu'un très petit nombre dans les exercices résolus.

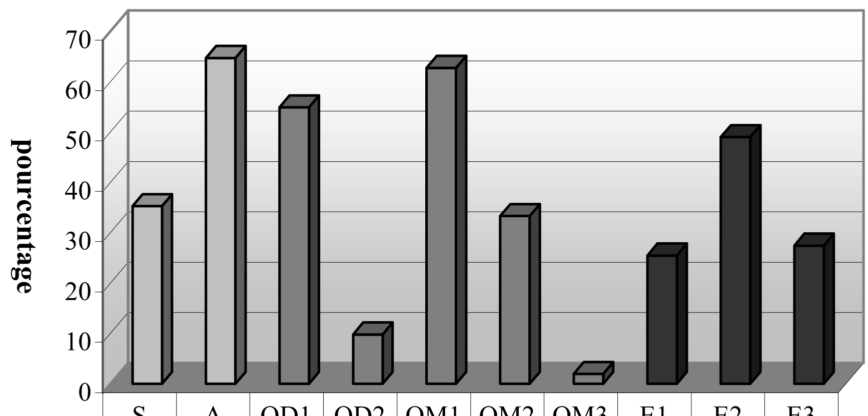
Simple ou articulé-outils disponible ou mobilisable-nombre d' étapes

La majorité des questions du concours portent sur plusieurs connaissances antérieures. Par exemple l'élève doit faire appel à des identités remarquables pour trouver l'image d'une fonction définie par une expression algébrique ou à la résolution d'un système linéaire d'équations pour définir la formule algébrique d'une fonction affine.

Il est très probable que certaines questions du concours comme la question (Q27/1989) provoquent chez les élèves une idée que l'on peut (doit) toujours trouver des démarches plus courtes.

De plus la résolution de nombre des questions même courtes nécessite plusieurs étapes pas toujours indiquées. Quand on regarde le tableau ci-dessous, on remarque que 65% des questions font mettre en fonctionnement plusieurs connaissances antérieures (A :articulée). Tandis que 35% des questions ne sont destinées qu'à mobiliser des connaissances liées directement à la notion de fonction (S :simple). Par ailleurs dans plus de la moitié des questions l'élève doit faire appel à une seule connaissance antérieure (OD1 : 1 outil disponible) . Ce taux descend à 10% dans les questions pour lesquelles il est nécessaire de disposer des deux connaissances antérieures (OD2 : 2 outils disponibles). 63% des questions demandent de mobiliser une seule connaissance liée à la notion de fonction (OM1 : 1 outil mobilisable). Dans plus du tiers des questions il s'agit des deux connaissances à mobiliser (OM2 :2 outils mobilisables). Un très petit nombre des questions conduisent l'élève à mobiliser trois connaissances liées directement à la fonction (OM3 : 3 outils mobilisables). En ce qui concerne la répartition des questions suivant le nombre des étapes, lors de la résolution de près de la moitié des questions il s'agit des deux étapes (E2 :2 étapes). 27% présentent un travail qui ait trois étapes (E3 : 3 étapes). Dans 25% des questions l'élève peut arriver à la bonne réponse en une seule étape (E1 :1 étape).

Question simple ou articulée-nombre des outils disponibles ou mobilisables présents-nombre des étapes



	S	A	OD1	OD2	OM1	OM2	OM3	E1	E2	E3
pourcentage	35	65	55	10	63	33	2	25	49	27

catégories

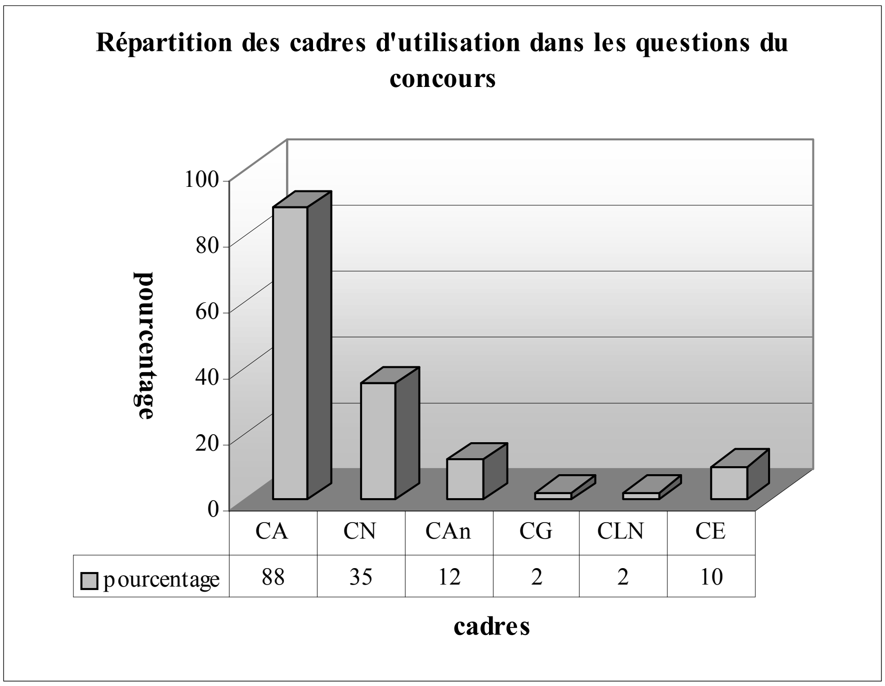
Si on compare ces résultats avec ceux de l'analyse des manuels, on constate qu'il y a en général une grande similitude. Dans tous les manuels, à part Tutibay, la plupart des exercices font utiliser plusieurs connaissances antérieures. Les manuels et le concours se rapprochent beaucoup par le taux de proposition de ce type d'exercices.

En ce qui concerne le nombre des outils mobilisables, les manuels Güvender et Tutibay se rapprochent en proposant moins d'exercices qui nécessitent de mobiliser plusieurs outils que le concours. Alors que dans les autres manuels ce type d'exercices est plus nombreux que dans le concours.

Par ailleurs les exercices des manuels comprennent aussi plusieurs étapes comme les questions du concours. A l'exception du manuel Tutibay les manuels proposent plus d'exercices à plusieurs étapes que le concours.

Cadres d'utilisations dans les questions du concours

En ce qui concerne les cadres d'utilisation dans les questions, comme le montre bien le tableau ci-dessous, le cadre majoritairement présent est le cadre algébrique (CA, 88%). Dans plus du tiers des questions le cadre numérique est un des cadres du travail (CN,35%). En regardant les taux très modestes des cadres géométrique (CG,2%) et géométrie analytique (CAn,12%) nous pouvons dire que les thèmes du concours sont géométriquement très pauvres. Dans 10% des questions l'élève doit travailler dans le cadre de la théorie élémentaire des ensembles. Tandis que le cadre de langue naturelle est aussi un des cadres peu fréquentés (CLN,2%).



Si on compare ces résultas avec ceux des manuels, on constate aussi une grande similitude. Ainsi en général dans tous les manuels le cadre algébrique est le cadre « écrasant » et son taux d'utilisation varie de 55% à 96%. Le pourcentage très faible des questions du concours dans lesquelles le cadre géométrique est utilisé n'est pris en compte que par le manuel Uğur. Ainsi à part ce manuel il n'y a aucun qui propose des exercices de ce type. On retrouve la même situation pour le cadre de la langue naturelle. Dans les manuels l'utilisation de ce cadre n'est réservé qu'au manuel Tutibay avec un taux très bas.

En ce qui concerne le cadre analytique, il est aussi un des cadres les moins utilisés dans les manuels comme dans le concours. Tutibay se distingue des autres par un taux plus élevé d'utilisation de ce cadre. Ainsi dans 22% des exercices l'élève doit mettre en fonctionnement le cadre analytique. Ce taux descend un petit peu dans le manuel Uğur. Güvender, officiel et Altın se distinguent du concours par la rare utilisation de ce cadre. Tandis que Zafer et Aydın sont les manuels les plus proches du concours dans l'utilisation du cadre analytique.

Par l'utilisation très fréquente du cadre de la théorie élémentaire des ensembles Tutibay, Altın, Aydin et Zafer se distinguent du concours. Uğur est le manuel le plus proche du concours avec un taux d'utilisation de 14%. Tandis que le manuel officiel ne propose aucun exercice dont la résolution se fait dans ce cadre.

Autonomie de l'élève dans les questions

Quant à l'autonomie de l'élève, nous constatons que dans l'ensemble des questions l'élève a une autonomie complète. On peut avoir des démarches plus ou moins économiques pour un temps limité. Il y a certaines questions qui favorisent l'apprentissage par cœur. Puisque aucun formulaire n'est autorisé[2], les candidats doivent connaître par cœur certaines propriétés et formule.

3. Conclusion

Lors de notre analyse, nous avons remarqué qu'en général il y a peu de thèmes et peu de questions différentes. Les mêmes types de questions sont proposées avec des petites modifications durant des années. De plus les questions du concours sont très courtes. Dans certaines questions on n'indique pas d'ensembles de définition des fonctions.

---

[2] Il faut rappeler qu'au concours national d'entrée à l'université aucun formulaire n'est autorisé et les candidats n'ont pas le droit d'introduire dans la salle d'examen quoique ce soit, même pas de brouillons, à part des crayons et une gomme.

Par ailleurs les questions du concours contiennent en général des applications directes du cours. Il n'y a aucune question qui fait utiliser la notion de fonction comme un outil. La plupart des questions relèvent du programme officiel du seconde. Mais l'utilisation de la bijectivité comme outil pour la démonstration de l'équipotence et les propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières sont totalement absents dans les thèmes du concours. De plus on peut aussi trouver des questions qui font utiliser des connaissances non indiquées par le programme et des connaissances relavant du programme des classes suivantes. Cela amène certains manuels ML à proposer ce type de question du concours ou ressemblantes dans les exercices résolus.

La composition des fonctions à partir de leurs formules algébriques et le calcul de l'image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique sont les thèmes les plus fréquents. Les thèmes dans les exercices résolus des manuels MPC et de certains manuels ML sont équivalents à ceux du concours. En général les manuels proposent des exercices qui demandent d'utiliser plusieurs connaissances antérieures et qui comprennent plusieurs étapes comme le concours. Et les exercices à plusieurs étapes sont plus nombreux dans les manuels.

Les cadres principaux des questions du concours sont le cadre algébrique et le cadre numérique. Nous pouvons donc dire qu'elles sont géométriquement très pauvres. Les manuels se rapprochent beaucoup du concours par l'utilisation très fréquente de ces cadres et par l'utilisation rare du cadre géométrique et du cadre analytique.

Pour toutes les questions aucune méthode n'est suggérée, laissant ainsi tous les choix à la charge des élèves.

CHAPITRE V

ANALYSE DES QUESTIONNAIRES-ENSEIGNANTS

SUR L'ENSEIGNEMENT DES FONCTIONS

Plan du chapitre V :

Afin de cerner plus précisément comment les enseignants conçoivent l'enseignement des fonctions, nous avons mis en place un questionnaire que nous avons soumis à un certain nombre d'enseignants au lycée et au dérsané. Nous disposons de six questionnaires provenant d'enseignants de lycée, de cinq questionnaires provenant d'enseignants de dérsané, d'un questionnaire de la part d'un enseignant qui a déjà travaillé au dérsané et qui travaille actuellement au lycée et de deux questionnaires provenant de deux enseignants qui ont déjà enseigné au lycée et qui enseignent actuellement au dérsané. Puisque ce n'est pas autorisé, il n'y a aucun enseignant qui travaille à la fois au lycée et au dérsané.

Chaque questionnaire comprend onze questions.

Les deux premières questions jouent un rôle préliminaire et nous apportent des informations sur le parcours de l'enseignant, particulièrement dans les classes concernées ici. La troisième question nous apporte des informations sur la relation qu'il entretient avec les programmes officiels. Ensuite, dans une troisième partie, nous avons posé cinq questions, pour cerner autant que possible l'image que l'enseignant se fait de l'enseignement de la fonction, son idée sur le degré de difficulté du chapitre, ses objectifs, les types d'erreurs et de difficultés aux quelles il s'attend. La quatrième partie, avec deux questions, concerne la façon dont il gère les contraintes liées à l'existence de l'examen final.

Nous présenterons les réponses partie par partie et ensuite nous ferons une synthèse pour chaque partie du questionnaire.

1. Parties des réponses aux questionnaires-enseignants

1.1 Première partie : expérience professionnelle des enseignants

Cette partie nous apporte des informations sur le parcours de l'enseignant. Ainsi nous avons demandé aux enseignants depuis combien d'années ils sont enseignants et depuis combien d'années ils enseignent et en quelles classes.

A partir de la durée de leur expérience, nous avons classé les enseignants interrogés en trois catégories différentes : les enseignants chevronnés (6 enseignants, durée de 21 à 26 ans), les enseignants expérimentés (4 enseignants, durée de 8 à 12 ans) et les enseignants débutants (4 enseignants, durée de 4 mois à 2 ans). Nous constatons cependant que tous les enseignants enseignent (ou ont enseigné) dans la classe qui nous concerne.

1.2 Deuxième partie : rapport des enseignants aux programmes et textes officiels

Pour cerner la relation que les enseignants entretiennent avec les programmes officiels, nous leur avons demandé s'ils avaient consulté les programmes avant de commencer l'enseignement des fonctions. La plupart des enseignants interrogés affirment qu'ils utilisent les programmes pour l'organisation de leur cours et qu'ils en dégagent des limites à donner à leur enseignement, aussi que le contenu et les objectifs du programme à enseigner.

Il y a cependant quatre enseignants qui ont répondu à cette question qu'ils ne consultent pas le programme. Deux d'entre eux disent que puisqu'ils travaillent dans un dérsané, ils ne suivent pas le programmes officiel et ils ne s'intéressent qu'aux sujets qui figurent au concours d'entrée à l'université. En ce qui concerne les deux autres qui travaillent au lycée, l'un affirme que puisque les manuels scolaires sont préparés à partir des programmes, il n'éprouve pas le besoin de les consulter. Ayant fait un plan annuel au débout de l'année scolaire, l'autre n'a pas regardé le programme avant l'enseignement des fonctions.

Par ailleurs, les deux enseignants de dérsané disent qu'ils ont consulté le programme. L'un explicite ses raisons en évoquant le fait que le sujet « fonction » est très vaste, il a encore une fois révisé les notions qui sont introduites à son propos. L'autre affirme qu'au dérsané on fait d'une part le cours pour soutenir des élèves aux cours du lycée et d'autre part les sujets du concours correspondent aussi aux programmes.

1.3 Troisième partie : image que les enseignants se font de l'enseignement de la notion de fonction

Notre objectif est ici de cerner, autant que possible, l'image que l'enseignant se fait de l'enseignement de la notion de fonction. Dans ce cadre, nous avons posé cinq questions. La première était destinée à voir comment les enseignants apprécient le chapitre correspondant à la notion de fonction. Dix enseignants considèrent le chapitre très important et quatre enseignants, important.

Il apparaît que ce chapitre semble très important aux enseignants parce que la notion de fonction est l'une des notions les plus importantes (cité par 4 enseignants) et que ce chapitre établit un lien entre plusieurs autres domaines mathématiques (cité par 6 enseignants) et d'autres disciplines (cité par 1 enseignant). Par ailleurs, pour 5 enseignants, ce chapitre est important parce qu'il permet aux élèves d'organiser leurs connaissances, d'améliorer la capacité de pensée et d'interprétation.

Nous avons choisi, parmi les réponses, les suivantes comme représentatives :

Comme la notion de fonction est l'une des notions principales de l'enseignement secondaire, ce chapitre est très important. Je pense que dans les classes suivantes les fonctions seront une base sur laquelle les élèves s'appuient. De plus dans le concours d'entré à l'université il y a des questions qui font référence aux fonctions et aux notions qui y correspondent (comme les polynomes).[1]

Très important. Il y a beaucoup de notions qui correspondent à la notion de fonction en mathématiques. La trigonométrie, le logarithme, les fonctions définies particulièrement portent sur cette notion.[2]

Très important, pour que les élèves pensent et établissent un lien entre des événements.[3]

La deuxième question de cette partie demandait aux enseignants de citer, à leur avis, les objectifs principaux de ce chapitre en termes de savoirs et de compétences des élèves. Nous constatons tout d'abord que sept enseignants parlent encore des objectifs lointains[4] du chapitre comme dans la question précédente. En ce qui concerne les autres réponses elles ne présentent pas une homogénéité relativement à ce que les enseignants attendent de leurs élèves. Nous présentons les types de compétences citées ainsi que la fréquence de leur apparition :

-La définition (ensembliste) de la notion de fonction (citée 1 fois).

-Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles (cité 3 fois).

-Trouver l'inverse des fonctions (cité 2 fois).

-Trouver la composition des fonctions (cité 1 fois).

-Reconnaître la relation entre fonction et correspondance (cité 2 fois).

-Reconnaître les propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières (cité 2 fois).

-La notion de variable (citée 2 fois).

-L'amélioration de la capacité de calcul (citée 2 fois sans précision).

---

[1] Une enseignante de dérsané qui travaille depuis un an au dérsané.
[2] Un enseignant qui travaille depuis douze ans au dérsané.
[3] Une enseignante qui travaille depuis douze ans au lycée
[4] L'amélioration de la capacité de pensée, interprétation…etc.

-L'utilisation du plan analytique (citée 1 fois).

-Résoudre toutes les questions qui concernent les fonctions au concours (cité 1 fois).

Nous voudrions citer quelques réponses qui nous paraissent intéressants ou typiques :

Dans ce chapitre j'attends d'abord des élèves qu'ils puissent reconnaître l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles, qu'ils puissent trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement et composer des fonctions.[5]

Dans l'enseignement de la notion de fonction, mon premier objectif est que dans le concours les élèves puissent résoudre toutes les questions qui font référence à cette notion. Et le deuxième objectif est d'améliorer la capacité de pensée, d'établir un lien entre des événements et d'interprétation des élèves.[6]

Dans cette partie nous avons aussi essayé d'aborder les principales erreurs et difficultés auxquelles les enseignants ont dû faire face. Nous présentons la liste des difficultés, citées par de croissance du nombre d'apparitions :

-Difficultés dues à la notion de variable (citées 1 fois).

-Difficultés dues à confondre les signes de l'inégalité (>, <) (citées 1 fois).

-Difficultés liées à la définition ensembliste de la notion de fonction (citées 1 fois).

-Difficultés liées à écrire une fonction en termes d'une autre fonction (citées 2 fois).

-Difficultés liées à la composition (ou décomposition) des fonctions (citées 2 fois).

-Des préjugés des élèves sur les fonctions (cités 2 fois).

-La première rencontre à une notion assez vaste et complexe (citée 2 fois).

-Difficultés à interpréter et à tracer la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (citées 3 fois).

-Difficultés liées à trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement (ou à partir d'ensembles) (citées 5 fois).

-Difficultés dues au calcul arithmétique (citées 5 fois).

-Difficultés dues au calcul algébrique (citées 6 fois).

Citons quelques réponses :

[5] Un enseignant de dérsané qui travaille depuis douze ans au dérsané.
[6] Un enseignant chevronné de dérsané qui a travaillé longtemps au lycée.

La capacité du calcul et de l'acquisition des élèves est insuffisante et incomplète. Ils essaient toujours d'acquérir des notions présentées à partir des exemples. Chez ceux qui n'ont pas de difficultés dues au calcul l'acquisition est courante et permanente. Je pense qu'il faut faire beaucoup d'exercices lors du cours.[7]

Le problème principal est dans les connaissances qui ont été mal assimilées lors de l'enseignement au collège. Parce qu'ils ne peuvent pas résoudre des équations, cela conduit les élèves à penser que les fonctions sont trop difficiles. A partir de là pour nous les fonctions se ramènent à la résolution d'équations simples. Par ailleurs, l'autre problème essentiel est que les élèves commencent le chapitre avec l'idée que les fonctions sont très difficiles. Il est très intéressant que le même élève dise que c'était très facile lorsqu'il a vu le même type de fonctions dans la classe de première.[8]

La question suivante de cette partie invitait les enseignants à présenter leurs points de vue sur des erreurs qui leur semblent liées aux connaissances antérieures des élèves.

La grande majorité des enseignants interrogés sont convaincus que certaines erreurs sont liées aux connaissances antérieures des élèves. Ils explicitent leurs raisons en disant que ces erreurs sont dues au manque des connaissances essentielles et la capacité du calcul algébrique ou arithmétique, concernant l'enseignement précédent (cité 12 fois). Par ailleurs, un enseignant débutant de dérsané n'accepte pas que certaines erreurs reposent sur des connaissances antérieures des élèves. Il accuse directement le désintérêt des élèves. Un enseignant chevronné de lycée affirme sans précision que ce type d'erreurs provient à la fois des élèves et du système de l'enseignement.

Voici quelques réponses représentatives :

Certaines erreurs sont dues à l'insuffisance des connaissances antérieures des élèves. Parce que certains élèves n'ont pas assez assimilé les quatre opérations, la table de multiplication, des équations simples, des identités remarquables, la représentation graphique dans un repère orthonormé, la factorisation, les nombres entiers et rationnels, les puissances et les racines.[9]

Un enseignant chevronné de lycée qui a une longe expérience au dérsané met aussi l'accent sur le niveau des élèves dans la même classe :

---

[7] Un enseignant chevronné de lycée.
[8] Une enseignante de lycée qui travaille depuis deux ans au lycée.
[9] Un enseignant chevronné de dérsané qui a travaillé longtemps au lycée.

La plupart des erreurs proviennent des connaissances mal assimilées des classes précédentes. Par ailleurs, le fait qu'il y ait des élèves en différents niveaux dans la même classe retarde l'enseignement.

La dernière question de cette partie avec laquelle nous avons essayé de mettre en évidence quelles ressources ont utilisé les enseignants interrogés pour préparer leur enseignement.

Nous constatons que la majorité écrasante utilisent à la fois des différents manuels de lycée et des manuels de préparation au concours (12 enseignants sur 14). Il y a deux enseignants qui organisent aussi le cours à partir des notes personnelles. Par ailleurs, deux enseignants de dérsané affirme qu'ils n'utilisent que des manuels de préparation au concours. Un enseignant chevronné de lycée qui a travaillé longtemps au dérsané dit qu'il prépare son cours grâce à son expérience.

Nous donnons quelques réponses typiques :

En général d'une part j'utilise le manuel de lycée en tant qu'il a été préparé à partir du programme et d'autre part j'utilise aussi des manuels de la préparation au concours en tant que le concours contient des questions pratiques à choix multiple.[10]

Lorsque je prépare le cours, je préfère les manuels qui présentent bien des points essentiels et importants du sujet et proposent beaucoup d'exercices résolus. Il n'y a pas de manuel que j'utilise régulièrement.[11]

1.4 Quatrième partie : Organisation du cours

Dans cette partie nous avons essayé d'obtenir des informations sur l'organisation du cours réservée par les enseignants au chapitre des fonctions. Ainsi la première question où nous avons demandé aux enseignants d'écrire comment ils avaient fait introduire la notion de fonction et décrire les activités éventuellement proposées.

Les réponses des enseignants présentent une grande homogénéité. Ainsi 11 enseignants nous ont écrit qu'ils font introduire les fonctions avec leur définition ensembliste et ensuite ils proposent des exemples s'inspirant de la vie courante pour faciliter la compréhension de cette définition.

Citons les réponses qui nous paraissent assez représentatives :

[10] Un enseignant chevronné de lycée.
[11] Un enseignant débutant de dérsané.

Dans les fonctions j'ai fait tout d'abord rappeler les élèves ce qui est la correspondance. Ensuite j'ai indiqué que chaque correspondance ne peut être une fonction et j'ai parlé des conditions nécessaires pour qu'une correspondance soit une fonction. A partir des exemples j'ai montré quelles correspondances sont une fonction.[12]

Une enseignante débutante de lycée répond à cette question comme la suivante :

Je passe de la correspondance à la fonction. Lorsque j'indique que chaque correspondance n'est pas une fonction, je prends l'exemple « mère-enfant ». Je dis que chaque enfant a une seule mère et il n'y a aucun enfant qui n'a pas de mère. Pour la composition des fonctions je dis que nous préparons un gâteau[13]*. Ainsi j'essaie de prendre des exemples de la vie courante. Et cela permet aux élèves de garder des règles longtemps dans l'esprit.*

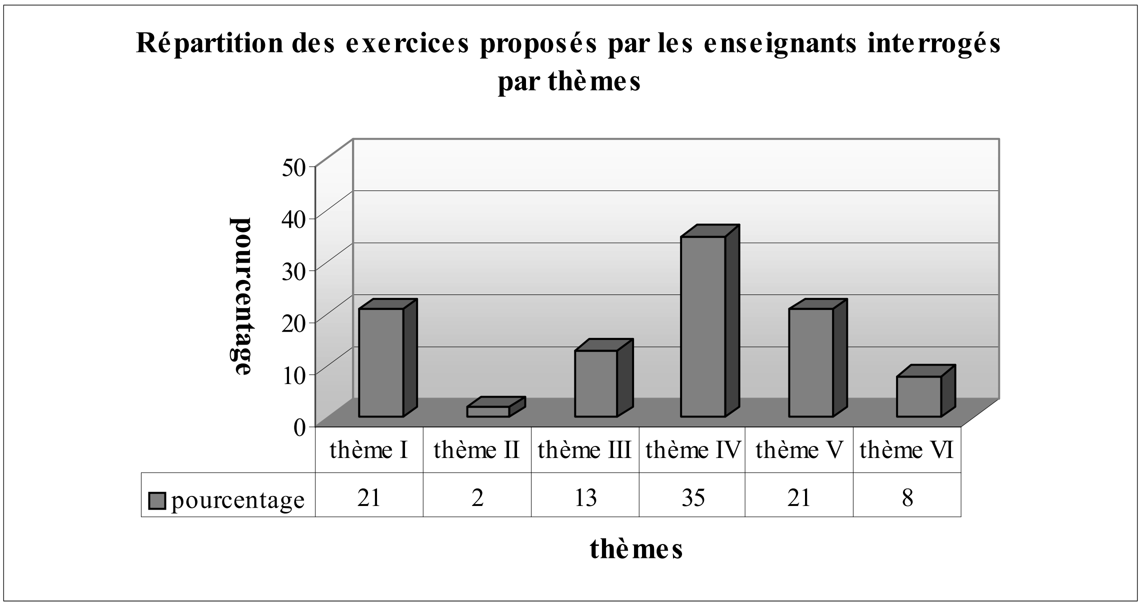
Comme la réponse d'une enseignante débutante de dérsané met très bien en évidence la différence entre l'enseignement du dérsané et celui du lycée, nous voudrions aussi la citer :

Si je travaille au lycée, je pourrais faire des activités différentes et essayer d'attirer l'attention des élèves, grâce à de différents exemples, sur le sujet. Mais au dérsané puisque nous présentons des sujets de manière plus pratique et courte, au lieu de faire des activités j'ai commencé rapidement les fonctions en donnant brièvement la définition et les propriétés particulières des fonctions.

Les deux dernières questions de cette partie (et même des questionnaires) étaient destinées à obtenir les exercices (ou activités) que les enseignants interrogés avaient proposés aux élèves en classe et qui leur semblent particulièrement représentatifs du chapitre et un exercice qu'ils avaient proposé en contrôle et qui leur semble particulièrement adapté à cet enseignement.
Nous retrouvons cinq types de thèmes principaux dans leurs réponses en ce qui concerne les exercices qui semblent aux enseignants représentatifs du chapitre : définition ensembliste de la notion de fonction (thème I), propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières (thème II), recherche de l'inverse des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles (thème III), composition des fonctions (thème IV), image d'un nombre réel ou une expression algébrique par une fonction définie algébriquement (thème V) et

[12] Un enseignant chevronné de dérsané qui a travaillé longtemps au lycée.
[13] L'enseignante l'explique dans la question suivante qui demande de citer trois exemples représentatifs. Alors nous reprendrons cet exemple lors de l'analyse de la question suivante.

représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (thème VI). Le tableau ci-dessous montre la répartition des exercices proposés par les enseignants interrogés :



1.4.1 Thème I : définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant (10 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite:

i) Utilisation de la définition ensembliste des fonctions (8 exercices) : il s'agit de travailler sur des correspondances définies algébriquement (3 exercices) ou à partir des ensembles (5 exercices). L'élève doit chercher si elles sont des fonctions. C'est l'utilisation de la définition ensembliste de la fonction (cf. la comptine $\mathbf{C_o}$).

ii) Détermination de l'ensemble de définition, de l'ensemble d'arrivée ou de l'ensemble image des fonctions (2 exercices) : dans deux exercices on demande de déterminer l'ensemble de définition d'une fonction définie algébriquement à partir de l'ensemble image. L'un des exercices propose de travailler sur une fonction linéaire et l'autre sur une fonction trinome du seconde degré. La résolution d'équations du premier degré et seconde degré paraît comme un outil disponible du travail.

1.4.2 Thème II : propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières (1 exercices).

Nous pouvons trouver un exerce qui concerne les fonctions particulières : dans un exercice[14] on demande de calculer la valeur *f(1998)* si la fonction f définie par $f(x)=(m-1)x^2+(m+n)x+m-n$ est une fonction constante. L'élève doit définir les valeurs *m* et *n*

[14] Un enseignant débutant de dérsané propose cet exemple en cours.

en sachant qu'il n'y a aucune variable dans l'expression de l'image des fonctions constantes. Alors il doit égaliser les coefficients de chaque variable x à zéro pour trouver les valeurs m et n ainsi que la fonctions f.

1.4.3 Thème III : recherche de l'inverse des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles (6 exercices).

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite:

i) Trouver l'inverse d'une fonction définie par une liste de couples (1 exercice): il s'agit de trouver l'inverse d'une fonction définie à partir d'ensembles. L'élève doit changer les places d'éléments des couples en mobilisant la définition des fonctions inverses.

ii) Trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement (5 exercices) : dans deux exercices il s'agit de trouver l'inverse d'une fonction rationnelle. L'un des exercices demande aussi de calculer l'image d'un nombre réel. L'élève peut trouver les inverses soit la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ soit la recette $\mathbf{R_a}$. Dans le troisième exercice il est nécessaire de trouver l'inverse d'une fonction affine définie sur Z. Le quatrième exercice s'inspire beaucoup d'une question du concours.[15] Comme elle n'est pas proposée sous forme habituelle, l'élève doit d'abord calculer la fonction donnée en termes de x. Ensuite il doit trouver l'inverse de la fonction et calculer l'image d'un nombre réel. Dans le dernier exercice ressemblant à une question du concours,[16] on demande aux élèves de déterminer le couple (a, b) à partir de la fonction bijective définie de IR-{2} vers IR-{4} par $f(x)=\frac{nx-8}{2x-n}$. L'élève doit prendre en compte que pour $x=2$ le dénominateur de la fonction f est nul et pour $x=4$ le dénominateur de son inverse, nul.

1.4.4 Thème IV : composition des fonctions (définies algébriquement ou à partir des ensembles) (17 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en quatre catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Composition des fonctions (6 exercices) : dans deux exercices on demande de trouver les deux types de composées d'une fonction rationnelle et une fonction du second degré (fog et gof) et de calculer la somme des images des deux nombres réels sur ces composées obtenues. Dans le troisième exercice il faut trouver les deux types de composées des deux fonctions affines. Le quatrième exercice demande de trouver la double composée d'une fonction définie par morceaux (fof) et de calculer l'image d'un nombre réel. L'élève peut calculer l'image

[15] Cet exercice est proposé par un enseignant chevronné de lycée ayant une longue expérience au dérsané.

[16] Un enseignant débutant de dérsané propose cet exercice.

demandée « fonction par fonction » sans trouver la formule générale de la composée. Dans un autre exercice il est nécessaire de trouver la composée d'une fonction du second degré et l'inverse d'une fonction rationnelle. L'élève doit trouver d'abord ce dernier et ensuite la composée. Le dernier exercice est l'une des questions du concours.[17] On amène les élèves à trouver pour quelle valeur de x on a $(g^{-1}of)\ (x)=-16$ en mobilisant les fonctions f et g définies par $f(x)=2x+1$ *et* $g(x)=\frac{2x-1}{x+5}$. L'élève doit trouver d'abord l'inverse de g et ensuite la composée ($g^{-1}of$). La résolution d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail.

ii) Décomposition implicite des fonctions (8 exercices) : il s'agit de « décomposer » implicitement[18] les fonctions à partir des formules algébriques. Dans un exercice on demande de trouver de trouver la fonction f à partir de la composée $f(\frac{2x-1}{3})=2x+5$, dans le deuxième exercice de trouver la fonction f en utilisant la composée $f(3x+5)=6x-1$. Dans le premier exercice l'élève doit d'abord trouver l'inverse de *la fonction implicite* $\frac{2x-1}{3}$ et ensuite mettre, ce qu'il a trouvé, à la place de x dans la composée. La même procédure est aussi valable pour le deuxième exercice. Dans quatre exercices il s'agit de travailler sur une fonction implicite affine et une composée affine. L'un de ces exercices demande aux élèves de trouver la fonction f et de calculer l'image d'un nombre réel. Les trois autres présentent presque le même travail. Mais ils demandent de calculer l'image d'un nombre réel par l'inverse de la fonction f. Le septième exercice invite les élèves à calculer la valeur f(x+1) à partir de la composée $f^{-1}(\frac{x+2}{3})=\frac{3x-2}{x-3}$. Il s'agit des trois étapes. L'élève doit d'abord trouver la fonction f^{-1} comme dans les exercices précédents et ensuite la fonction f et l'image de x+1. Dans le dernier exercice on demande de trouver pour quelle valeur de *a* on a $f^{-1}(a)=-2$ si $f(x+2)=3x-5$. Il s'agit des trois étapes. L'élève doit d'abord trouver la fonction f et ensuite en utilisant la définition de la fonction inverse il peut obtenir $f(-2)=a$. Enfin il ne lui reste qu'à calculer l'image de –2 pour trouver la valeur *a.*

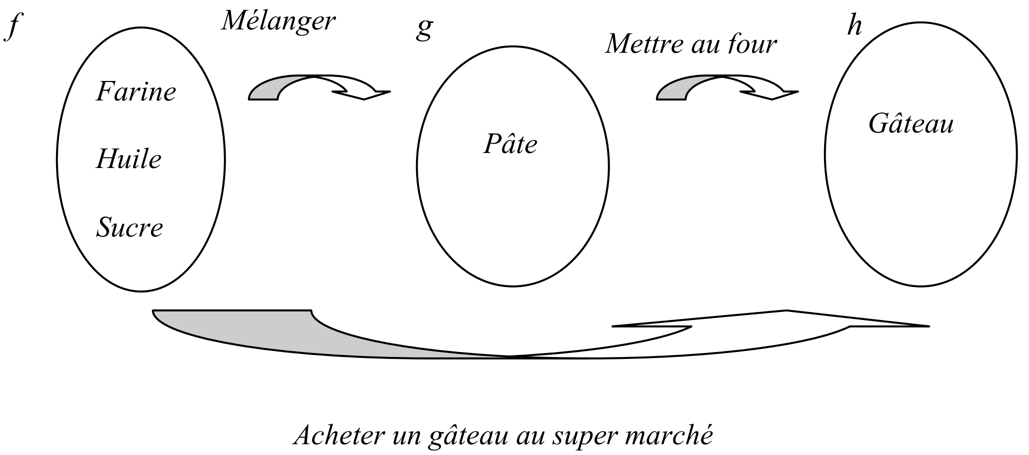
iii) Décomposition des fonctions (2 exercices) : dans deux exercices il s'agit de « décomposer » fog [ou gof] en utilisant f [ou g]. Chaque fonction qui figure dans l'énoncé sont du première degré. L'élève doit trouver d'abord l'inverse de la fonction donnée et ensuite

[17] Un enseignant chevronné de dérsané ayant une longue expérience au lycée propose cet exercice.

[18] Comme la question suivante si f(2x+1)=3x-2, trouver la fonction f. Puisque l'une des composées (2x+1) est implicitement donnée dans l'énoncé, nous appelons décomposée implicite ce type de décomposée.

l'autre fonction en utilisant la définition de la fonction identique. L'un des exercices demande aussi de calculer l'image d'un nombre réel par l'inverse de la fonction demandée.

iv) Composition des fonctions dans la vie courante (1 exercice) : une enseignante débutante de lycée prend un exemple de la vie courante pour faire introduire la composition des fonction.



Ainsi j'ai obtenu une nouvelle fonction à partir des deux fonction différentes.

1.4.5 Thème V : image d'un nombre réel ou une expression algébrique par une fonction définie algébriquement ou à partir d'ensembles (10 exercices)

Nous avons précisé deux catégories différentes pour classer les exercices selon la tâche prescrite :

i) Calcul de l'image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique par une fonction définie algébriquement ou à partir d'ensembles (7 exercices) : dans un exercice[19] on amène les élèves à calculer l'image de $8x^2$ par la fonction définie par $f(x)=\log_2 x+1$. L'élève doit mettre l'expression $8x^2$ à la place de x dans la fonction f. Le logarithme est un outil devant être disponible (ou chez les élèves de seconde il s'agit d'un outil prématuré[20]) dans ce travail. Le deuxième exercice demande de calculer la valeur $\frac{f(x-2)-f(x+2)}{f(x-1)}$ à partir de la fonction exponentielle définie par $f(x)=3^{x-2}$. L'élève est amené à trouver les images des expressions

[19] Un enseignant débutant de dérsané propose cet exercice en cours. Il n'enseigne que dans les classe de seconde. Par ailleurs, le logarithme est tout à fait dans l'esprit du programme officiel de la classe de première. Ainsi au dérsané à travers de cet exemple ces élèves-là font connaissance avec un sujet qui appartient à la classe suivante.

[20] Le mot est pris au sens de « adj. 1.Qu'il n'est pas encore temps d'entreprendre. 2. Qui arrive avant le temps normal » (*Le petit Robert*). Ainsi par un outil prématuré nous entendons qu'il s'agit d'utiliser une notion qui fait référence aux chapitres ultérieurs ou au programme des classes ultérieures.

algébriques par f. Ensuite les connaissances liées aux puissances que l'élève doit se servir sont des outils supposés disponibles dans ce travail. Dans le troisième exercice il est nécessaire de calculer la valeur *f(-5)* à partir de l'expression suivante $x.f(x)-3.f(-x)=3x+5$. L'élève doit mettre les valeurs 5 et –5 à la place de x dans l'expression. Ensuite en faisant appel à la résolution du système linéaire d'équations il doit trouver la valeur demandée. Dans le quatrième exercice où il s'agit de travailler sur une fonction exponentielle définie algébriquement, l'élève est amené à calculer la somme des images d'un nombre réel à la fois par la fonction et par son inverse. Les puissances que l'élève doit faire fonctionner sont les outils supposés disponibles dans ce travail. Un autre exercice dont le type est un des types de question du concours[21]demande aux élèves de calculer l'image d'un nombre réel en utilisant la fonction définie par $f(x)=ax+b$ et les images des deux nombres réels. Alors l'élève doit tout d'abord trouver les valeurs a et b et ensuite l'image demandée. La résolution du système linéaire d'équations s'avère un outil devant être disponible dans ce travail. Le sixième exercice demande de calculer l'image de 0 en utilisant l'expression $f(x+1)-f(x)=x$ et $f(2)=5$. l'élève doit mettre les valeurs 0 et 1 à la place de x dans l'expression. Ensuite il doit faire la résolution du système linéaire d'équations comme dans l'exercice précédent. Le dernier exercice dans lequel il s'agit de travailler sur une fonction définie à partir d'ensembles par $f=\{(1,4),(3,2),(2,5),(4,3),(5,1)\}$ demande de calculer la valeur $f(2)+f^{-1}(3)+(fof)^{-1}(1)$. L'élève doit mettre en fonctionnement la définition de la fonction inverse et de la composition.

ii) Calcul de l'image d'une expression algébrique en fonction de f(x) : dans un exercice[22] on demande de calculer *f(2x-1)* en fonction de f(x) en utilisant la fonction *f(x+5)=5x-3*. Il s'agit de quatre étapes. L'élève doit d'abord trouver la fonction f et ensuite l'image de l'expression *2x-1* par f. Après avoir calculé x en fonction de f(x) il doit le mettre dans l'image de *2x-1*. La résolution d 'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Dans un autre exercice[23] l'élève est amené à calculer l'image de *2x-1* en fonction de f(x) en utilisant la fonction f définie par $f(x)=2^{x+3}+2.^{x-1}$ L'élève doit suivre la même procédure que dans les exercices précédents. La résolution d'équations exponentielles très particulières s'avère un outil devant être disponible dans ce travail. Le troisième exercice[24] demande de calculer la valeur *f(2x-1)* en fonction de *f(x+2)* à partir de la fonction *f(x-2)= 3x+5*. La résolution de cet exercice comprend plusieurs étapes. Alors l'élève peut d'abord trouver la fonction f à partir

---

[21] Une enseignante débutante de lycée propose cet exercice en contrôle.
[22] Un enseignant chevronné de lycée propose cet exemple en cours.
[23] Idem (en contrôle).
[24] Un enseignant chevronné de lycée qui a une longue expérience au dérsané propose cet exercice en contrôle.

de la composée (implicite). En calculant les images des expressions $2x-1$ et $x+2$ par f il peut suivre la même procédure que dans les exercices précédents. Par ailleurs, l'élève peut aussi calculer les images par la fonction $f(x-2)= 3x+5$ sans trouver f. La résolution d'équations que l'élève doit se servir est un outil supposé disponible dans ce travail.

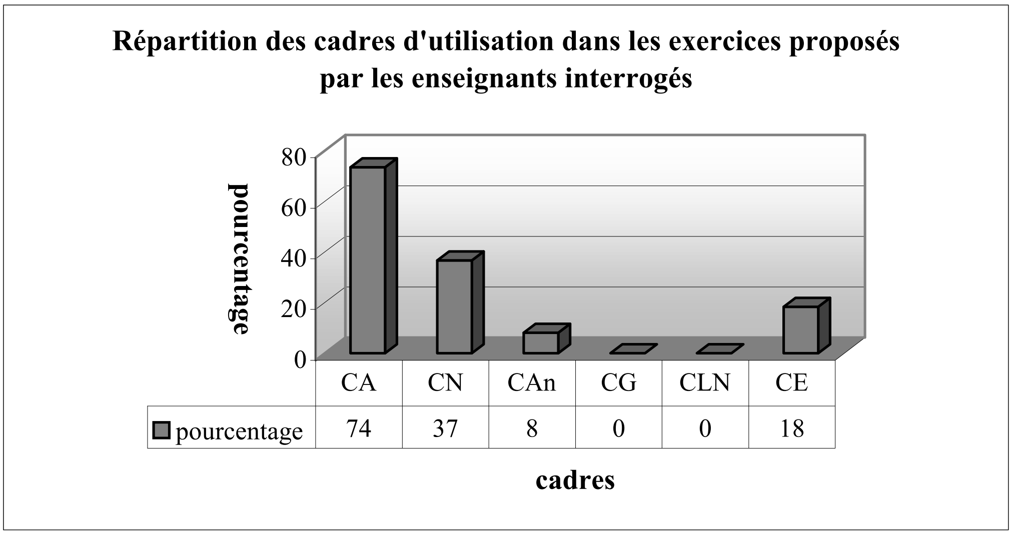
1.4.6 Thème VI : représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (4 exercices).

Nous avons classé les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite:

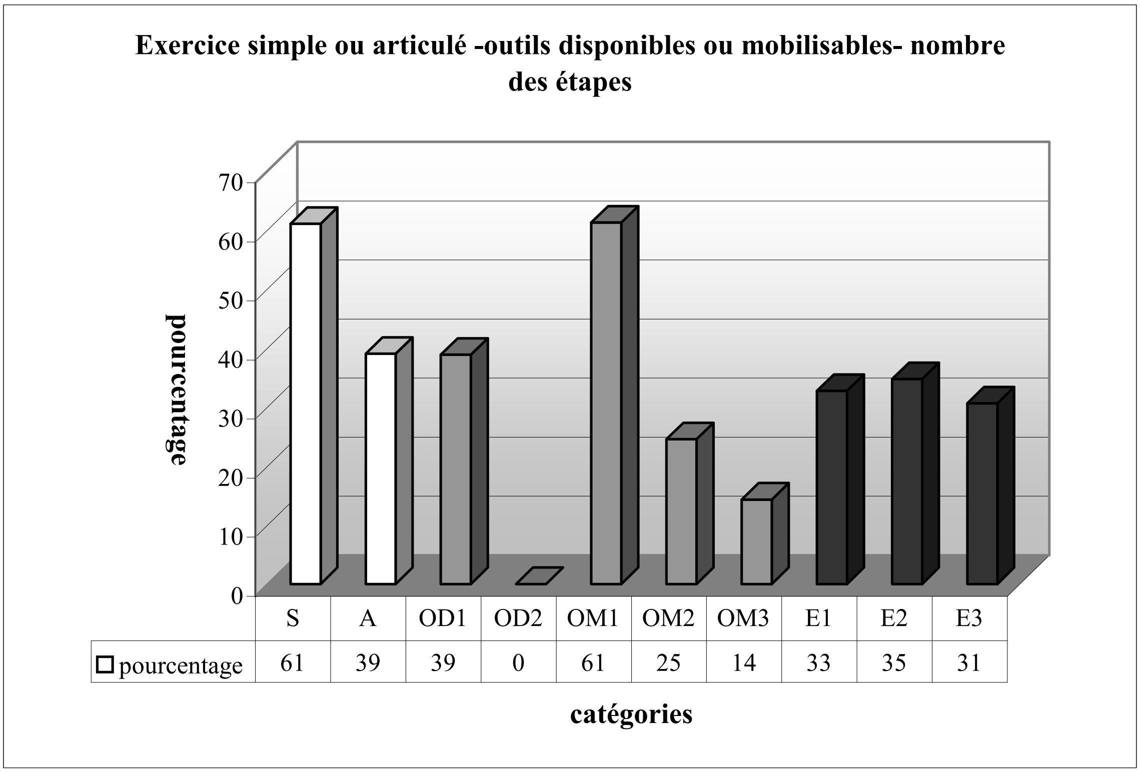
i) Déterminer graphiquement les valeurs demandées à partir de la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (3 exercices) : l'élève doit déterminer graphiquement les images en sachant qu'on repère les éléments de l'ensemble de départ sur l'axe des abscisses et ceux de l'ensemble d'arrivée sur l'axe des ordonnées. Ensuite il doit calculer la valeur $\dfrac{f(6)+\overset{-1}{f}(6)}{f(f(3))}$ pour le premier exemple, la valeur $\dfrac{f(-1)+f(5)}{\overset{-1}{f}(4)}$ pour le deuxième et la valeur $\dfrac{f(0)+\overset{-1}{f}(-3)}{\overset{-1}{f}(0)}$ pour le troisième.

ii) Représenter graphiquement des fonctions dans un repère orthonormé (1 exercice) : on invite les élèves à représenter graphiquement trois fonctions affines dans un repère orthonormé. Dans l'énoncé de l'exercice les ensembles où les fonctions sont définies ne sont pas précisés.[25] En faisant appel aux connaissances antérieures liées à la représentation graphique de la droite dans un repère orthonormé l'élève doit déterminer au moins deux points pour représenter les fonctions.

[25] En Turquie, dans le cas comme celui-ci, beaucoup d'élèves commencent généralement à tracer les représentations graphiques des fonctions en acceptant qu'elles sont définies sur |R.



En ce qui concerne les cadres d'utilisation dans les exercices, comme le montre bien le tableau ci-dessus, le cadre « écrasant » est le cadre algébrique (CA, 74%). Dans plus du tiers des questions le cadre numérique est l'un des cadres du travail (CN,37%). Par ailleurs, le cadre analytique (CAn) est peu fréquent. Tandis que le cadre géométrique (CG) et le cadre de langue naturelle (CLN) sont totalement disparus. Alors nous pouvons dire que les exercices proposés en cours ou contrôle par les enseignants interrogés sont algébriquement très riches et géométriquement très pauvres.



Nous remarquons que les exercices contiennent en général des applications directes du cours. La plupart d'entre eux relèvent du programme officiel du seconde. Mais on peut aussi trouver les exercices qui portent sur des connaissances dans le programme des classes suivantes. Plus de la moitié des exercices font référence directe à la notion de fonction ou à ses composantes (simple :S). Tandis que 39% portent sur plusieurs connaissances antérieures des élèves (articulé :A). Dans 39% des exercices l'élève doit faire appel à une seule connaissance antérieure (OD1 : 1 outil disponible) . Il n'y a aucun exercice dans lequel il est nécessaire de disposer des deux connaissances antérieures (OD2 : 2 outils disponibles).
La plupart des exercices demandent de mobiliser une connaissance qui fait référence directe aux fonctions (OM1 : 1 outil mobilisable). Tandis que dans un quart des exercices il s'agit de deux connaissances à mobiliser (OM2 :2 outils mobilisables). Un petit nombre d'entre eux conduisent l'élève à mobiliser trois ou plus de trois connaissances liées directement aux fonctions (OM3 : 3 outils mobilisables). En ce qui concerne la répartition des exercices suivant le nombre des étapes, la plupart d'entre eux présentent plusieurs étapes (66% E2 et E3). Tandis que dans un tiers des exercices l'élève peut arriver à la bonne réponse en une seule étape.

2. Synthèse

Nous présenterons pour chaque partie du questionnaire les tendance générales qui se dégagent des réponses.
Signalons toutefois qu'il convient de rester prudent par rapport à ces résultats. En effet nous n'avons pas eu l'occasion d'observer directement les pratiques effectives des enseignants et nous nous contenterons des réponses données aux questionnaires. De plus, le nombre limité d'enseignants que nous avons pu interroger ne permet pas de garantir que les résultats obtenus soient significatifs.

L'expérience professionnelle des enseignants

Les professeurs chargés de l'enseignement de la fonction, que nous avons interrogés se distinguent en trois catégories différentes par la durée de leur expérience professionnelle :débutant, expérimenté et chevronné. En ce qui concerne les établissements où les professeurs travaillent (ou ont travaillé), nous avons aussi une diversité riche :lycée, dérsané, avant lycée maintenant dérsané[26] et avant dérsané maintenant lycée. Par ailleurs, tous

[26] Certains enseignants commencent à travailler au dérsané après leur retraite.

les enseignants enseignent (ont enseigné) dans la classe concernée pendant une période qui varie de 4 mois à 22 ans.

Le rapport des enseignants aux programmes officiels

Les enseignants de lycée s'appuient sur le programme pour réaliser leur enseignement. Par contre certains enseignants de dérsané indiquent qu'ils ne l'ont jamais consulté. Et ils réalisent leur enseignement à partir des questions déjà posées au concours. Certains d'autres affirment consulter le programme en disant qu'ils font des cours qui visent à la fois à préparer les élèves au concours et les soutenir aux cours de lycée.

L'image que les enseignants se font de l'enseignement de la notion de fonction

Le chapitre sur la fonction est perçu comme important par les enseignants mais pour des raisons, semble-t-il, un peu vagues. Toutefois nous avons l'impression que l'intérêt du chapitre repose plutôt sur le fait que la notion de fonction soit un des sujets essentiels des mathématiques et elle améliore la capacité de penser et interpréter des élèves. Parmi les objectifs, nous constatons que les enseignants accordent une place importante à l'acquisition des notions de base par les élèves (la définition ensembliste des fonctions, les ensembles correspondant, l'inverse d'une fonction, la composition des fonctions…etc.).

La quasi-totalité des enseignants pense qu'à l'origine d'une grande partie des erreurs et des difficultés des élèves se trouve une assimilation insuffisante des connaissances élémentaires concernant les classes précédentes. De plus les difficultés liées à trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement sont aussi fréquemment citées par les enseignants.

Les réponses données sur la question relative aux ressources confirment que les enseignants de lycée utilisent à la fois des manuels différents de lycée et ceux de la préparation au concours. Quant à ceux qui travaillent au dérsané, certains se limitent à l'utilisation des manuels du concours et certains d'autres utilisent en plus des manuels de lycée.

Organisation du cours

Ce que nous retenons des réponses données en ce qui concerne l'introduction des fonctions, par les enseignants, c'est leur homogénéité. En mettant en évidence la différence entre correspondance et fonction les enseignants font introduire la notion de fonction avec sa définition à partir des ensembles. Ensuite ils proposent des exemples de la vie courante pour faciliter la compréhension de cette définition ensembliste.

Quand on regarde les exercices utilisés, nous remarquons qu'il n'y a aucun exercice qui fait intervenir la fonction comme un outil. Les exercices utilisés donnent en général l'impression qu'il s'agit de sujet type pour le concours. Mais, contrairement aux questions du concours, la plupart d'entre eux ne portent pas sur plusieurs connaissances antérieures des élèves.
La composition de fonctions définies algébriquement (ou à partir d'ensembles) semble très importante aux enseignants. Il y a pas mal d'exercices proposés qui concernent la définition ensembliste de la notion de fonction, l'image d'un nombre réel ou une expression algébrique par une fonction définie algébriquement et l'inverse d'une fonction définie algébriquement.
En ce qui concerne les cadres d'utilisation, les cadres principaux des exercices sont le cadre algébrique et le cadre numérique. Le fait qu'un très petit nombre des exercices mobilisent le cadre analytique et aucun exercice n'utilise le cadre géométrique nous conduit à dire que les exercices sont géométriquement très pauvres.

3. Conclusion

Selon les enseignants, la grande partie des erreurs et des difficultés des élèves proviennent d'une assimilation insuffisante des connaissances élémentaires relatives aux classes précédentes. De plus ils affirment que les élèves ont de grosses difficultés à trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement. Nous pensons que cela explique aussi le privilégie de la recette $\mathbf{R_a}$ par la plupart des enseignants. Comme il manque des connaissances élémentaires aux élèves, au lieu de faire beaucoup d'efforts pour leur faire acquérir la méthode plus mathématisée, les enseignants préfèrent la recette $\mathbf{R_a}$.
Les enseignants de lycée utilisent à la fois des manuels différents de lycée et ceux de la préparation au concours. On peut donc dire que dans leurs cours l'intérêt du concours joue un rôle important.
Conformément aux manuels, les enseignants introduisent la notion de fonction en mettant en évidence la différence entre correspondance et fonction et ils utilisent la définition ensembliste des fonctions. Cela signifie qu'il est difficile de rencontrer le sens des fonctions en termes de variable dans les pratiques des enseignants. De plus ils proposent des exemples de la vie courante à l'intention de faciliter la compréhension de cette définition ensembliste.
Les enseignants ne proposent aucun exercice, ni dans le cours ni dans les contrôles, qui fait intervenir la notion de fonction comme un outil et l'influence du concours apparaît aussi dans le choix d'exercices des enseignants. La plupart des exercices utilisés par les enseignants sont

soit des questions déjà posées au concours soit leurs ressemblantes, mais, contrairement aux questions du concours, la plupart des exercices sont simples et isolés.

Comme dans les manuels, le cadre algébrique et le cadre numérique sont les cadres principaux des exercices. Un très petit nombre des exercices demandent d'utiliser le cadre analytique et le cadre géométrique n'est jamais utilisé. On peut donc dire que les exercices utilisés par les enseignants sont géométriquement très pauvres.

CHAPITRE VI

ANALYSE DES QUESTIONNAIRES-ELEVES SUR LA NOTION DE FONCTION

Plan du chapitre VI :

1. Analyse a priori des questionnaires-élèves

Il s'agit à présent de justifier le choix des questions proposées ainsi que de prévoir quelques réponses des élèves face à celles-ci. Je n'ai cependant pas tenu compte des erreurs de calcul qui peuvent se produire lors de la résolution des exercices étant donné la grande variété de fautes qui peuvent être commises, ne retenant que les réponses « catégorisables » révélant un intérêt pour notre recherche en cours.

Je vais commencer d'abord par le questionnaire 1 :

1.1 Premier questionnaire

1.1.1 Question n°1

Il y a un groupe de dix personnes qui viennent de Mars. Ils ne connaissent rien du tout sur la notion de la fonction. Comment vous leur racontez ce qu'est une fonction ?[1]

Mon but est ici de ne pas attendre une définition mathématique des fonctions. Je voulais savoir à quoi pense l'élève quand on lui parle de fonction, c'est-à-dire quelle est la première chose qui lui vient à l'esprit à ce propos (conceptions des élèves[2]).

En posant la question dans cette forme au lieu de demander une simple définition de la fonction, je voulais donner aux élèves, en les éloignant d'une ambiance formelle ou scolaire à

---

[1] Lors de la préparation de cette question, nous nous sommes inspirés de la question suivante « Une civilisation d'une autre galaxie est venue chez nous. Ils connaissent le français et les quatre opérations :+ - * /. Ils ont demandé ce que signifiait $\sqrt{a}$. Expliquer à ces visiteurs extra terrestres la signification de $\sqrt{a}$ » , utilisée par Suzette ROUSSET-BERT dans son travail intitulé «stratégies de prise en compte de l'erreur par des enseignants de maths en liaison avec certaines de leurs représentations », *Petit x*, n°25, pp.25-58, 1990-1991.

[2] Les travaux de recherche en didactique des sciences et des mathématiques ont amplement montré que certaines réponses données par des élèves à des problèmes d'ordre scientifique pouvaient se révéler fort éloignées des modèles canoniques correspondants. (cf. Artigue et Robinet (1982) ; Robert (1982) ;Rogalski (1982) ; Vergnaud (1983)…etc.)

une ambiance quotidienne, l'idée que toutes les réponses (même un mot) étaient les bienvenues.
Voici les réponses attendues ou les diverses définitions de la notion de la fonction :

Df.1 *La fonction est un processus ou procédé de correspondance entre deux ensembles.*
Df.2 *Une fonction f d'un ensemble A dans un ensemble B est une règle de correspondance qui associe à chacun des éléments de A au plus un élément de B.*
Df.3 *Une fonction f de A dans B est un sous-ensemble du produit cartésien AxB tel que pour chaque a* $\in$ *A il y a au plus un b* $\in$*B, tel que (a, b)* $\in$ *f.*
Df.4 *« Une quantité est dite fonction d'une variable indépendante lorsque sa valeur dépend de celle que l'on attribue à cette variable. »*[3]
Df.5 *« Considérons l'égalité : y=2x+3. Le nombre variable x peut prendre diverses valeurs et, quelle que soit la valeur donnée à x, nous saurons calculer la valeur correspondante de y. Nous dirons encore que y est une fonction de la variable x. »....*[4]
Df.6 *« Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que la valeur de l'une d'elles étant donnée on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable. »*[5]
Df.7 *« Des quantités dépendent des autres de manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi. »*[6]
Df.8 *« une fonction d'une grandeur variable est une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes. »*[7]

En plus de ces définitions citées ci-dessus, je veux aussi donner quelques réponses a priori possibles hors définition de la fonction :
Df.9 *La fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnu.*
Comptine C_o *: « Pour qu'une correspondance puisse être une fonction, il faut qu'aucun élément de l'ensemble de définition ne soit vacant et qu'un élément de l'ensemble de définition ait une seule image dans l'ensemble d'arrivée. »*

---
[3] Cours d'algèbre élémentaire, FEC, Mtl, 1961, p.159.
[4] Mathématiques, Hachette, 1939, p.315.
[5] La définition de Cauchy (1821) C. Phili.
[6] La definition d'Euler (1755), Youschkevitch, 1976, p. 61.
[7] La définition de Bernouilli (1667-1748), Cantor, 1896, p.23.

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
Df.1	-	-	-	-	-	-	-
Df.2	+	+	+	+	+	+	+
Df.3	+	+	+	+	-	+	+
Df.4	-	-	-	-	-	-	-
Df.5	-	-	-	-	-	-	-
Df.6	-	-	-	-	-	-	-
Df.7	-	-	-	-	-	-	-
Df.8	-	-	-	-	-	-	-
Df.9	-	-	-	-	-	-	-
Comptine C_o	+	+	+	implicite	+	+	+

Comme nous l'avons déjà vu dans de l'analyse des manuels, tous les manuels introduisent la notion de fonction avec sa définition ensembliste. Nous ne trouvons ainsi aucune définition en terme de variable. Mais dans les manuels Tutibay et Zafer on parle cependant très brièvement du sens des fonctions à ce terme lors de l'introduction de la notation y=f(x) (x est variable indépendante et y variable dépendante). Par ailleurs, dans tous les manuels, à part Güvender, la définition Df.3 paraît comme l'écriture symbolique de la définition Df.2. A l'exception du manuel officiel qui la propose implicitement dans des exemples, la comptine $\mathbf{C_o}$ figure, soit comme une remarque soit comme mise en garde, dans tous les manuels.
Le fait que dans les manuels la seule définition qui existe soit la définition ensembliste et que la comptine $\mathbf{C_o}$ soit proposée par la grande majorité des manuels me conduit à penser que la plupart des élèves auront tendance à les donner.

1.1.2 Question n°2

Trouver l'ensemble d'arrivée de la fonction f si $f: A \to B$, *et* $A=\{0,1,2,3\}$, $f(x)=2x+4$.

Il s'agit de travailler sur une question simple et isolée. Je me suis ici intéressé à la reconnaissance de l'ensemble image d'une fonction définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. Grâce à cette question je pense à vérifier que tous les élèves ont le niveau technique et que les connaissances essentielles comme celles-ci (ou indiquées par le programme) sont disponibles chez tous les élèves. L'élève doit mettre tous les éléments de l'ensemble de définition A à la place de x dans la fonction f pour trouver l'ensemble image.
Je décris les réponses attendues par la suite :

P1. $f(0) = 2 . 0 + 4 = 4$

$f(1) = 2 . 1 + 4 = 6$

$f(2) = 2 . 2 + 4 = 8$

$f(3) = 2 . 3 + 4 = 10$ *donc* $B=\{4, 6, 8, 10\}$

P2.*On peut confondre l'ensemble de définition avec l'ensemble image.*

$2x + 4 = 0$ *donc* $x = -2$

$2x + 4 = 1 \ldots x = \frac{-3}{2}$

…………………..

$2x + 4 = 3$ *donc* $x = \frac{-1}{2}$ *alors* $B=\{-2, \frac{-3}{2}, -1, \frac{-1}{2}\}$

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P1	+	+	+	+	+	+	+

Nous pouvons constater la première procédure correcte dans tous les manuels.

1.1.3 Question n°3

Trouver la fonction f^{-1} *si* $f: R \rightarrow R$, $f(x)=\frac{3x+7}{2}$.

En Turque ; « il y a un proverbe : « parle-moi de ton ami, ainsi que je te dirai qui tu es ». Cela signifie que tout le monde représente plus ou moins les comportements de son ami. On peut avoir des idées sur quelqu'un en regardant ses amis. Ainsi dans cette question je m'appuie sur ce proverbe et je dis que « parle-moi de la méthode que tu utilises pour trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement je te dirai de quel type d'enseignement il s'agit ».

Ainsi cette question est l'une des questions qui pouvait confirmer mes hypothèses sur la mentalité utilitaire et les mauvais effets de l'enseignement de dérsané (ou plutôt de l'enseignement très proche du concours). Le but de la question est de vérifier que les élèves peuvent trouver l'inverse d'une fonction définie algébriquement et d'étudier quelles méthodes sont utilisées par les élèves : la recette $\mathbf{R_a}$ ou la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Je pensais que dans les classes (ou les lycées) où l'enseignement des mathématiques est très proche du concours (comme le lycée Anatolien et le lycée Super) la recette $\mathbf{R_a}$ est majoritairement utilisée.

Comme nous l'avons déjà vu dans l'analyse des manuels, surtout les manuels MPC essaient d'attirer l'attention des élèves sur des erreurs fréquemment possibles à commettre lors de l'utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$. Puisque cette question est l'une des questions de ce type (parce

qu'il manque aux élèves le troisième élément dans le dénominateur), je me demandais si l'utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ poserait beaucoup de problèmes chez les élèves en difficulté.
Je présente maintenant les différentes procédures de résolution que l'on peut raisonnablement attendre de la part des élèves pour trouver l'inverse de la fonction f :

P1. *On peut trouver l'inverse de la fonction f en utilisant la méthode* $\boldsymbol{M_{xfy}}$ *:*

Soit x et y tels que f(x)=y donc $y=\frac{3x+7}{2}$, $2y=3x+7$, $2y-7=3x$..... $x=\frac{2y-7}{3}$ *donc pour tout x* $f^{-1}(x)=\frac{2x-7}{3}$.

P2. *L'élève peut trouver l'inverse de la fonction f en utilisant la recette* $\boldsymbol{R_a}$ *:*

Si f(x) = ax+b, $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$ *alors* $f^{-1}(x)=\frac{2x-7}{3}$.

P3. *On peut la trouver en utilisant la recette* $\boldsymbol{R_a}$ *:*

$f(x)=\frac{3x+7}{2}$, *on pense qu'il faut un zéro devant x dans le dénominateur* $f(x)=\frac{3x+7}{0x+2}$. *Et puis on change les places de 2 et 3 avec leurs signes. On obtient la bonne réponse* $f^{-1}(x)=\frac{-2x+7}{-3}$ …….$f^{-1}(x)=\frac{2x-7}{3}$.

P4. *On peut changer les places de 3 et 2 avec leurs signes et trouver la bonne réponse:*

$f^{-1}(x)=\frac{-2x+7}{-3}$ ….$f^{-1}(x)=\frac{2x-7}{3}$.

P5. *Comme la fonction f n'est pas inversible, on ne peut pas trouver l'inverse de la fonction f. Alors elle n'existe pas.*

	Tutibay	**Altın**	**Aydın**	**Officiel**	**Güvender**	**Uğur**	**Zafer**
P1 (méthode $\mathbf{M_{xfy}}$)	+	+	+	+	+	+	+
P2 (recette $\mathbf{R_a}$)	-	-	+	+	+	+	+

Le tableau ci-dessus montre qu'à part les manuels Tutibay et Altın dans lesquels il n'y a aucun exercice qui fait trouver l'inverse de ce type de fonctions en utilisant la recette $\mathbf{R_a}$, dans tous les manuels on peut trouver les deux méthodes.

1.1.4 Question n°4

Trouver la fonction fog si f : |R→|R est définie pour tout x de |R par f(x)=2x+1 et g :|R→|R est définie pour tout x de |R par g(x)=x+6.

Dans cette question il s'agit de l'application directe de la définition de la composition des fonctions. Je voulais vérifier que les élèves peuvent composer les deux fonctions affines. Comme l'application de la définition de la composition met en jeu deux cadres : le cadre algébrique et le cadre fonctionnel, à l'occasion de cette question je pensais étudier si les élèves auraient des difficultés à passer d'un domaine familier (cadre algébrique) à un autre non familier (cadre fonctionnel).

Ce type de question est très habituel pour tous les élèves. Donc je pense que le taux de réussite sera assez élevé.

Je donne les réponses attendues ci-dessous :

P1. *Pour tout x, fog (x)= f[g(x)]=2[g(x)]+1=2(x+6)+1=2x+12+1=2x+13*

P2. *On peut trouver la fonction « g rond f » au lieu de « f rond g » :*

fog (x)= f[g(x)]= (2x+1) +6=2x+7.

P3. *L'opérateur de la composée se devient celui de l'addition ou la soustraction :*

fog(x)=(2x+1)+(x+6)=3x+7…………fog(x)=(2x+1)-(x+6)=2x+1-x-6=x-5.

P4. *On peut trouver la fonction g sans prendre en compte le coefficient de x dans la fonction f :*

fog(x)=f[g(x)]=2x+6+1=2x+7.

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P1	+	+	+	+	+	+	+

Dans tous les manuels nous trouvons la procédure correcte P1.

1.1.5 Question n°5

Trouver la fonction f si fog est définie par fog(x)=6x+4 et g(x)=2x+1.

Cette question était destinée à vérifier que les élèves pouvaient « décomposer » une fonction fog [ou gof] en utilisant g [ou f]. Nous sommes face à une tâche inverse de celle de la question précédente. La reconnaissance de la fonction inverse et celle de la fonction composée sont mise en jeu. Il est aussi bien entendu nécessaire de connaître la définition de la fonction identique ($go\,g^{-1}=I$). D'abord l'élève doit trouver l'inverse de la fonction *g* et puis la composer avec la fonction $f\ o\ g$. De plus je pensais aussi que la décomposition des fonctions était plus difficile que la composition des fonctions pour les élèves. Grâce à cette question et la question précédente je pourrai vérifier si cette hypothèse est valable. La principale erreur que j'attendais dans toutes les classes de seconde consistait à trouver la fonction *« g^{-1} o f og » à la place de f (cf. la procédure P5).*

J'attends donc les réponses :

P1. *On peut trouver d'abord l'inverse de la fonction g. Ensuite on peut composer l'inverse de la fonction g et la fonction fog :*

$g(x)=2x+1,\ y=2x+1 \ldots x=\frac{y-1}{2}$ *donc* $g^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$

$(fog)og^{-1}(x)=(6x+4)\ o(\frac{x-1}{2}) \ldots fo(gog^{-1})(x)=6(\frac{x-1}{2})+4 \ldots foI(x)=3x-3+4$ *alors* $f(x)=3x+1$.

P2. *Soit* $\exists\, m,\ n\in IR$, *pour tout x tels que* $f(x)=mx+n$ *donc*

$fog(x)=m(2x+1)+n=2mx+m+n,\quad 2mx+m+n=6x+4$. *En utilisant l'égalité des polynomes on peut trouver les valeurs m et n ainsi que la fonction f.*

$2m=6 \Rightarrow m=3,\quad m+n=4 \Rightarrow n=1,\quad f(x)=3x+1$

P3. *L'élève peut écrire la fonction g dans la composée pour obtenir une composée (implicite).*

$fog(x)=6x+4,\ f(g(x))=6x+4,\ f(2x+1)=6x+4$. *Il faut trouver l'inverse de 2x+1 et ensuite la mettre à la place de x dans la composée (implicite).*

$y=2x+1 \Rightarrow y-1=2x \Rightarrow x=\frac{y-1}{2}$ *(ou en utilisant la recette* $\boldsymbol{R_a}$ *:* $\frac{x-1}{2}$*)*

$f(2.\frac{x-1}{2}+1)=6.\frac{x-1}{2}+4 \Rightarrow f(x)=3x+1$.

P4. *On peut penser que la composée de la fonction f et g n'est pas déjà effectuée et qu'il s'agit d'une mission inaccomplie. On peut composer la fonction g encore une fois avec la fonction « f o g ». Donc on obtient la fonction « fogog »*

$fog\ (x)=6x+4,\ f[g(x)]=6x+4,\ f(x)=6g(x)+4=6(2x+1)+4=12x+6+4=12x+10$.

P5. *On peut trouver l'inverse de la fonction g mais on peut mettre à gauche de la fonction fog. Donc on obtient la fonction « g^{-1} o f og ».*

$g(x)=2x+1,\ y=2x+1 \ldots x=\frac{y-1}{2}$ *donc* $g^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$

$g^{-1}o(fog)=(\frac{x-1}{2})\ o(6x+4) \ldots f(x)=\frac{6x+4-1}{2} \ldots f(x)=\frac{6x+3}{2}$.

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P1	+	+	+	+	+	+	+
P2	-	-	-	-	-	-	-
P3	-	+	-	+	-	-	-

Selon le tableau ci-dessus, les manuels se rapprochent par le privilège de la procédure P1 et par l'absence totale de la procédure P2. Altın et officiel sont les deux manuels qui font aussi fonctionner la procédure P3 dans ce type d'exercices. Par ailleurs, les procédures P2 et P3 sont totalement absentes dans les manuels MPC.

1.1.6 Question n°6

Trouver l'image de 2 par f^{-1} si $f : \mathbb{R}-\{\frac{2}{3}\} \rightarrow \mathbb{R}-\{\frac{2}{3}\}$, $f(x)=\frac{2x+6}{3x-2}$ et $2 \in D_g{}^{-1}$.

Cette question rejoint la question n°3 dans le sens où l'élève est conduit à trouver la fonction inverse d'une fonction définie algébriquement. Ainsi je voulais étudier si les élèves pouvaient trouver l'inverse d'une fonction rationnelle et quelles méthodes sont-elles privilégiées. Comme la recette $\mathbf{R_a}$ est plus utilisée et moins risquée des erreurs pour des fonctions rationnelles, je pensais que cette question allait inciter plus les élèves à l'utiliser que la question n°3. J'attends quand même que la plupart des élèves ne soient pas très à l'aise lors de l'utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ à cause de l'égalité de la fonction et son inverse ($\forall x$ $f(x)=f^{-1}(x)=\frac{2x+6}{3x-2}$). Il me semble qu'ils auraient un air étonné comme s'ils n'avaient rien fait. Dans la deuxième partie de la question on demande de calculer l'image de 2 par la fonction inverse de f.

Je décris les différentes procédures de résolution attendues par la suite :

P1. *On peut trouver l'inverse de f en utilisant la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Ensuite on trouve l'image de 2 par f^{-1}:*

$f(x)=\frac{2x+6}{3x-2}$ *soit y= f(x),* $y=\frac{2x+6}{3x-2}$, *y.(3x-2)=2x+6.... x=*$\frac{2y+6}{3y-2}$

alors $f^{-1}(x)=\frac{2x+6}{3x-2}$ …… .$f^{-1}(2)=\frac{2.2+6}{3.2-2}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$.

P2. *On peut trouver l'inverse en utilisant la recette $\mathbf{R_a}$ et puis on peut trouver l'image de 2.*

$f^{-1}(x)=\frac{2x+6}{3x-2}$ *donc* $f^{-1}(2)=\frac{2.2+6}{3.2-2}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$.

P3. *Comme la fonction f est égale à son inverse ($f=f^{-1}$), on peut trouver directement l'image de 2 par la fonction f :*

$$f(x)=\frac{2x+6}{3x-2}\ \ldots\ldots f^{-1}(2)=\frac{2.2+6}{3.2-2}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}\ .$$

P4.*On peut trouver en utilisant la définition de la fonction inverse l'image de 2 par f^{-1} sans trouver la fonction f^{-1}:*

$f^{-1}(2)=x$ *donc* $2=f(x)$*....* $2=\frac{2x+6}{3x-2}$, $2(3x-2)=2x+6$*....*$x=\frac{5}{2}$ *alors* $f^{-1}(2)=\frac{5}{2}$.

P5. *Comme la fonction f n'est pas inversible, on ne peut pas trouver son inverse ainsi que l'image demandée.*

	Tutibay	**Altın**	**Aydın**	**Officiel**	**Güvender**	**Uğur**	**Zafer**
P1 (méthode $\mathbf{M_{xfy}}$)	+	-	-	+	-	+	+
P2 (recette $\mathbf{R_a}$)	+	-	+	+	+	+	+

Les manuels Zafer et Uğur se contentent de traiter un seul exercice en utilisant la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Dans le manuel Altın il n'y a aucun exercice qui demande de trouver l'inverse d'une fonction rationnelle. Tandis que le manuel Aydın fait utiliser la recette $\mathbf{R_a}$ lors de trouver l'inverse de toutes les fonctions rationnelles. A part le manuel Altın dans tous les manuels figure la recette $\mathbf{R_a}$.

1.1.7 Question n°7

Soit $f{:}A\rightarrow B$, *est définie par* $f(x)=2x^2+6$ *et* $A=\{-1,0,1,2,3\}$. *Pour avoir une fonction injective quel élément on doit supprimer de l'ensemble de définition A ?*

Cette question se rapproche un peu de la question 2 dans la mesure où les élèves sont amenés à trouver l'ensemble image. Ainsi en proposant cette question je voulais étudier si les élèves reconnaîtraient l'une des propriétés particulières des fonctions : injectivité. Bien que l'ensemble B soit un peu flou dans l'énoncé da la question, (il fallait peut-être l'ensemble IR au lieu de B) , les élèves semblent avoir bien compris ce qu'on leur voulait. Je me demandais cependant lequel entre 1 et –1 les élèves auraient tendance à supprimer.

Je pense que dans la première partie le taux de réussite sera assez élevé, mais qu'à cause de l'injectivité il va diminuer.

En voici les résolutions possibles de la part des élèves :

P1. *On peut trouver l'ensemble image par la fonction f. Comme les images de 1 et –1 sont identiques, on peut éliminer l'un d'entre eux de l'ensemble de définition :*

$f(x)=2x^2+6$

$f(-1)=2(-1)^2+6=2.1+6=8$

$f(0)=2(0)^2+6=0+6=6$

$f(1)=2(1)^2+6=2+6=8$

$f(2)=2(2)^2+6=8+6=14$

$f(3)=2(3)^2+6=18+6=24$

L'image de 1 et –1 sont identique $f(1)=f(-1)=8$ *donc il faut éliminer 1 ou -1*

P2. *Si* $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$*, pour tout* $x_1, x_2 \in A$*, f est injective.*

$-1 \neq 1$ *mais* $f(-1)=f(1)=8$ *donc il faut sortir soit 1 ou soit –1 de l'ensemble de définition.*

P3. *Si* $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ *pour tout* $x_1, x_2 \in A$*, f est injective.*

$f(-1)=f(1)=8$ *mais* $-1 \neq 1$ *donc il faut enlever soit 1 ou soit –1 de l'ensemble de définition.*

P4. *Si* $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ *pour tout* $x_1, x_2 \in A$*, f est injective.*

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 \neq x_2^2 \Rightarrow 2x_1^2 \neq 2x_2^2 \Rightarrow 2x_1^2+6 \neq 2x_2^2+6$

$-1, 1 \in A$ *et* $-1 \neq 1$ *mais* $f(-1)=f(1)$ *donc f n'est pas injective.*

P5. $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2x_1^2+6=2x_2^2+6 \Rightarrow 2x_1^2=2x_2^2 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow |x_1|=|x_2| \Rightarrow x_1=x_2$ *ou* $x_1=-x_2$

$f(-1)=f(1)=8$ *et puis* $-1 \neq 1$ *ou* $-1=-(1)$ *alors la fonction f est injective.*

	Tutibay	**Altın**	**Aydın**	**Officiel**	**Güvender**	**Uğur**	**Zafer**
P1	-	+	+	-	-	-	+
P2	-	+	+	-	-	-	+
P3	-	+	+	-	-	-	+
P4	+	+	-	+	-	-	-
P5	-	+	-	+	+	+	+

Dans le manuel Tutibay il y a des exercices qui font chercher l'injectivité des fonctions définies sur IR ou Q ou Z. Et on n'utilise que la procédure P4. Tandis que dans le manuel Altın il y a toutes les procédures. Les manuels Güvender et Uğur ne proposent pas les exercices dans lesquels il faut chercher l'injectivité des fonctions définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z comme les manuels Tutibay et officiel. Dans les manuels Zafer et Uğur ne figure ni dans le cours ni dans les exercices le deuxième cas de l'injectivité (procédure P4). Tandis que Güvender illustre la définition des fonctions injectives avec ces deux cas (P4 et P5). Mais il ne fait utiliser que la procédure P5 dans les exercices.

1.2 Deuxième questionnaire

1.2.1 Question n°1

Si on définit la fonction f comme la suivante « f est une fonction qui fait correspondre à chaque nombre positif entier la somme de ce nombre et son inverse, écrire cette fonction et l'image de 1/2 par f.

Il s'agit ici de travailler sur une question définie en langue naturelle. Grâce à cette question je voulais vérifier si les élèves peuvent passer d'une écriture à l'autre. Comme les connaissances portant sur l'inverse des nombres positifs réels dont l'élève doit se servir sont des outils supposés disponibles dans ce travail, je voulais étudier ce que les élèves pourraient mettre en fonctionnement de ces connaissances antérieures et les adapter à ce nouveau domaine (fonctionnel). J'ai développé cette question à partir de la question du concours (Q45/1998) dans laquelle on ne demande pas de calculer l'image d'un nombre. Sans remarquer que la fonction f est définie dans l'ensemble des nombres entiers, j'avais proposé aux élèves de calculer l'image d'un nombre rationnel. Grâce à cette erreur, je pense que j'aurai aussi l'occasion de constater le phénomène de « l'âge du capitaine[8] » dans des réponses des élèves.

Comme les élèves n'ont pas de l'habitude de penser, écrire ou dire autrement dans un automatisme provoqué par notre système, je me demandais si un petit changement des cadres ou écritures comme dans cette question faisait chuter le taux de réussite.

Je décris les réponses attendues par la suite :

***P1.** On peut écrire algébriquement la fonction f de la manière suivante :*

[8] C'est le titre donné par S.Baruk à l'un des ouvrages, en référence à l'expérience célèbre de l'institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques (IREM) de Grenoble. On a proposé à des élèves de CE_1 et CE_2 le problème suivant :
« Sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine ? ». Parmi les 97 élèves, 76 ont donné l'âge du capitaine en utilisant les nombres de l'énoncé, répondant ainsi de manière absurde à un énoncé absurde. En situation de classe de mathématiques, même si, au fond, les élèves sont troublés par la question, ils font des opérations pour répondre :il doit y avoir une réponse puisque le maître a posé le problème ! C'est une des manifestations du contrat didactique (cf. Brousseau G.(1983b)). En dehors de la classe, ils expriment cependant des doutes.

$f(x)= x+\frac{1}{x}$. Ensuite comme $\frac{1}{2}$ n'est pas un nombre entier, on ne peut pas calculer son image par f.

***P2.** On peut écrire algébriquement la fonction f et ensuite calculer l'image demandée :*

$f(x)= x+\frac{1}{x}$ *donc* $f(1/2)= \frac{1}{2}+ \frac{1}{\frac{1}{2}}= \frac{1}{2}+ 2 = \frac{5}{2}$

***P3.** On peut aussi trouver l'image de 1/2 sans écrire algébriquement la fonction f :*

$\frac{1}{2}+ 2 = \frac{4+1}{2}= \frac{5}{2}$

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P	+	+	+	-	-	-	-

Le tableau ci-dessus montre la proposition de ce type d'exercices, où il s'agit de l'articulation entre différentes écritures, par manuel. Dans deux exercices le manuel Tutibay fait utiliser les deux écritures : écriture de la langue naturelle et écriture algébrique. Tandis que dans certains exercices Aydın amène les élèves à trouver la formule algébrique des fonctions définies par les diagrammes sagittaux. Dans le manuel Altın il y a un seul exercice dans lequel une fonction est définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z de la manière suivante : «la fonction f fait correspondre à chaque élément de l'ensemble de définition le reste de la division de cet élément par 5 ». En ce qui concerne les manuels MPC, malgré l'existence d'une question du concours à ce propos, ils ne proposent aucun exercice dans lequel l'articulation de ces deux écritures soit utilisée.

1.2.2 Question n°2

Trouver l'image de 0 par f si pour tout x $f(2x+3)=3x+2$.

Comme nous l'avons déjà vu lors de l'analyse des thèmes du concours et des manuels, ce type de question est l'un des types plus fréquents de questions du concours. De plus tous les manuels MPC et certains manuels ML privilégient beaucoup ce type de composée au détriment de la composée normale (cf. la question n°5 du premier questionnaire). C'est pourquoi je pensais que cette question me permettrait aussi de vérifier l'influence du concours ou l'enseignement très proche du concours selon les classes (ou les lycées). Puisque dans le lycée Anatolien ce type d'enseignement est très remarquable et les élèves qui fréquentent les dérsanés sont plus nombreux, j'ai fait l'hypothèse que chez les élèves de ce lycée le taux de réussite à cette question est plus élevé que chez ceux des lycées Super et Normal. L'erreur principale que j'attends consiste à mettre la fonction (implicite) 2x+3 à la place de x dans la composée (implicite) 3x+2 en supposant que la composée n'est pas déjà faite. J'appelle ce type d'erreurs « erreur de mission inaccomplie ».

J'ai regroupé les réponses attendues des élèves comme il suit :

P1. $f(2x+3)=3x+2$

Soit g(x)=2x+3 donc f(g(x))=3x+2, fog(x)=3x+2

On peut trouver la fonction inverse de g en utilisant la méthode $\boldsymbol{M_{xfy}}$ *:*

$g(x)=2x+3$, $y=g(x)$… $y=2x+3$, $y-3=2x$….$x=\frac{y-3}{2}$ *alors* $g^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$

$(fog)og^{-1}(x)=(3x+2)o(\frac{x-3}{2})$…..$foI(x)=3(\frac{x-3}{2})+2$, $f(x)=\frac{3x-9+4}{2}=\frac{3x-5}{2}$

Maintenant on peut trouver l'image de 0 par f : $f(0)=\frac{3.0-5}{2}=\frac{-5}{2}$.

P2. *On peut trouver l'inverse de 2x+3 en utilisant la recette* $\boldsymbol{R_a}$ *et ensuite la mettre à la place de x dans la composée (implicite).*

$f(2x+3)=3x+2$

$y=\frac{x-3}{2}$ *et puis on la met à place de x dans la composée (implicite)* $f(2.\frac{x-3}{2}+3)=3.\frac{x-3}{2}+2$

$f(x)=\frac{3x-5}{2}$ *enfin on peut calculer l'image demandée* $f(0)=\frac{3.0-5}{2}=\frac{-5}{2}$.

P3. *On peut trouver le nombre qui égalise 2x+3 à zéro :*

$f(2x+3)=3x+2$ …. $2x+3=0$, $x=\frac{-3}{2}$ *donc on peut trouver l'image de 0 par f*

$f(2\frac{-3}{2}+3)=3\frac{-3}{2}+2$ … $f(0)=\frac{-5}{2}$

P4. *On peut penser que l'opération n'est pas déjà effectuée :* $f(2x+3)=3x+2$

f(x)=3(2x+3)+2=6x+9+2=6x+11 enfin on peut trouver l'image de 0

f(0)=6.0+11=11.

	Tutibay	**Altın**	**Aydın**	**Officiel**	**Güvender**	**Uğur**	**Zafer**
P1	-	+	-	-	-	-	-
P2	+	-	+	+	+	+	+
P3	-	-	+	+	+	+	+

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, à part Tutibay et Altın, tous les manuels se rapprochent beaucoup par la mise en place des procédures. Ainsi dans ces manuels figurent les procédures P2 et P3. Tandis que la procédure P1 est totalement absente. Dans deux exercices Altın fait utiliser P1 en amenant les élèves à obtenir une composée implicite lorsqu'il s'agit de travailler sur une composée normale. Le manuel Tutibay ne propose aucun exercice qui fait fonctionner les procédures P1 et P3. Mais il y a cependant un seul exercice dans lequel P2 est privilégiée.

1.2.3 Question n°3

Trouver $f(x)$ dans les conditions convenables si $f(\frac{x+1}{x-2}) = \frac{x-2}{x+1}$.

Cette question rejoint la précédente dans le sens où il s'agit de travailler sur une composée (implicite). Ainsi toutes les hypothèses que j'ai déjà faites sont aussi valables. Comme les lycées dans lesquels nous avons passé ces questionnaires se différencient par le niveau des élèves et par le nombre des élèves qui fréquentent les dérsanés, j'attends qu'ils se distinguent aussi par le taux de réussite et par les types d'erreurs commises par les élèves. Par ailleurs je pense qu'ici l'apparition des fonctions rationnelles fait chuter la réussite à la question précédente.

Dans cette question la reconnaissance de la « décomposition » des fonctions et celle de l'inverse d'une fonction rationnelle sont mises en jeu. On invite cependant les élèves à remarquer que la fonction *f* est une fonction inverse ($f(x)=\frac{1}{x}$). Mais je crois que dans un concours comme celui-ci où on peut avoir quelques minutes par question il est très difficile de le remarquer sans calcul si on n'a pas déjà vu ce type de question (comme la procédure P5). Comme le but de l'enseignement de dérsané est de présenter les types de questions du concours et d'entraîner les élèves en posant beaucoup d'exercices de même type, j'attends que dans la classe de terminale (tous les élèves suivent les dérsanés) le taux de réussite est plus élevé et qu'il y a des élèves qui trouvent la bonne réponse sans calcul.

De plus cette question nous permet aussi à constater explicitement le but de ce concours où le temps est extrêmement important. Cette rapidité est le moyenne pour « sélectionner les meilleur». Par exemple toutes les connaissances mises en jeu pour résoudre la question peuvent être disponibles chez un élève (candidat). Il peut aussi savoir les mobiliser. Mais s'il ne sait pas choisir les techniques adéquates (comme la procédure P3), cela le retardera par rapport à un autre qui les sait (ou à un autre qui connaît plus de types de questions).

Voici maintenant les procédures de résolution attendues des élèves :

P1. $f(\frac{x+1}{x-2})=\frac{x-2}{x+1}$ *soit* $g(x)=\frac{x+1}{x-2}$ *on peut trouver l'inverse de g en utilisant la méthode* $\boldsymbol{M_{xfy}}$*;*

$g(x)=y$ .... $y=\frac{x+1}{x-2}$, $y(x-2)=x+1$... $x=\frac{2y+1}{y-1}$ ....$g^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

$(fog)og^{-1}(x)=\dfrac{\frac{2x+1}{x-1}-2}{\frac{2x+1}{x-1}+1}=\frac{3}{3x}$ *alors* $f(x)=\frac{1}{x}$

P2. *On peut trouver l'inverse en utilisant la recette* $\boldsymbol{R_a}$ *:*

$f(\frac{x+1}{x-2})=\frac{x-2}{x+1}$ *soit* $y=\frac{x+1}{x-2}$ *donc* $y^{-1}=\frac{2x+1}{x-1}$ *et ensuite on met cette valeur à la place de x dans la composée (implicite)*

$f(\dfrac{\frac{2x+1}{x-1}+1}{\frac{2x+1}{x-1}-2})=\dfrac{\frac{2x+1}{x-1}-2}{\frac{2x+1}{x-1}+1}=\frac{3}{3x}$ *alors* $f(x)=\frac{1}{x}$

P3. $f(\frac{x+1}{x-2})=\frac{x-2}{x+1}$ ..... $f(\frac{x+1}{x-2})=(\frac{x+1}{x-2})^{-1}$ *on peut écrire x à la place de* $\frac{x+1}{x-2}$

$f(x)=x^{-1}$ *alors* $f(x)=\frac{1}{x}$.

P4. $f(\frac{x+1}{x-2})=\frac{x-2}{x+1}$ *donc* $f(x)=\frac{1}{x}$

P5. . *On peut penser que l'opération n'est pas déjà effectuée :*

$f(\frac{x+1}{x-2})=\frac{x-2}{x+1}$ *donc* $f(x)=\dfrac{\frac{x+1}{x-2}-2}{\frac{x+1}{x-2}+1}=\frac{-x+5}{2x-1}$

	Tutibay	**Altın**	**Aydın**	**Officiel**	**Güvender**	**Uğur**	**Zafer**
P1	-	-	-	-	-	-	-
P2	-	-	-	-	+	+	+
P3	-	-	-	-	+	-	-
P4	-	-	-	-	-	-	-

Dans les manuels ML il n'y a aucun exercice dans lequel on demande de « décomposer » une composée rationnelle (implicite) en utilisant une fonction rationnelle (implicite). Le manuel Güvender met en place presque la même question en proposant aussi de calculer l'image d'un nombre réel par f et il fait utiliser la procédure P2. Tandis que dans les manuels Uğur et Zafer il y a des exercices qui font utiliser la procédure P2 mais aucun exercice qui relèvent des procédures P3 et P4.

1.2.4 Question n°4

Trouver l'image de x+1 par f si $f(x)=x^2-2x+1$.

Cette question n'est pas une question du concours mais je me suis inspiré de la question du concours (Q24/1988) dans laquelle il s'agit de calculer la même image par la fonction f définie par $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$. Comme je n'ai pas voulu m'empêcher d'avoir des réponses des élèves qui essaient de calculer simplement l'image demandée sans reconnaître l'identité remarquable (parce que c'est plus difficile dans la question du concours), j'ai remplacé le cube d'un binome par le carré d'un binome.

Ainsi cette question demande de faire appel aux connaissances antérieures des élèves comme la plupart des questions du concours. On demande des élèves de trouver l'image de *x+1* par *f*. Les connaissances déjà acquises sur les identités remarquables dont l'élève doit se servir sont des outils supposés disponibles dans ce travail. En posant cette question je voulais vérifier que les élèves peuvent mettre en fonctionnement ces connaissances. Par ailleurs je pense que se rendre compte de factoriser la fonction sera à disposition des élèves du lycée Anatolien.

Voici les réponses attendues des élèves :

P1. *On peut trouver l'image de x+1 par f:*

$f(x)=x^2-2x+1$

$f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)+1$ …….$f(x+1)=x^2+2x+1-2x-2+1$ *alors* $f(x+1)=x^2$

P2. *On peut factoriser la fonction:*

$f(x)=x^2-2x+1$

$f(x)=(x-1)^2$ …….$f(x+1)=((x+1-1)^2$ …..$f(x+1)=x^2$

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P1	-	-	-	-	-	-	-
P2	-	-	-	-	+	+	+

Le manuel Güvender propose la question du concours (Q24/1998). Et il fait utiliser la deuxième procédure. De plus il y a deux autres exercices résolus qui se fondent sur ce type de travaux. L'un des exercices demande de calculer l'image d'un nombre irrationnel par une fonction définie par une identité remarquable et l'autre de calculer l'image d'une expression algébrique par une fonction trinome du second degré. En effectuant des calculs l'élève est amené à obtenir une identité remarquable et ensuite à trouver l'image demandée. Dans le manuel Uğur nous trouvons un exercice dans lequel il s'agit de calculer l'image d'un nombre irrationnel par une fonction du troisième degré. L'élève doit obtenir une identité remarquable pour calculer l'image demandée. En ce qui concerne le manuel Zafer, il propose deux exercices dans lesquels l'identité remarquable « cube d'une différence » est mise en jeu pour calculer l'image d'un nombre irrationnel.

1.2.5 Question n°5

Si $f(x) = ax + b$, $f^{-1}(3) = 4$, $f^{-1}(2) = 5$ *trouver le produit de a et b.*

Comme nous l'avons déjà indiqué, dans le programme il n'y a aucune indication qui fait référence directe aux fonctions affines mais deux questions qui les concernent ont été cependant proposées dans le concours. Quand nous allons donner le tableau qui montre l'existence des procédures dans les manuels, nous allons constater que tous les manuels MPC et certains manuels ML proposent des exercices dans lesquels l'élève doit mettre en fonctionnement la formule générale des fonctions affines. De plus dans cette question l'élève doit faire appel aux connaissances antérieures portant sur la résolution du système linéaire d'équations. Je veux donc étudier si tous les élèves peuvent se servir ces connaissances antérieures. Par ailleurs il me semble que la reconnaissance du système d'équations et sa résolution seront une grande difficulté pour un bon nombre des élèves des lycées Super et Normal.

Je présente maintenant les différentes procédures de résolution que l'on peut raisonnablement attendre de la part des élèves:

P1. *On peut trouver l'inverse de la fonction f :*

f(x)= ax+b soit f(x)=y… y=ax+b, y-b=ax……. x=$\frac{y-b}{a}$ *alors* $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$

Maintenant on peut obtenir un système linaire d'équations en utilisant les données ;

$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ *donc* $f^{-1}(3) = \frac{3-b}{a} = 4$ *….. 3-b=4a*

$f^{-1}(2) = \frac{2-b}{a} = 5$ *…..2-b=5a*

on peut résoudre le système d'équations à deux variables ;

$$\left.\begin{matrix} 3\text{-}b=4a \\ 2\text{-}b=5a \end{matrix}\right\}$$ ……..$a=-1$ et $b=7$ alors $a.b=(-1).7=-7$.

P2. *On peut trouver l'inverse de la fonction f en utilisant la recette* $\boldsymbol{R_a}$:

$f(x)= ax+b$ donc $f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$ ……$f^{-1}(3) = \frac{3}{a} - \frac{b}{a} = 4$ et $f^{-1}(2) = \frac{2}{a} - \frac{b}{a} = 5$

on peut résoudre le système d'équations à deux variables ;

$$\left.\begin{matrix} 3\text{-}b=4a \\ 2\text{-}b=5a \end{matrix}\right\}$$ ……..$a=-1$ et $b=7$ alors $a.b=(-1).7=-7$.

P3. *On peut utiliser la définition de la fonction inverse :*

$f^{-1}(3)=4$, $f^{-1}(2)=5$ donc $3=f(4)$ et $2=f(5)$

on peut obtenir le système d'équations à deux variables ;

$$\left.\begin{matrix} 4a+b=3 \\ 5a+b=2 \end{matrix}\right\}$$ …….$a=-1$ et $b=7$ alors $a.b=-7$

	Tutibay	**Altın**	**Aydın**	**Officiel**	**Güvender**	**Uğur**	**Zafer**
P1	-	-	-	-	-	-	-
P2	-	-	-	-	-	-	-
P3	-	-	+	-	+	+	+

Dans les manuels Tutibay, Altın et officiel il n'y a aucun exercice qui présente ce type de travail. Aydın propose un seul exercice dans lequel il s'agit de calculer l'image d'un nombre réel par l'inverse de f en utilisant que f est une fonction affine et que deux images connues par f. Güvender fait travailler les élèves sur la formule générale des fonctions affines dans trois exercices dont deux présentent presque le même travail que cette question et l'autre presque le même travail que l'exercice du manuel Aydın. Dans ce cadre Uğur propose deux exercices ressemblants pour lesquels il s'agit de calculer l'image d'un nombre réel en utilisant que f est affine et qu'une image connue par f, l'autre par f^{-1}. Dans le manuel Zafer nous trouvons trois exercices dont l'un rassemble beaucoup à cette question et l'autre à l'exercice du manuel Aydın. Le troisième exercice de ce manuel ne se rapproche de cette question que par l'utilisation de la formule générale des fonctions affines. Le travail que l'élève doit effectuer est cependant différent. Ainsi il s'agit de calculer l'image d'un nombre réel par *f* en utilisant que la fonction *f* affine est définie par $f(x)=ax+b$ et que la double composée de la fonction *f* *(fof)*.

1.2.6 Question n°6

Trouver l'image de 2 par f si $f(x)=ax+bx+2$, $f(-2)=5$.

Cette question n'est pas une question du concours. Mais elle n'est pas très loin de la plupart des questions dans le sens où l'élève doit mettre en fonctionnement des connaissances antérieures pour la résolution. Ainsi les connaissances antérieures liées à la résolution d'équations que l'élève doit se servir sont des outils devant être disponibles dans ce travail. En proposant cette question je veux étudier que tous les élèves peuvent faire fonctionner ces connaissances et connaître le rapport entre les images de 2 et –2 par la fonction f.
J'attends donc la réponse :

P. *f(-2)=5 donc f(-2)=-2a-2b+2=5*
on peut écrire ; -2(a+b)=3.....2(a+b)=-3
f(2)=2a+2b+2=2(a+b)+2=-3+2=-1

	Tutibay	**Altın**	**Aydın**	**Officiel**	**Güvender**	**Uğur**	**Zafer**
P	2	3	16	21	13	23	26

Dans les manuels il est très difficile de trouver la même question. Mais il y a cependant des exercices (dont le nombre varie d'un manuel à l'autre) qui demandent de faire fonctionner les connaissances antérieures portant sur la résolution d'équations. Le tableau ci-dessus montre la répartition du nombre des exercices qui font utiliser ce type de connaissances par manuel.

1.2.7 Question n°7

Si la fonction f est constante et $f(x)=(a+2)x+8$ *trouver le nombre a.*

Dans le concours il n'y a aucune question de ce type. Malgré cela tous les manuels MPC et certains manuels ML proposent des exercices dans lesquels l'élève est amené à utiliser la formule générale des fonctions constantes. Cette question est ainsi une application de la définition de la fonction constante (*f(x)=k)*. Je veux ici vérifier que tous les élèves peuvent reconnaître que le coefficient de x doit être zéro dans l'image de l'expression des fonctions constantes. Comme dans les classes où l'enseignement très proche du concours est très présent les élèves ont l'habitude de ce type de questions, je pense que dans ces classes le taux de réussite à cette question sera plus élevé que dans les autres

Voici les réponses attendues :

P1. *On peut utiliser la définition des fonctions constantes :*

Si f est constante donc f(x)=k on peut dire que le coefficient de x doit être à zéro ;

$f(x)=(a+2)x+8$ *…….. a+2=0 alors a=-2*

P2. *On peut résoudre en sachant que l'image de chaque élément de l'ensemble de définition d'une fonction constante est identique :*

Si f est constante donc f(1)=f(2)…….. (a+2).1+8=(a+2).2+8

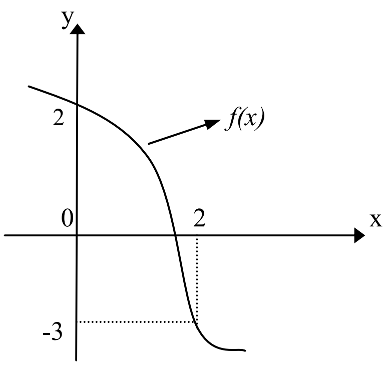
a +2+8=2a+4+8 alors a=-2.

	Tutibay	**Altın**	**Aydın**	**Officiel**	**Güvender**	**Uğur**	**Zafer**
P1	-	-	-	+	-	+	+
P2	-	-	-	-	-	+	+

A part le manuel officiel tous les manuels ML ne proposent aucun exercice de ce type. Tandis que dans tous les manuels MPC, à l'exception du manuel Güvender, il y a des exercices dans lesquels il s'agit de travailler sur la formule générale des fonctions constantes en privilégiant ensemble les deux procédures P1 et P2.

1.2.8 Question n°8

On considère que la fonction f est bijective sur [0,2] et représentée graphiquement ci-dessous :



Quelle est la valeur $\dfrac{f(2)+f^{-1}(2)}{f(f(1))}$ *?*

Comme les manuels ML et MPC ne sont pas géométriquement très riches (cf. l'analyse des manuels), dans cette question je pense que tous les élèves auront des grandes difficultés à lire et à interpréter la représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormé. De plus ce type des questions est plus nombreux dans les manuels MPC que dans les manuels ML, c'est pourquoi je pense que dans les classes où l'enseignement est très proche du concours le taux de réussite est donc plus élevé.
Par ailleurs je me demande si les élèves peuvent reconnaître que cette représentation graphique de la fonction *f* est également celle de son inverse.
J'attends la réponse :

P. *On peut trouver les points de cordonnées :*
$f(2)=-3,\quad f^{-1}(2)=0,\quad f(f(1))=f(0)=2$

$$\frac{f(2)+f^{-1}(2)}{f(f(1))}=\frac{-3+0}{2}=\frac{-3}{2}$$

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P	-	-	3	3	6	11	8

Selon le tableau ci-dessus qui montre le nombre des exercices résolus dans lesquels il s'agit de lire et interpréter la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé, Tutibay et Altın sont les manuels qui ne proposent aucun exercice de ce type. Comme nous l'avons déjà dit plus haut, les manuels MPC sont plus riches par rapport à la proposition de ce type d'exercices.

1.2.9 Question n°9

Trouver la fonction $f^{-1}(x)$ *si* $f(x): R-\{-1\} \to R-\{3\},\ x=\dfrac{f(x)+2}{3-f(x)}$.

C'est la question du concours (Q41/1997). A nouveau comme la question 3 du deuxième questionnaire nous sommes face à une question qui n'est pas bête. On offre aux élèves une occasion de la résoudre en quelques secondes sans toucher le crayon et le papier. Car la question est déjà résolue dans l'énoncé. Il reste aux élèves à voir que la fraction donnée est la dernière étape de la tâche. C'est pourquoi mes attentes sont différentes des questions précédentes qui demandent de trouver l'inverse d'une fonction définie algébriquement. Grâce à cette question je veux vérifier que comme dans les dérsanés les démarches les plus courtes sont privilégiées. Tous les élèves de la classe de terminale (parce que cette question ne figure que dans le questionnaire de la classe de terminale) peuvent reconnaître qu'il s'agit de la dernière étape de la résolution consistant à trouver l'inverse de la fonction f à partir de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ (cf. la procédure P1).

De plus la façon de proposer cette question est inhabituelle. C'est la raison pour laquelle je pense que cela fait chuter le taux de réussite à la question n° 6 du premier questionnaire dans laquelle il s'agit aussi de trouver l'inverse d'une fonction rationnelle.

Donc voici les procédures de résolution attendues des élèves :

P1. *On peut écrire y à la place de f(x) :*

$$x=\frac{f(x)+2}{3-f(x)} \;\ldots\ldots\; f(x)=y, \quad x=\frac{y+2}{3-y} \quad \text{alors } f^{-1}(x)=\frac{x+2}{3-x}.$$

P2. *On peut trouver f(x) ensuite $f^{-1}(x)$:*

$$x=\frac{f(x)+2}{3-f(x)} \quad \text{donc } x(3-f(x))=f(x)+2\ldots\ldots\ldots f(x)=\frac{-3x+2}{x+1}$$

on peut trouver l'inverse en utilisant la recette $\boldsymbol{R_a}$;

$$f^{-1}(x)=\frac{x+2}{3-x}.$$

P3. *On peut trouver f(x) ensuite $f^{-1}(x)$ en utilisant la méthode $\boldsymbol{M_{xfy}}$:*

$$x=\frac{f(x)+2}{3-f(x)} \quad \text{donc } x(3-f(x))=f(x)+2\ldots\ldots\ldots f(x)=\frac{-3x+2}{x+1} \quad \text{soit } y=f(x)$$

$$y=\frac{-3x+2}{x+1} \;\ldots\ldots\; y(x+1)=-3x+2, \quad yx+y=-3x+2\ldots\ldots x=\frac{y+2}{3-y}$$

$$\text{alors } f^{-1}(x)=\frac{x+2}{3-x}.$$

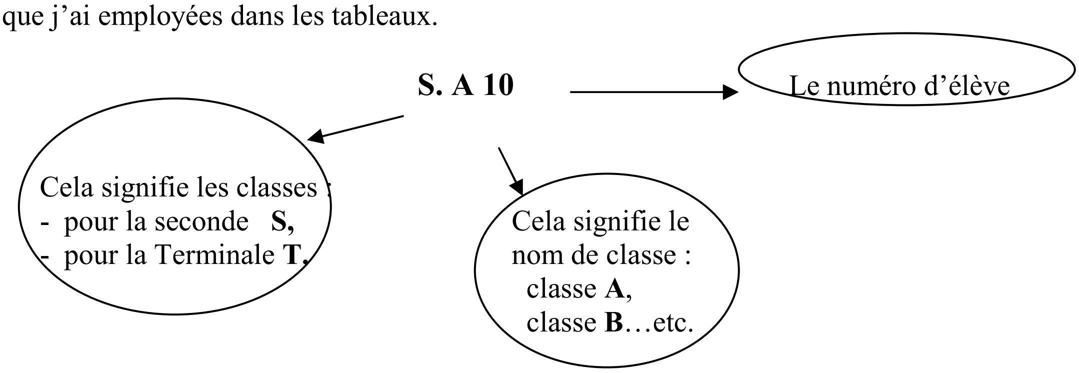
	Tutibay	**Altın**	**Aydın**	**Officiel**	**Güvender**	**Uğur**	**Zafer**
P1	-	-	-	-	+	-	+
P2	-	-	+	+	-	+	-
P3	-	-	-	-	-	-	-

Comme le montre bien le tableau suivant, Tutibay et Altın ne proposent aucun exercice de ce type. Les manuels Güvender et Zafer se rapprochent par le privilège de la procédure P1. Güvender propose cette question du concours. Aydın, officiel et Uğur sont les manuels qui mettent en place ce type d'exercices en privilégiant la procédure P2.

2. Analyse a posteriori du premier questionnaire-élèves

Afin de repérer les représentations des élèves sur la notion de la fonction et de vérifier les diverses compétences concernant l'utilisation de la fonction, dans cette partie j'analyserai les résultats des élèves question par question.

Dans l'analyse de toutes des questions je présenterai les réponses précisées en donnant quelques résultats exemplaires des élèves. Avant de passer à l'analyse des questions je veux expliquer les abréviations que j'ai employées dans les tableaux.



<u>2.1 Question n°1</u>

Comme le but de la question est de mettre en évidence les conceptions des élèves sur la notion de fonction, je ne suis pas exigeant et ne cherche pas à avoir une définition complète. Un mot ou une phrase donnée par les élèves qui renvoie à une des définitions de la fonction a été classée.

Maintenant je présente comment j'ai classé les réponses des élèves ;

J'ai réparti les réponses en six catégories :

RP1 (Df.1 : correspondance entre deux ensembles): la fonction est un processus ou procédé de correspondance entre deux ensembles.

Soit A et B deux ensembles, la fonction est une image contient les éléments de A liés avec ceux de B…..(SA28)

On donne deux ensembles, il s'agit d'une comparaison entre ces deux ensembles…..(SB6)

La fonction est des éléments qui sont définis de l'ensemble A dans l'ensemble B…..(SB7)

La fonction est un ensemble défini de l'ensemble A dans l'ensemble B…..(SB19)

Soit A et B deux ensembles qui ne sont pas vides, on appelle fonction, si elle peut faire correspondance chaque élément de A à chaque élément de B…….(SC26)

RP2 (la comptine C_o) : pour qu'une correspondance puisse être une fonction, il faut qu'aucun élément de l'ensemble de définition ne soit vacant et qu'un élément de l'ensemble de définition ait une seule image dans l'ensemble image.

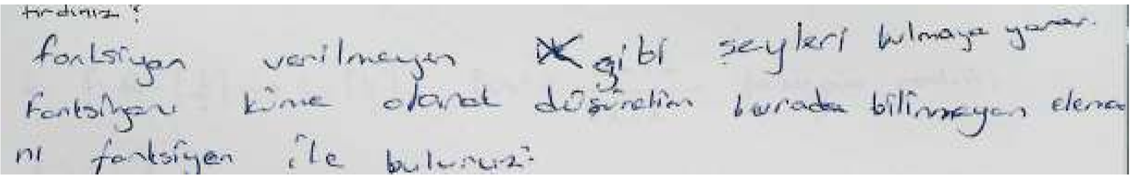
D'abord je leur dirais que pour qu'une opération ou un ensemble puisse être une fonction, il faut qu' aucun élément de l'ensemble de définition ne soit vacant. Ensuite je leur raconterais comment ils traitent les exercices…..(SD5)

La fonction est un ensemble qui n'a aucun élément étant vacant. A mon avis c'est très absurde. Quoi il fera même l'élève qui ne va pas s'orienter vers la filière des sciences naturelles, lors qu'il a maîtrisé ces trucs-là ?…..(SA31)

La fonction est un ensemble défini de l'ensemble A dans le B dont l'ensemble de définition n'a aucun élément vacant…….(SA23)

Je dirais aux martiens d'imaginer deux ensembles. Ensuite j'essayerais de leur expliquer qu'ils doivent faire correspondre aux éléments du premier les éléments du deuxième de façon à ne pas rester un seul………(SA7)

RP3 (Df.9) : la fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue.


tırdınız ?
fonksiyon verilmeyen X gibi şeyleri bulmaya yarar.
fonksiyonu küme olarak düşünürsek burada bilinmeyen eleman
ni fonksiyon ile buluruz.

<u>La fonction est utile à trouver les choses comme des inconnues. Si on imagine la fonction comme un ensemble, on trouve ici l'inconnue à l'aide de la fonction……(SB14)</u>

La fonction est l'un des sujets difficiles des mathématiques. Et je ne crois pas que les Martiens veuillent l'apprendre et puissent l'apprendre. En fait ce n'est pas nécessaire. Mais si on me demande, je dirais qu'il y a un ensemble inconnu. On l'appelle x. Et on fait des opérations en donnant les valeurs à cet ensemble. Et le résultat est exact….. (SB13)

En réalité la fonction est un sujet facile. On ne doit correctement que mettre les données à leurs places. Dans les fonctions on vous donne toujours la forme sur la quelle on va faire des opérations……..(SC1)

La fonction est en fait un sujet facile. Le seule chose à faire est de mettre les données à leurs places. Généralement on nous le donne dans les énoncés……..(SC3)

Imaginez deux paniers de pommes. Soit le premier A et le deuxième B. on met dans le B de façon à ne pas rester une seule pomme dans le A…….(SA25)

RP4 (Df.2 et Df.3 :la définition ensembliste) : soient A et B deux ensemble qui ne sont pas vides. Une fonction f de l'ensemble A dans l'ensemble B est une règle de correspondance qui associe à chacun des éléments de A au plus un élément de B.

Fonction : Soient A et B deux ensembles qui ne sont pas vides. Si f est une correspondance qui est définie de A dans B tels que chacun des éléments de A est équivalent à un seul élément de B, on l'appelle fonction…………(SC7)

Soient A et B deux ensembles qui ne sont pas vides. Si f est une correspondance qui fait correspondre à chacun des éléments de A au plus un élément de B, on dit que la correspondance f est une fonction définie de A dans B. On a besoin de deux règles, pour que f soit une fonction définie de A dans B :

1) $\forall x \in A$ *et* $\exists y \in B$ $(x,y) \in f$

2) $\forall x \in A$ *et* $y \in B$, $(x,y) \in f$ *et* $(x,z) \in f$ *donc* $y = z$ *……………(SD7)*

Soient A et B deux ensemble qui ne sont pas vides. Une fonction f de l'ensemble A dans l'ensemble B est une règle de correspondance qui associe à chaque élément de A seul un élément de B……………(SE53)

Le premier ensemble s'appelle l'ensemble de définition et le deuxième l'ensemble image. Un élément de l'ensemble de définition correspond à des éléments différents de l'ensemble image. On appelle donc cette correspondance « fonction »………….(SE14)

RP5 (si je suis professeur, je présente…): l'élève explique comment il présenterait la notion de la fonction.

Je leur présenterais la fonction facilement en donnant des exemples. Je les soumettrais à beaucoup de tests. J'éviterais de les conduire à apprendre par cœur. Je corrigerais en expliquant les erreurs commises. En fait j'ai dit que j'éviterais un apprentissage par cœur. Mais dans notre système de l'enseignement l'apprentissage par cœur est très important. Lors qu' il y a un examen le lendemain, on commence à mémoriser d'en fin de l'après-midi jusqu 'à minuit……(B20)

Je ne peux pas présenter la définition de la fonction. Mais je peux leur transmettre tout ce que je sais en traitant les exercices. Seulement hors la méthode longue pour trouver la fonction inverse……..(SB30)

D'abord je parlerais longuement des mathématiques. Ensuite je raconterais la définition de la fonction, ce qui est la fonction et à quoi sert la fonction. S'ils ne le comprennent pas encore, à nouveau je le représenterais en rendant simple……..(SB26)

Moi je leur demanderais ce qu'ils savent au nom des mathématiques. S'ils n'ont pas de connaissances, je leur donnerais quelques une de bases. Je leur dirais qu'en fait la fonction n'est pas très nécessaire à l'homme mais dans notre société à cause de l'existence du concours d'entrée à l'université on doit l'apprendre……(SA30)

Je sais pas la définition de la fonction. Dans le système du concours où nous sommes on n'accorde pas l'importance aux définitions. L'objectif est de résoudre beaucoup de questions en court temps. C'est pour cela que moi je donnerais les propriétés de la fonction et résoudrais les exercices. En mathématiques, beaucoup de gens ne savent cependant pas les définitions…….(T10)

Actuellement je sais superficiellement les opérations liées à la fonction. Je les étudie seulement pour qu'on les demande au concours. Comme je n'ai pas compris l'essentiel de la fonction et je ne sais pas où j'en aurais besoin une autre fois. Si je ne la répète pas, je l'oublie…..(SB28)

Je ne pense pas que ce sujet se présente bien théoriquement. C'est pour ça que je ferais des applications. C'est-à-dire que j'essayerais de la présenter directement en résolvant les exercices….(T5)

Autres Réponses:

Bien que les réponses classées dans cette catégorie ne comportent pas de grandes choses au nom des mathématiques, mais elles nous aident à comprendre des opinions des élèves sur le système de l'enseignement et le concours.

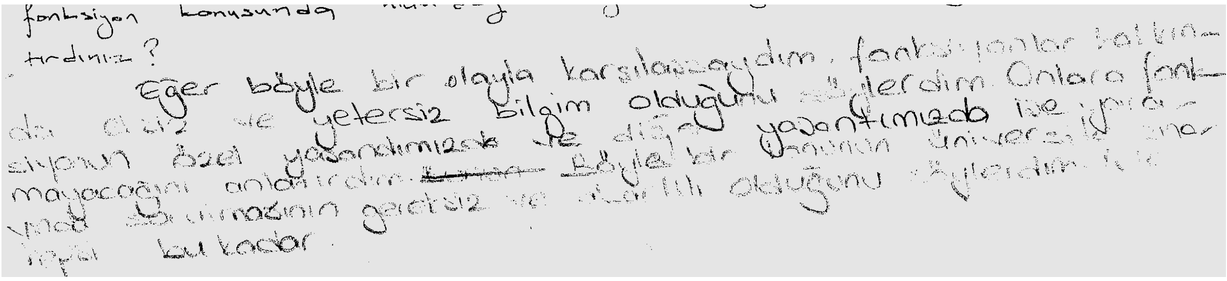
Je crois pas qu'ils aient besoin de ça……..(T6)

Je leur dirais de laisser tomber. Ça ne sert à rien…….(T16)

…je dirais que c'est très inutile et une absurdité lasse les élèves des mathématiques…(SA31)

Je sais pas le champ d'utilisation de la fonction et à quoi elle sert…(T8)

Je leur dirais de laisser tomber. Ça ne sert à rien. De toute façon ils n'ont pas de souci du concours…..(T14)


fonksiyon konusunda
tırdınız?
Eğer böyle bir olayla karşılaşsaydım, fonksiyonlar hakkında az ve yetersiz bilgim olduğunu söylerdim. Onlara fonksiyonun özel yaşantımızda ve diğer yaşantımızda ~~~~ Böyle bir konunun üniversite olmayacağını anlatırdım. sorulmasının gereksiz ve abartılı olduğunu söylerdim. kadar.

<u>*Si je rencontre un événement pareil comme ça. Je leur dirais que je n'ai pas assez de connaissances sur les fonctions. Je leur raconterais que la fonction est inutile à notre vie privée et à d'autre. Je dirais que le fait qu'on demande un sujet pareil au concours est inutile et trop exagéré….(SA27)*</u>

Non-Réponses :

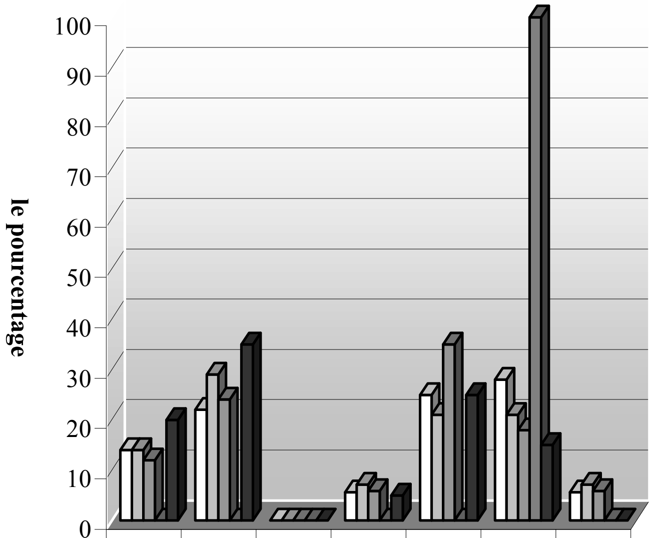
Maintenant je passe à l'analyse des résultas (ou des réponses) en donnant les tableaux lycée par lycée :

2.1.1 Lycée Anatolien

Comme je l'ai déjà indiqué, les questionnaires se sont déroulés dans trois classes de ce lycée où le nombre des élèves qui suivent les dérsanés est plus nombreux. Par ailleurs, le lycée Anatolien recrute ses élèves par un concours. C'est la raison pour laquelle les meilleurs élèves du collège sont placés dans ce lycée.

Si mes hypothèses sont valables, dans ces classes, je n'attends pas que le taux de réponses privilégiant l'une des définitions de la fonction soit plus élevé. Par contre une réponse comme RP2 qui aide aux élèves à mémoriser les résultats de la définition de la fonction et comme RP3 qui vient de l'abus des applications dans le cadre algébrique devraient être majoritairement plus élevés chez les élèves anatoliens.

Q1-Q1-SA (Questionnaire 1-Question 1-Seconde A)



	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SA	14	22	0	6	25	28	6
BON	14	29	0	7	21	21	7
MOY	12	24	0	6	35	18	6
MAU	0	0	0	0	0	100	0
DER	20	35	0	5	25	15	0

les réponses

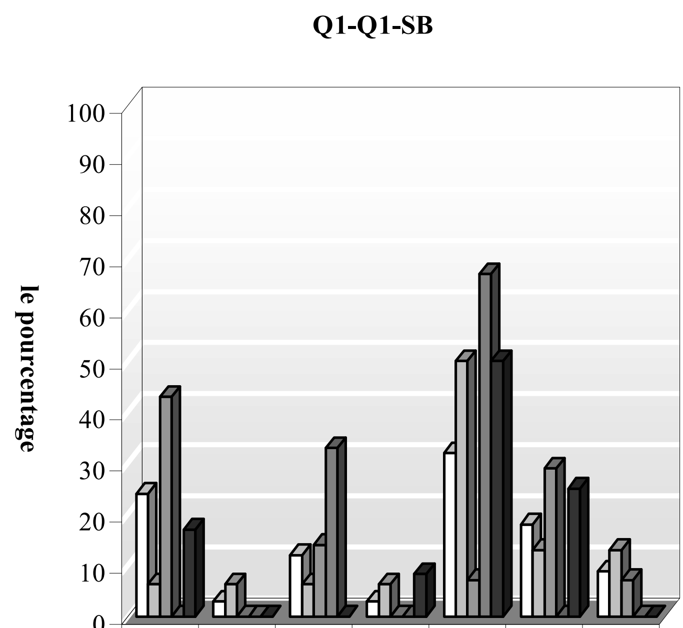
SA:seconde A, BON:bons élèves, MOY:moyens élèves, MAU: mauvaises élèves, DER:élèves qui suivent des dérsanés, RP1: des correspondances entre deux ensembles, RP2 : la comptine C_{o}, RP3 : la fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue, RP4 : la définition ensembliste, RP5 :si je suis professeur, je présente…, AR : autres réponses, NR : non-réponses

Comme on l'a déjà prévu, les élèves de la classe A n'accordent pas beaucoup d'importance à la définition de la fonction à partir d'ensembles (5,6%). Il n'y a aucun élève qui dise que la fonction est une structure qui aide à trouver des inconnues. Ce qui est tout à fait contraire à mes hypothèses. Par contre le fait qu'une bonne partie des élèves utilisent la comptine « l'évitement de l'élément vacant dans l'ensemble de définition » confirme mes attentes (22%). Pour 14% des élèves la fonction est prise comme l'unificateur entre les ensembles. Tandis que 28% des élèves préfèrent mettre en discours le rapport entre la fonction et le concours. Il est évident qu'un quart des élèves comprennent qu'on leur demande de se prendre pour un professeur. Cela me conduit cependant à poser la question suivante « est-ce qu'ils essaient de dire comment ils veulent apprendre ?

Quant aux résultats des élèves par niveau, une légère différence s'observe entre les bons et moyens. Ainsi 14% des bons prennent la fonction comme « un processus ou procédé de correspondance entre deux ensembles » contre 12% des moyens. Cependant les élèves qui utilisent la comptine dite « l'évitement de l'élément vacant dans l'ensemble de définition » sont plus nombreux chez les bons. 29% d'entre eux donnent cette réponse contre près du quart des moyens. 7% des bons donnent la définition de la fonction à partir d'ensembles. Ce taux atteint 6% chez les moyens.

Si l'on regarde les résultats des élèves de dérsané, on constate que la plupart d'entre eux utilisent la comptine (35%). Tandis que la définition à partir d'ensembles n'est présente que chez 5%. Par ailleurs, le pourcentage des élèves qui prennent la fonction comme un processus ou procédé de correspondance entre deux ensembles atteint 20% chez ces élèves.

Comme le montre bien le tableau ci-dessous, en classe de seconde B, prés du tiers des élèves expliquent comment ils présenteraient la fonction aux martiens. 24% des élèves disent que la fonction est un procédé de correspondance entre deux ensembles. Tandis que la comptine « aucun élément vacant dans l'ensemble de définition » est utilisée par un très faible pourcentage des élèves (3%). Ce pourcentage est aussi valable pour les élèves qui donnent la définition à partir d'ensembles. 12% des élèves affirment que la fonction est une structure qui aide à trouver des inconnues. Tandis qu'une bonne partie des élèves donnent leurs opinions sur le système de l'enseignement et du concours.
En ce qui concerne les résultats des élèves par niveau, les élèves qui disent que la fonction est un processus de correspondance entre des ensembles sont plus nombreux chez les moyens. Ainsi près de la moitié d'entre eux donnent cette réponse contre 6% des bons et un pourcentage nul chez les mauvais. Par ailleurs, l'utilisation de la comptine est uniquement réservée aux bons avec un taux de 6%.
L'idée que la fonction est une structure qui aide à trouver des inconnues est plus fréquente chez les mauvais. Un tiers d'entre eux avancent cette idée contre 14% des moyens et 6% des bons. Seuls 6% de ces derniers donnent la définition de la fonction à partir d'ensembles. Par ailleurs, le taux des élèves qui se plaignent du système de l'enseignement et du concours est plus élevé chez les moyens. Plus du tiers d'entre eux donnent donc ce type de réponses contre 13% des bons et un pourcentage nul chez les mauvais.



	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SB	24	3	12	3	32	18	9
BON	6	6	6	6	50	13	13
MOY	43	0	14	0	7	29	7
MAU	0	0	33	0	67	0	0
DER	17	0	0	8	50	25	0

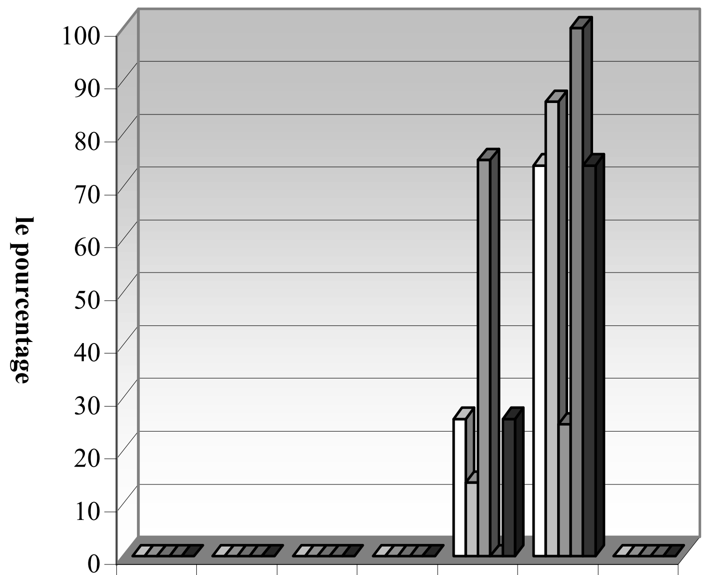
les réponses

SB:seconde B, BON:bons élèves, MOY:moyens élèves, MAU: mauvaises élèves, DER:élèves qui suivent des dérsanés, RP1: des correspondances entre deux ensembles, RP2 : la comptine C_o, RP3 : la fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue, RP4 : la définition ensembliste, RP5 :si je suis professeur, je présente…, AR : autres réponses, NR : non-réponses

Parmi les élèves de dérsané, on observe que la moitié donnent un plan de présentation de la fonction. Et un quart des élèves critiquent cependant le système où ils vivent. 8% donnent la définition à partir

des ensemble. Tandis que 17% des élèves estiment que la fonction est une correspondance entre des ensembles.
En ce qui concerne la classe de terminale, il est très intéressant qu'on ne rencontre aucune réponse relative à la définition de la fonction. 26% des élèves donnent une présentation de la fonction. Alors que les autres préfèrent mettre en discussion la discordance entre la fonction et le concours. Bien qu'il n'y ait aucune définition de la fonction chez ces élèves, leurs réussites dans les questions suivantes sont très remarquables.

Q1-Q1-CT(Questionnaire 1-Question 1-Classe de terminale)



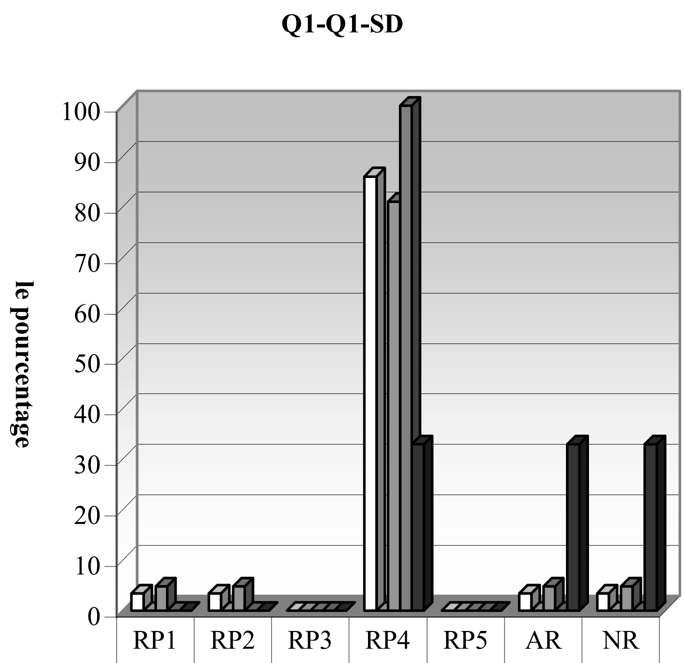
	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
T	0	0	0	0	26	74	0
BON	0	0	0	0	14	86	0
MOY	0	0	0	0	75	25	0
MAU	0	0	0	0	0	100	0
DER	0	0	0	0	26	74	0

les réponses

T:classe de terminale, BON:bons élèves, MOY:moyens élèves, MAU: mauvaises élèves, DER:élèves qui suivent des dérsanés, RP1: des correspondances entre deux ensembles, RP2 : la comptine C_o, RP3 : la fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue, RP4 : la définition ensembliste, RP5 :si je suis professeur, je présente…, AR : autres réponses, NR : non-réponses

2.1.2 Lycée Super

Dans ce lycée, deux classes de seconde ont répondu aux questionnaires. Le niveau des élèves est moins fort que celui du lycée Anatolien et plus fort que le lycée Normal. Le nombre d'élèves qui suivent les cours des dérsanés est de 4 sur 29 dans l'une et 3 sur 29 dans l'autre.
J'attends à peu près les mêmes réactions des élèves que pour le lycée précédent :



	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SD	3	3	0	86	0	3	3
BON	0	0	0	0	0	0	0
MOY	5	5	0	81	0	5	5
MAU	0	0	0	100	0	0	0
DER	0	0	0	33	0	33	33

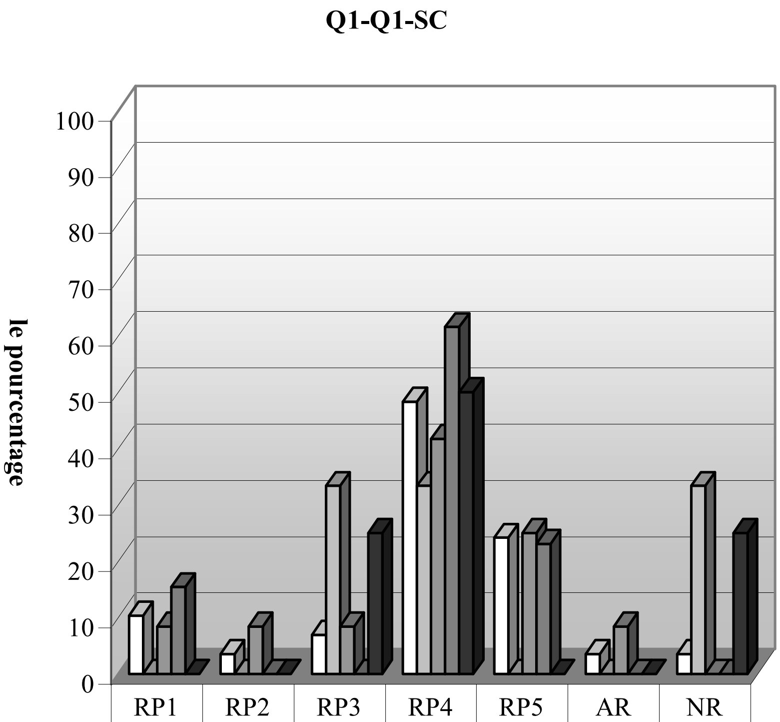
les réponses

RP1: des correspondances entre deux ensembles, RP2 : la comptine C_o, RP3 : la fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue, RP4 : la définition ensembliste, RP5 :si je suis professeur, je présente…, AR : autres réponses, NR : non-réponses

Il semble que les résultats ne soient pas conformes à mon analyse a priori. La quasi-totalité des élèves de la classe D disent qu'ils raconteraient la fonction aux martiens en donnant sa définition à partir d'ensembles (RP4). Cependant le très petit nombre des élèves estiment que la fonction fait correspondre un ensemble à un autre. Ce taux est aussi valable pour les élèves qui utilisent la comptine dite « aucun élément vacant dans l'ensemble de définition ».

Comme il n'y a aucun élève qui déclare qu'il est bon, on a donc des moyens et mauvais. Il est cependant intéressant que chaque mauvais donne la définition à partir d'ensembles. Elle est aussi majoritairement utilisée par les moyens (81%). Parmi ces derniers, 5% disent que la fonction est une structure de correspondance entre des ensembles. Et 5% utilisent la comptine, quand on leur demande de parler de la fonction.

Un tiers des élèves de dérsané donnent la définition à partir d'ensembles. Tandis qu'un autre tiers critiquent le système de l'enseignement ou du concours. Les élèves restant ne répondent pas à la question.

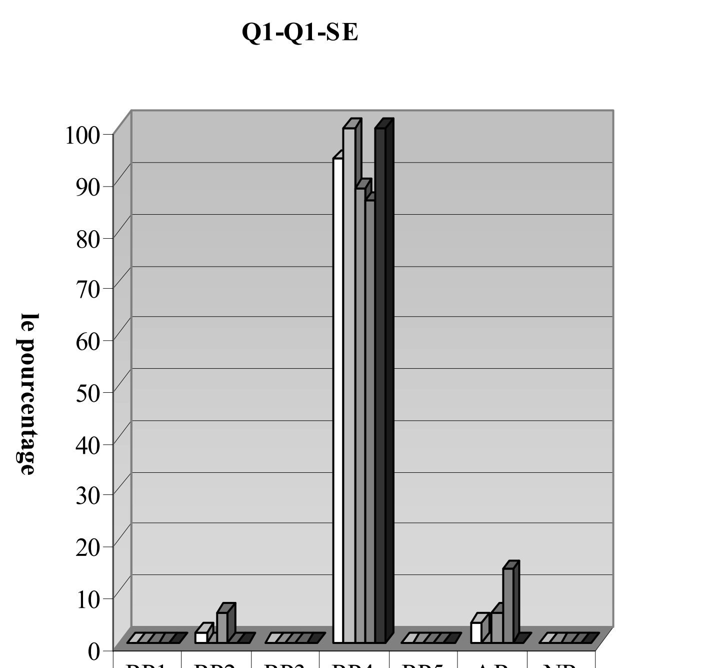


	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SC	10	3	7	48	24	3	3
BON	0	0	33	33	0	0	33
MOY	8	8	8	42	25	8	0
MAU	15	0	0	62	23	0	0
DER	0	0	25	50	0	0	25

Le tableau ci-dessus montre que près de la moitié des élèves donnent la définition à partir d'ensembles. Environ un quart des élèves expliquent comment ils présenteraient la fonction aux martiens. Par ailleurs, la fonction semble à 10% des élèves comme une correspondance entre des ensembles et à 7% une structure qui aide à trouver des inconnues. Le taux des élèves qui utilisent la comptine n'atteint que 4% dans cette classe. Un très petit nombre des élèves se révoltent contre le système de l'enseignement ou du concours (4%).
Quant aux résultats des élèves par niveau, on observe que la définition à partir d'ensembles est plus fréquente chez les mauvais. Ainsi 62% d'entre eux donnent cette définition contre 42% des moyens et un tiers des bons. Par ailleurs, on constate que seuls 8% des moyens utilisent la comptine. Pour 8% des moyens et 15% des mauvais la fonction est un procédé de correspondance entre des ensembles. Cette idée est totalement absente chez les bons. Les élèves qui estiment que la fonction est une structure qui aide à trouver des inconnues sont plus nombreux chez les bons (un tiers des bons contre 8% des moyens et un pourcentage nul chez les mauvais).
La définition à partir d'ensembles est aussi préférée chez les élèves de dérsané de cette classe. La moitié d'entre eux donnent cette définition. La fonction semble cependant à un quart de ces élèves comme un outil pour trouver des inconnues. Un même taux d'élèves ne donnent pas de réponse.

2.1.3 Lycée Normal
Comme je l'ai déjà indiqué, les enseignants et les élèves sont moins motivés par concours dans ce lycée. L'effectif des classes est beaucoup plus élevé. Il y a 49 élèves dans l'une des classes concernées et 53 dans l'autre. Un seul élève de la classe E suit le dérsané, alors que la classe F a eu 4 élèves.

Pour les classes j'attends que la définition de la fonction (RP4) soit plus favorisée par les élèves. Je ne suppose cependant pas que les réponses RP2 et RP3 se seraient accordées de l'importance par les élèves comme chez les élèves des classes précédentes.



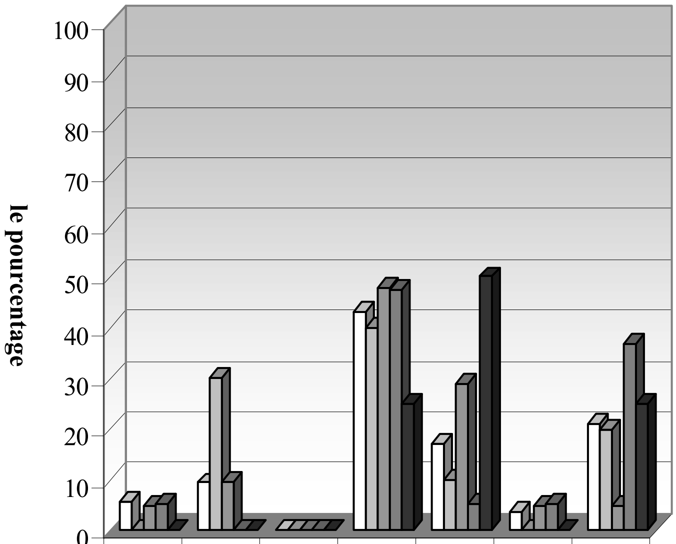
	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SE	0	2	0	94	0	4	0
BON	0	0	0	100	0	0	0
MOY	0	6	0	88	0	6	0
MAU	0	0	0	86	0	14	0
DER	0	0	0	100	0	0	0

RP1: des correspondances entre deux ensembles, RP2 : la comptine $C_{o,}$ RP3 : la fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue, RP4 : la définition ensembliste, RP5 :si je suis professeur, je présente…, AR : autres réponses, NR : non-réponses

Comme l'enseignement dispersé dans ce lycée est plus proche des programmes officiels et le nombre des élèves qui suivent les dérsanés n'est pas plus important, il n'y a pas de grande surprise dans les réponses des élèves. La quasi-totalité des élèves donnent donc la définition de la fonction à partir d'ensembles qui paraît dans tous les manuels de la classe de seconde de lycée (94%). Les réponses RP1, RP3 et RP5 sont totalement absentes dans cette classe. Un très petit nombre des élèves utilisent cependant la comptine dite « aucun élément vacant dans l'ensemble de définition ». Tandis que 4% des élèves se plaignent du système de l'enseignement ou du concours.

En ce qui concerne les résultats par niveau, on constate que tous les bons donnent la définition à partir d'ensembles contre 88% des moyens et 86% des mauvais. Il est intéressant de constater que la comptine ne vienne que de la part de 6% des moyens. Par ailleurs, les élèves de dérsané donnent aussi la définition portant sur des ensembles.

Q1-Q1-SF



	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SF	6	9	0	43	17	4	21
BON	0	30	0	40	10	0	20
MOY	5	10	0	48	29	5	5
MAU	5	0	0	47	5	5	37
DER	0	0	0	25	50	0	25

les réponses

RP1: des correspondances entre deux ensembles, RP2 : la comptine C_o, RP3 : la fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue, RP4 : la définition ensembliste, RP5 :si je suis professeur, je présente…, AR : autres réponses, NR : non-réponses

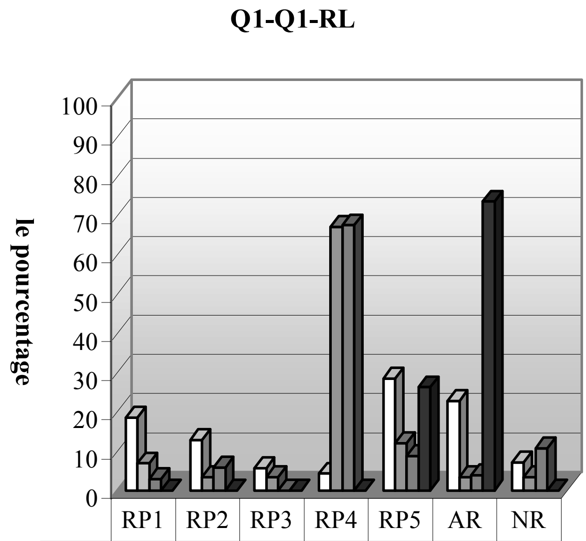
Comme le montre bien le tableau ci-dessous, en classe, la plupart des élèves donnent (43%) la définition à partir d'ensembles. Il est très intéressant qu'aucun élève n'estime que la fonction est une structure qui aide à trouver des inconnues. Une bonne partie des élèves ne répondent pas à la question. Tandis que 17% expliquent comment ils présenteraient la notion de fonction aux martiens. On observe cependant que la comptine est utilisée par 9% des élèves. Environ 6% estiment que la notion de fonction est un procédé de correspondance entre des ensembles.

Si l'on regarde les résultats par niveau, une légère différence entre les élèves s'observe par le taux de réponse RP4. Ainsi 48% des moyens donnent la définition à partir d'ensembles contre 47% des mauvais et 40% des bons. L'utilisation de la comptine dite « aucun élément vacant dans l'ensemble de définition » est plus fréquente chez les bons. 30% d'entre eux donnent cette comptine contre environ 10% des moyens et elle est totalement absente chez les mauvais. Par ailleurs, l'idée que la notion de fonction est un procédé de correspondance entre des ensembles n'est pas présente chez les bons. Tandis que 5% des mauvais et moyens avancent cette idée.

Quant aux élèves de dérsané, la moitié d'entre eux manifestent un plan de la présentation de fonction. Un quart des élèves donnent cependant la définition à partir d'ensembles. Alors qu'un autre quart ne répondent pas à la question.

2.1.4 Résultats des élèves par lycée

Si on prend en compte les résultats généraux suivant les lycées :



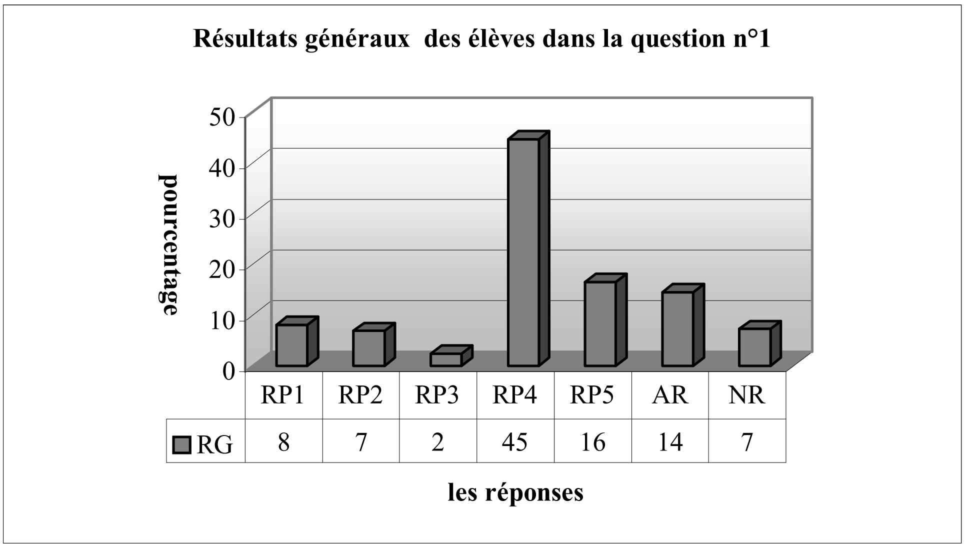
	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
LA	19	13	6	4	29	23	7
LS	7	3	3	67	12	3	3
LN	3	6	0	68	9	4	11
T	0	0	0	0	26	74	0

les réponses

LA : lycée Anatolien, LS :lycée Super, LN :lycée Normal, T :classe de terminale, RP1: des correspondances entre deux ensembles, RP2 : la comptine $C_{0,}$ *RP3 : la notion de fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue, RP4 : la définition ensembliste, RP5 :si je suis professeur, je présente…, AR : autres réponses, NR : non-réponses*

Le lycée Anatolien se distingue énormément des deux lycées dans la réponse 4 (environ 4% contre 67% et 68%). Comme les définitions importent peu au concours, il est donc normal que le taux des élèves anatoliens donnant la définition soit beaucoup moins élevé. De plus les élèves qui estiment que la fonction est un procédé de correspondance entre des ensembles (RP1), ceux qui disent que la fonction est un outil pour trouver des inconnues (RP3) et ceux qui utilisent la comptine dite « aucun éléments dans l'ensemble de définition » (RP2) sont toujours plus nombreux dans le lycée Anatolien où l'influence du concours et celle de l'enseignement de dérsané sont plus fortes. Ainsi 19% des anatoliens prennent la fonction comme un procédé de correspondance entre des ensembles contre 7% des élèves du lycée Super et 3% des lycéens normal. 13% des lycéens anatoliens utilisent cependant la comptine contre 4% des lycéens super et 6% normal. Le taux des élèves qui pensent que la fonction est une structure qui aide à trouver des inconnues est d'environ 6% chez les lycéens anatolien,4% les lycéens super et un pourcentage nul dans le lycée Normal.

2.1.5 Résultats généraux des élèves



RG :résultats généraux, RP1: des correspondances entre deux ensembles, RP2 : la comptine C_o, RP3 : La fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue, RP4 : la définition ensembliste, RP5 :si je suis professeur, je présente…, AR : autres réponses, NR : non-réponses

Conformément à notre analyse a priori, la grande majorité des élèves donne la définition ensembliste de la notion de fonction mais la comptine $\mathbf{C_o}$ est cependant proposée par 7% des élèves. Par ailleurs, les fonctions sont définies par 8% des élèves comme des correspondances entre deux ensembles. Tandis que le taux des élèves qui qualifient la notion de fonction de structure qui sert à trouver l'inconnue n'est que de 2%.
Par ailleurs, près du quart des élèves répondent autrement à cette question, 16% expliquent comment ils présenteraient cette notion aux martiens en se mettant à la place de leur professeur tandis que 7% des élèves ne donnent pas de réponse.

2.1.6 Conclusion

Nous pouvons tout d'abord dire que la plupart des élèves définissent les fonctions avec leur définition ensembliste. Le fait que la comptine $\mathbf{C_o}$ et la réponse RP1 soient plus fréquentes et que la définition ensembliste complète des fonctions soit moins fréquente au lycée Anatolien nous amènent à conclure que l'enseignement très proche du concours conduit à négliger des définitions et à favoriser ce type de situations qui sert à mémoriser des résultats d'une définition ou d'un théorème…etc. (cf. la comptine $\mathbf{C_o}$) chez les élèves.
Si l'on regarde les aspects des réponses à cette question, on peut dire que, par exemple, la réponse RP1 est due à l'abus des ensembles lors de l'introduction de la fonction, que la réponse RP2 présente une comptine qui aide les élèves à mémoriser les résultats de la définition des fonctions pour résoudre des questions et que la réponse RP3 vient de l'abus des applications algébriques.
Comme l'a bien dit Sophie RENE DE COTRET dans son article[1] de « petit x », plus on se rapproche des définitions modernes, plus on voit disparaître graduellement la variation, puis la dépendance, dont on peut retrouver quelques traces avec la règle de correspondance, pour finalement aboutir à une pure correspondance. Il est donc normal de constater que dans les réponses des élèves il n'y a aucune définition de la fonction qui porte sur la variation et la dépendance.
Par ailleurs, chez les élèves de terminale, on constate qu'il n'y a aucune réponse relative aux définitions des fonctions. Comme ils sont brillants dans la résolution des autres questions, on peut donc dire que ces élèves résolvent des questions sans savoir de définitions. Cela signifie que, d'une part un enseignement qui ne cherche qu'à établir un automatisme et d'autre part la définition à partir d'ensembles seuls, sont très loins de donner aux élèves une conception de ce qu'est la notion de fonction.

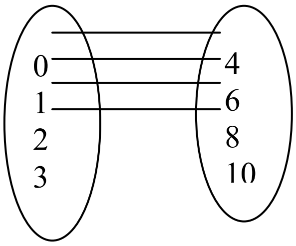
---

[1] RENE DE COTRET. S (1988) : « Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante », petit x n°17 pp. 5-27.

2.2 Question n°2

Cette question n'est pas très complexe pour tous les élèves. Mon objectif est ici de voir si les élèves peuvent trouver l'ensemble image à partir de l'ensemble de définition. J'attends que le taux de réussite soit plus élevé dans toutes les classes.
Voici les catégories des réponses des élèves :

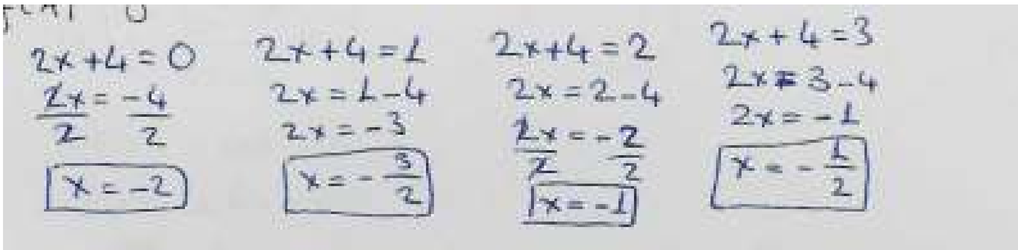
RC1 (Procédure 1) :réponse correcte.
Pour $f(0) = 2 .0 + 4 = 4$
Pour $f(1) = 2 . 1 + 4 = 6$
Pour $f(2) = 2 . 2 + 4 = 8$
Pour $f(3) = 2 . 3 + 4 = 10$ donc $B=\{ 4, 6, 8, 10\}$……..(SA16)
$f(A) = 2 .0 + 4 = 4$
$f(A) = 2 . 1 + 4 = 6$
$f(A) = 2 . 2 + 4 = 8$
$f(A) = 2 . 3 + 4 = 10$ donc $B=\{ 4, 6, 8, 10\}$……..(SB9)



……..(SE9)

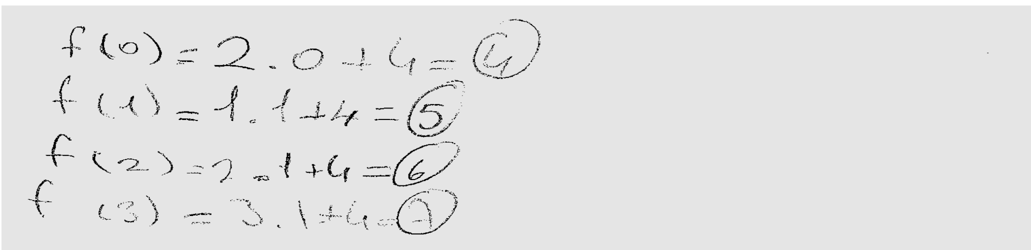
$B=\{ 4, 6, 8, 10\}$……..(T18),(T16)

RC2 : l'élève trouve la bonne réponse en traitant la fonction comme une équation :
Pour $x=0$ $2x+4 \Rightarrow 2.0+4=4$
… …
Pour $x=3$ $2x+4 \Rightarrow 2.3+4=10$ donc $f(A)=\{ 4, 6, 8, 10\}$…….(SA36)
RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image.



(SA4)

RP4 : il y a une confusion entre la variable et le coefficient :



(SF14)

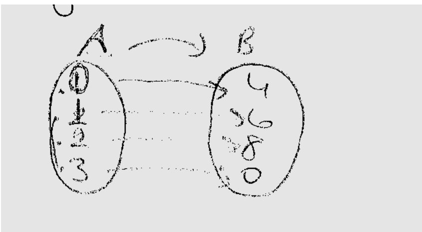
RP5 : erreur de calculs.

RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f . Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut $f(A)=\phi$.

f(x)=2.0+4=4
f(x)=2.1+4=6
f(x)=2.2+4=8
f(x)=2.3+4=10 *comme les éléments ne se présentent pas dans l'ensemble A donc*
f(A)= ϕ *...(SC14), (SC9)*

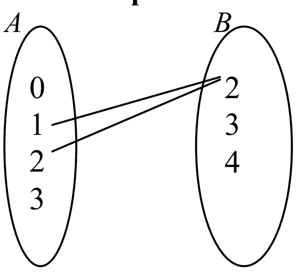
RP7: réponses incomplètes.
f(x)=2x+4=0+4=4
$f_1=2.0+4=4$
$f_2=2.2+4=4+4=8$ *.....(SD28)*

RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0.



(SF39), (SF36),(SF46)

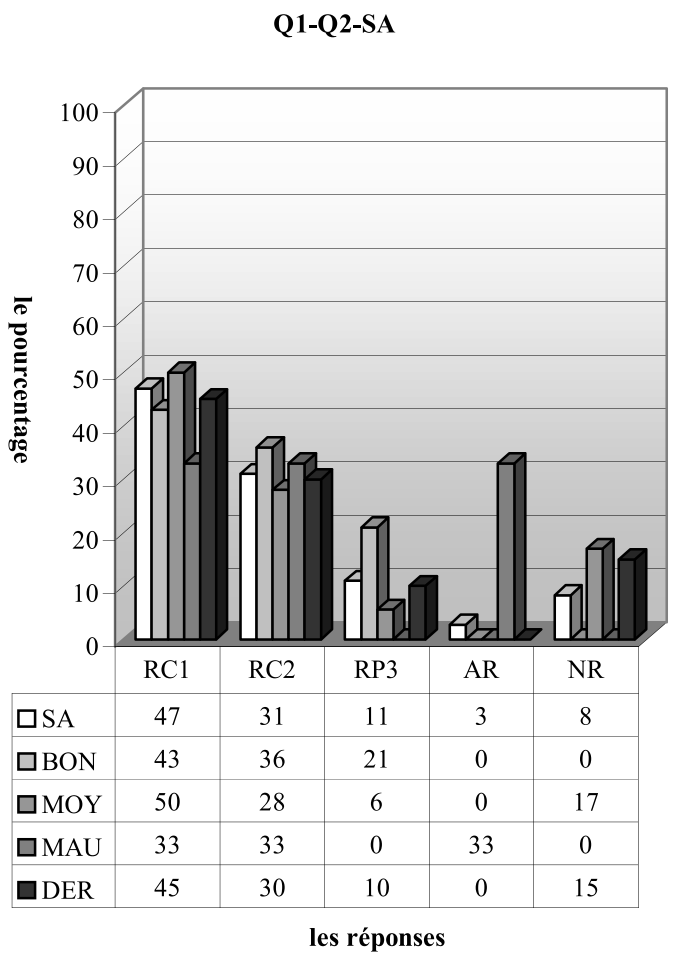
Autres Réponses:



f(A)={0,14}……(SF47),(SF23),(SF26)

Non-réponses :
Maintenant je vais analyser les résultats en donnant les tableaux:

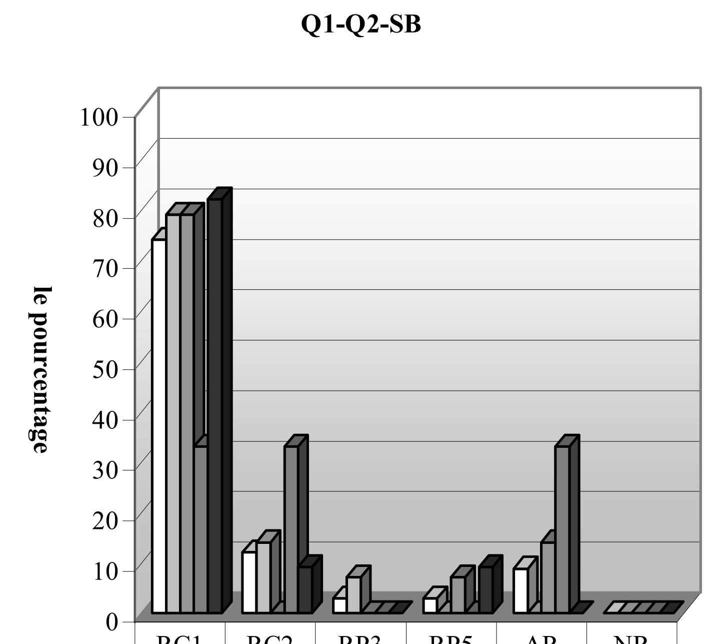
2.2.1 Lycée Anatolien



	RC1	RC2	RP3	AR	NR
SA	47	31	11	3	8
BON	43	36	21	0	0
MOY	50	28	6	0	17
MAU	33	33	0	33	0
DER	45	30	10	0	15

RC1 (Procédure 1) :réponse correcte 1, RC2 : réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4 : confusion entre la variable et le coefficient, RP5 : erreurs de calcul, RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f . Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut f(A)= ϕ *, RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0. AR : autres réponses, NR :non-réponses*

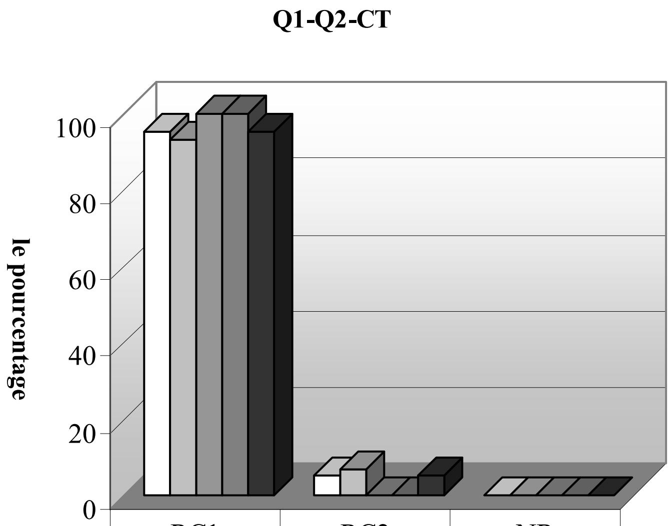
Comme déjà prévu, le taux de réussite est très élevé dans la classe A. Ainsi 78% des élèves fournissent une bonne réponse. 31% d'entre eux résolvent la question comme une équation. Ils ne veulent peut-être pas s'éloigner beaucoup d'un domaine familier. Par ailleurs, le pourcentage des élèves qui confondent l'ensemble image et l'ensemble de définition est de 11%. Un petit nombre des élèves répondent autrement à la question. Tandis que la question n'est pas abordée par 8% des élèves. On peut donc dire que les connaissances élémentaires (trouver l'image des éléments, reconnaître l'ensemble de définition et image) sont disponibles chez la grande majorité des élèves.
En ce qui concerne les résultats des élèves par niveau, une légère différence entre les élèves s'observe par le taux de réussite. Ainsi 79% des bons donnent la bonne réponse contre 78% des moyens et 66% des mauvais. L'erreur consistant à confondre l'ensemble de définition et image est plus fréquente chez les bons. Elle est donc commise par 21% des bons contre 6% des moyens et un pourcentage nul chez les mauvais.
Les trois quarts des élèves de dérsané fournissent une bonne réponse. 10% d'entre eux commettent l'erreur relative au confondrement de l'ensemble de définition et image. Tandis que 15% ne traitent pas la question.



	RC1	RC2	RP3	RP5	AR	NR
SB	74	12	3	3	9	0
BON	79	14	7	0	0	0
MOY	79	0	0	7	14	0
MAU	33	33	0	0	33	0
DER	82	9	0	9	0	0

RC1 (Procédure 1) :réponse correcte 1, RC2 : réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4 : confusion entre la variable et le coefficient, RP5 : erreurs de calcul, RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f . Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut f(A)= ϕ *, RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0. AR : autres réponses, NR :non-réponses*

Le tableau ci-dessus montre qu'en classe la grande majorité des élèves (86%) fournissent une bonne réponse. Seuls 12% des élèves trouvent la bonne réponse en utilisant la procédure P2. Il semble cependant que l'erreur qui consiste à confondre l'ensemble de définition et l'ensemble image perde son importance dans cette classe. Elle est donc commise par seulement 3% des élèves. Ce taux est aussi valable pour les erreurs de calcul.
Quant on regarde les résultats par niveau, on remarque que le taux de réussite à cette question monte à 93% chez les bons élèves. Alors que plus des trois quarts des moyens et deux tiers des mauvais donnent la bonne réponse. L'erreur provoquée par la confusion de l'ensemble de définition et de l'ensemble image ne vient que de la part des bons. 7% d'entre eux commettent donc cette erreur. Par contre les erreurs de calcul sont uniquement réservées aux moyens avec un taux de 7%.
Par ailleurs, le taux de réussite est aussi très satisfaisant chez les élèves de dersané. Alors 91% d'entre eux donnent la bonne réponse. Les seules erreurs qui existent sont des erreurs de calcul qui sont commises par 9% des élèves.



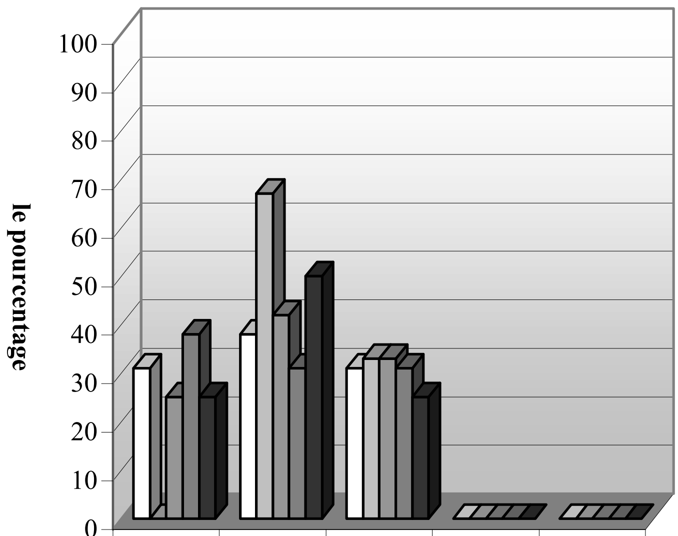
	RC1	RC2	NR
T	95	5	0
BON	93	7	0
MOY	100	0	0
MAU	100	0	0

RC1 (Procédure 1) :réponse correcte 1, RC2 : réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4 : confusion entre la variable et le coefficient, RP5 : erreurs de calcul, RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f . Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut f(A)= ϕ *, RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0. AR : autres réponses, NR :non-réponses*

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, en classe tous les élèves fournissent une bonne réponse. Et seuls 5% d'entre eux traitent la question comme une équation.

2.2.2 Lycée Super

Q1-Q2-SC

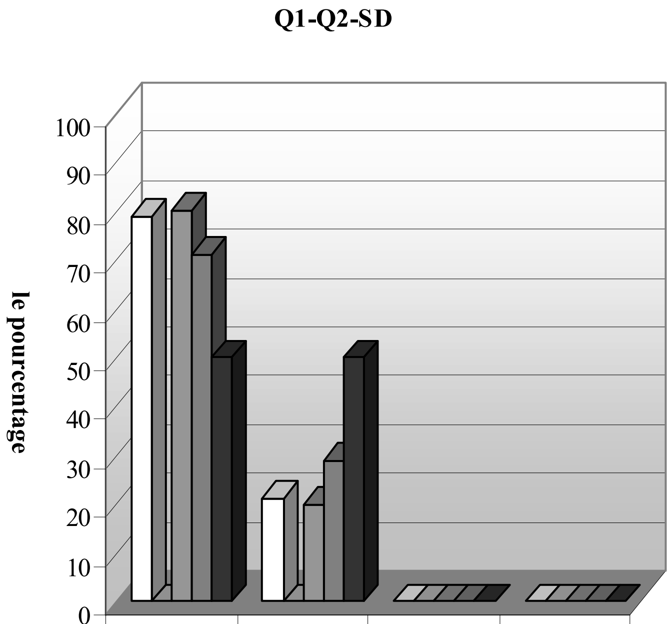


	RC1	RC2	RP6	AR	NR
SC	31	38	31	0	0
BON	0	67	33	0	0
MOY	25	42	33	0	0
MAU	38	31	31	0	0
DER	25	50	25	0	0

les réponses

RC1 (Procédure 1) :réponse correcte 1, RC2 : réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4 : confusion entre la variable et le coefficient, RP5 : erreurs de calcul, RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f . Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut f(A)= ϕ *, RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0. AR : autres réponses, NR :non-réponses*

Remarquons que plus des deux tiers des élèves de la classe C fournissent une bonne réponse. Et ceux qui résolvent la question comme une équation sont plus nombreux. Ainsi 38% des élèves trouvent la bonne réponse à partir de la procédure P2. 31% trouvent cependant les images des éléments de l'ensemble de définition sur f. Ensuite ils cherchent ces images dans l'ensemble de définition au lieu de l'ensemble image. İl est donc évident de dire qu'une bonne partie des élèves ont du mal à reconnaître l'ensemble de définition et l''ensemble image. Par ailleurs, le fait que le pourcentage d'autres réponses et non-réponses soient nuls signifie que la question est très familière aux élèves.
Quant aux résultats par niveau, on constate presque un même taux de réussite chez tous les élèves. Ainsi 67% des bons et moyens donnent la bonne réponse contre 69% des mauvais. Alors cela veut dire que la question n'exprime pas beaucoup la différence entre les niveaux. Il est très intéressant de remarquer que le taux des élèves qui fournissent une bonne réponse à partir de la procédure P1 est plus élevé chez les mauvais (38% contre un quart des moyens et un pourcentage nul chez les bons). L'erreur consistant à chercher les images dans l'ensemble de définition apparaît chez tous les élèves avec un pourcentage très proche (33% des bons et moyens contre 31% des mauvais). Par ailleurs, le taux de réussite atteint 75% chez les élèves de dérsané et les élèves restant commettent l'erreur relative à chercher les images dans l'ensemble de définition.

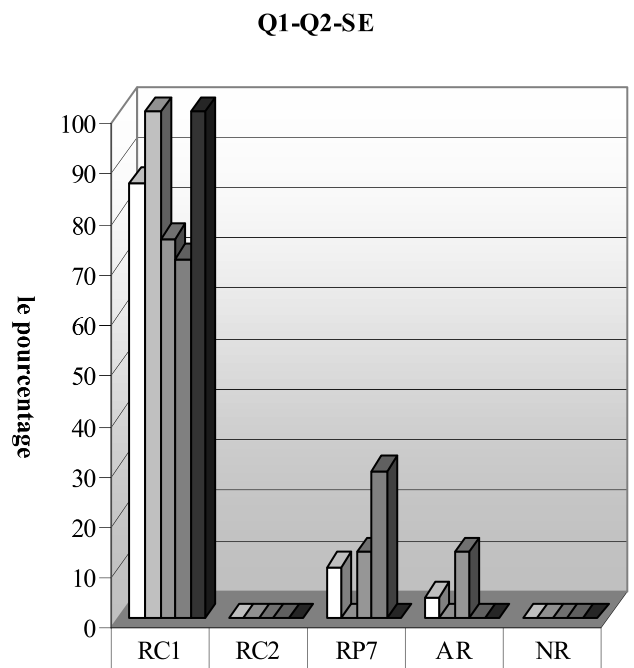


	RC1	RC2	AR	NR
SD	79	21	0	0
BON	0	0	0	0
MOY	80	20	0	0
MAU	71	29	0	0
DER	50	50	0	0

RC1 (Procédure 1) :réponse correcte 1, RC2 : réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4 : confusion entre la variable et le coefficient, RP5 : erreurs de calcul, RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f . Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut f(A)=ϕ , RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0. AR : autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'en classe chaque élève trouve la bonne réponse. La grande majorité des élèves utilisent la procédure P1 (79% contre 21%). Comme il n'y a aucun élève qui s'estime bon, une légère différence entre les moyens et mauvais se constate par les taux de réponses correctes. Ainsi 80% des moyens privilégient la procédure P1 contre 71% des mauvais et 20% des bons utilisent la deuxième procédure contre 29% de ces derniers.
En ce qui concerne les élèves de dérsané, une moitié trouvent la bonne réponse à partir de la procédure P1 et une autre en utilisant la deuxième procédure.

2.2.3 Lycée Normal

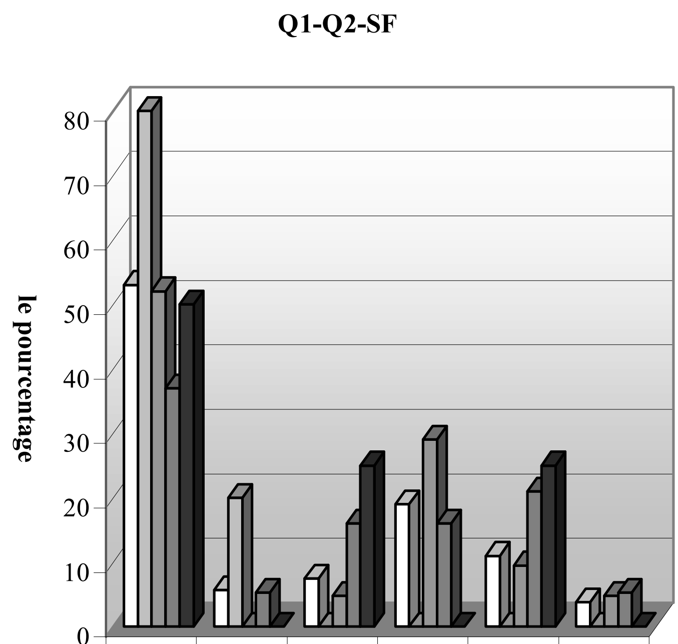


	RC1	RC2	RP7	AR	NR
SE	86	0	10	4	0
BON	100	0	0	0	0
MOY	75	0	13	13	0
MAU	71	0	29	0	0
DER	100	0	0	0	0

les réponses

RC1 (Procédure 1) :réponse correcte 1, RC2 : réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4 : confusion entre la variable et le coefficient, RP5 : erreurs de calcul, RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f . Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut f(A)=ϕ*, RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0. AR : autres réponses, NR :non-réponses*

Dans la seconde E la grande majorité des élèves donnent la bonne réponse comme les classes précédentes. Il n'y a aucun élève qui privilégie la deuxième procédure (P2). 10% d'entre eux n'arrivent pas à terminer la résolution, tandis que le taux d'autres réponses est de seulement 4%.
Quant on regarde les résultats par niveau, on observe que tous les bons fournissent une bonne réponse contre trois quarts des moyens et 71% des mauvais. Les élèves qui donnent des réponses incomplètes sont plus nombreux chez les mauvais. Ainsi 29% d'entre eux ne peuvent pas terminer la résolution de la question contre 13% des moyens. Par ailleurs, tous les élèves de dérsané trouvent aussi la bonne réponse.

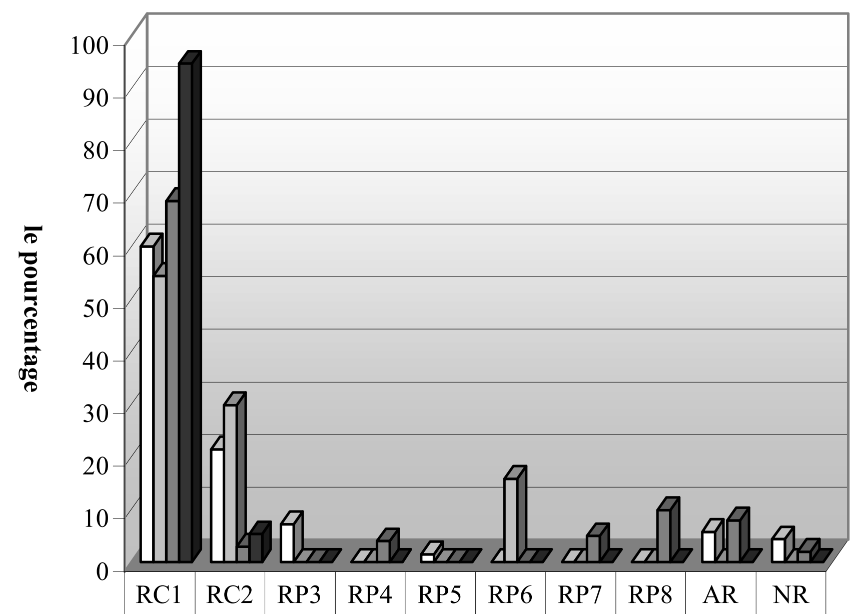


	RC1	RC2	RP4	RP8	AR	NR
SF	53	6	8	19	11	4
BON	80	20	0	0	0	0
MOY	52	0	5	29	10	5
MAU	37	5	16	16	21	5
DER	50	0	25	0	25	0

RC1 (Procédure 1) :réponse correcte 1, RC2 : réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4 : confusion entre la variable et le coefficient, RP5 : erreurs de calcul, RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f . Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut $f(A)=\phi$*, RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0. AR : autres réponses, NR :non-réponses*

Quant à la classe F plus de la moitié des élèves peuvent fournir une réponse correcte. Et 5,7% d'entre eux préfèrent traiter la question dans le cadre algébrique. Une bonne partie des élèves (19%) commettent l'erreur du traitement de l'image de 3. Tandis que l'erreur de la confusion entre la variable et le coefficient de x est commise par 7,5% des élèves. Environ 4% ne répondent pas à la question et 11% des élèves deviennent perplexes face à la question.
Comme dans la classe précédente, tous les bons élèves fournissent une réponse correcte. Ce taux descend à 52% chez les moyens et 42% chez les mauvais. Le taux de bonne réponse à partir de la procédure P1 est toujours plus élevé chez tous les élèves (80% des bons contre 52% des moyens et 37% des mauvais). Il est donc possible de dire que ces élèves n'ont pas beaucoup de difficultés à utiliser deux cadres ensembles : cadre algébrique et cadre fonctionnel. L'erreur consistant à confondre la variable et le coefficient de x est plus fréquente chez les mauvais. Alors 16% de ces derniers commettent cette erreur contre environ 5% des moyens. Par contre le taux de l'erreur relative au traitement de l'image de 3 est plus élevé chez les moyens (29% contre 16% des mauvais). Par ailleurs, la moitié des élèves de dérsané fournissent une réponse correcte. Et un quart d'entre eux confondent la variable et le coefficient de x.

2.2.4 Résultats des élèves par lycée



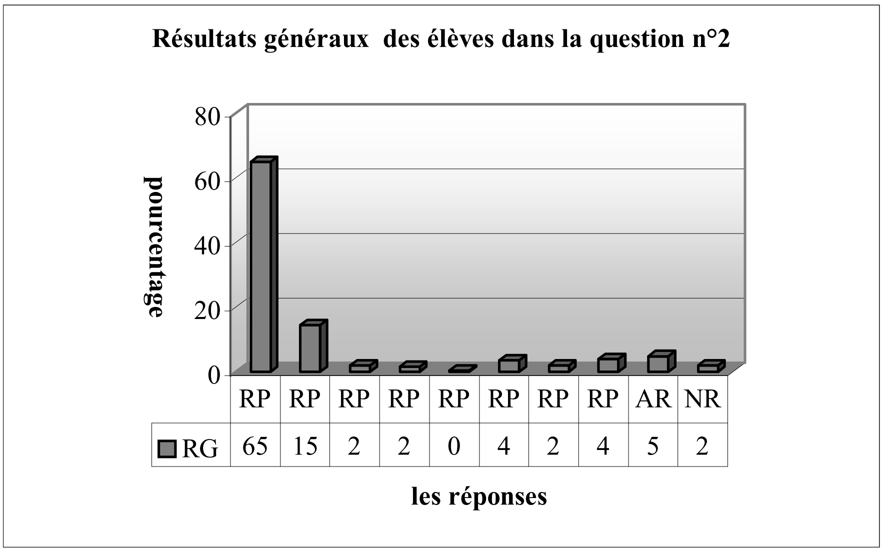
	RC1	RC2	RP3	RP4	RP5	RP6	RP7	RP8	AR	NR
LA	60	21	7	0	1	0	0	0	6	4
LS	54	30	0	0	0	16	0	0	0	0
LN	69	3	0	4	0	0	5	10	8	2
T	95	5	0	0	0	0	0	0	0	0

RC1 (Procédure 1) :réponse correcte 1, RC2 : réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4 : confusion entre la variable et le coefficient, RP5 : erreurs de calcul, RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f . Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut f(A)= ϕ *, RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0. AR : autres réponses, NR :non-réponses*

Le tableau ci-dessus montre qu'il n'y pas de grande différence entre les taux de réussites. Ainsi 81% des lycéens anatolien donnent la bonne réponse contre 84% des lycéens super et 72% des lycéens normal. Chaque élève de terminale fournit cependant une réponse correcte. On peut donc dire que les élèves de trois lycées sont très habitués à ce type des questions basiques. Les reconnaissances élémentaires, trouver une image, reconnaître l'ensemble de définition et l'ensemble image, sont disponibles chez la plupart des élèves.
Les élèves qui résolvent correctement la question à partir de la procédure P2 sont beaucoup moins nombreux chez les élèves du lycée Normal. Environ 3% d'entre eux trouvent la bonne réponse en utilisant cette procédure contre 30% des lycéens super et 21% des lycéens anatolien. Cela signifie que les élèves du lycée Normal ont moins de difficultés à accepter la notation du nouveau sujet.
Il est toutefois très intéressant de constater qu'il n'y a aucune erreur commune. Alors l'erreur qui consiste à confondre l'ensemble de définition et l'ensemble image est uniquement réservée aux élèves du lycée Anatolien avec un taux de 7%. Et il y a seulement 4% des lycéens normal qui commettent l'erreur relative à la confusion entre la variable et le coefficient. Ensuite les erreurs de calcul n'apparaissent que chez les anatoliens. Un très faible pourcentage de ces derniers font donc ce type des erreurs (1,4%). L'erreur provoquée par chercher les images des éléments dans l'ensemble de définition n'est commise que par 16% des élèves du lycée Super. Par ailleurs, on ne constate les réponses incomplètes que dans le lycée Normal et presque 5% des élèves n'arrivent pas à terminer la

résolution de la question. Les élèves qui trouvent zéro image de 3 ne sont présents que dans le lycée Normal. Leur pourcentage atteint 10%.

2.2.5 Résultats généraux des élèves



RC1 (Procédure 1) :réponse correcte 1, RC2 : réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4 : confusion entre la variable et le coefficient, RP5 : erreurs de calcul, RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f . Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut f(A)= ϕ *, RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0. AR : autres réponses, NR :non-réponses*

Le tableau ci-dessus montre que la plupart des élèves répondent correctement à cette question (80%, RP1+RP2), 15% d'entre eux trouvent la bonne réponse en traitant la fonction comme une équation, 5% des élèves répondent autrement. Tandis que la question n'est pas abordée par seulement 2% des élèves. Les erreurs les plus fréquentes sont les erreurs des réponses RP6 et RP8 avec un taux de 4%. L'erreur qui consiste à confondre l'ensemble de définition avec l'ensemble image est seulement le fait de 2% des élèves. Ce taux est aussi valable pour l'erreur consistant à confondre la variable et le coefficient pour les réponses incomplètes.

2.2.6 Conclusion

Les données recueillies semblent confirmer nos attentes : la majorité des élèves s'est sentie à l'aise pour répondre à cette question (2% de non-réponses). Par ailleurs, nous pouvons dire que la plupart des élèves ont le niveau technique et que les connaissances essentielles indiquées par le programme (trouver les ensembles correspondant à la fonction : ensemble de définition, ensemble image…etc.) sont disponibles chez eux. En ce qui concerne les erreurs, elles sont peu fréquentes, changent suivant les lycées et il n'y a aucune erreur commune.

2.3 Question n°3

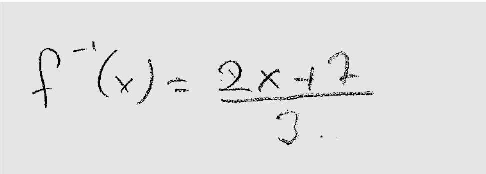
Cette question présente un double intérêt. D'une part elle sert à étudier si les élèves savent trouver l'inverse d'une fonction affine et d'autre part elle permet de repérer les techniques qui sont privilégiées par les élèves.

Je présente maintenant les catégories de réponses des élèves :

RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes.

$f^{-1}(x)=\frac{-2x+7}{-3}$ *…….(SB29),(SB2)*

$f^{-1}(x)=\frac{-2x+7}{-3}=\frac{+2x+7}{+3}=\frac{2x+7}{3}$ *……..(SB21) change d'abord les places et les signes. Ensuite il divise les signes sans prendre en compte 7.*



RP2 : L'élève change seulement les places de 3 et 2.

$f(x)=\frac{3x+7}{2}$ *donc* $f^{-1}(x)=\frac{2x+7}{3}$ *…..(SA12) (SA13)*

$f^{-1}(x)=\frac{2x+7}{3}$ *<u>j'ai oublié l'autre démarche…..(SB31)</u>*

L'élève trouve l'inverse en changeant seulement les places. Ensuite il trouve l'image de un nombre : $f^{-1}(x)=\frac{2x+7}{3}$ *…. Pour x=1* $f^{-1}(x)=\frac{2.1+7}{3}=\frac{9}{3}=3$ *……(SD17),(SD20),(SD28)*

RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux.

$f^{-1}(x)=\frac{2x+7}{-3}$ *….(SA35)*

$f^{-1}(x)=\frac{-2x+7}{3}$ *……(SB13)*

RP4 (Procédure 4) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette $\mathbf{R_a}$.

$f^{-1}(x)=\frac{-2x+7}{-3}=\frac{2x-7}{3}$ *………(SA17)*

$f^{-1}(x)=\frac{-2x+7}{-3}=\frac{2x-7}{3}$

j'ai oublié l'autre démarche…..(SB17)

$f^{-1}(x)=\frac{2x-7}{3}$ *J'ai oublié l'autre technique……..(SB30)*

RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$.

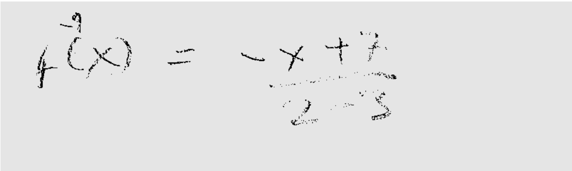
$y=\frac{3x+7}{2}$*, 2y=3x+7, 2y-7=3x….. x=* $\frac{2y-7}{3}$ *donc* $f^{-1}(x)=\frac{2x-7}{3}$ *………(SE8),(SE4),(SE6)*

y=3x+7, 2y=3x+7, $\frac{2y-7}{3}=x$ $f^{1}(x)=\frac{2x-7}{3x}$ *…….(SE51),(SE52),(SE41)*

RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ hors les précédentes (RP2, RP3).

$f^{-1}(x)=\frac{-2x+1}{7}$ *…….l'élève change le signe de 2 . il supprime 3 et descend 7 (SA1)*

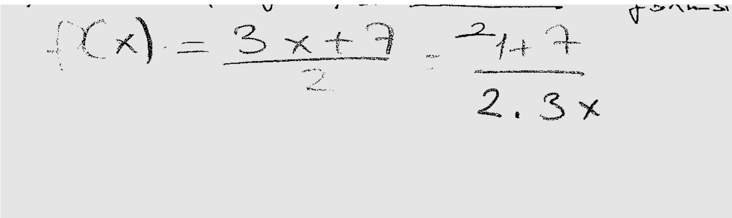
$f^{-1}(x) = \frac{-2x-7}{-3}$ ... $f^{-1}(x) = \frac{2x+7}{3}$ *…….l'élève change d'abord tous les signes. Et puis il retourne à ce point qu'il a commencé (SA25).*



(SA26)

$f^{-1}(x) = \frac{x-7}{2-3}$ *….(SA2)*

$f^{-1}(x) = \frac{0x+7}{2-3} = \frac{7}{-1} = -7$ *…….(SC1)*



(SC11)

$f^{-1}(x) = \frac{x-7}{\frac{2}{3}}$ *…….l'élève change le signe de 7 . Ensuite il divise 2 par 3 (SC25).*

$f(x) = \frac{3x+7}{2} = \frac{x+7}{2-x}$ *……(SD16)*

$f(x) = \frac{3x+7}{2}$, $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{2-3}$ *…….(SD2)*

$\frac{3x+7}{2} = \frac{x+7}{2-3}$ *…….(SD1)*

$f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3}$ *…….(SD22)*

$f^{-1}(x) = \frac{x+7}{2}$, $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3}$ *……..(SD24)*

RP7: réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$.

$\frac{y}{1} = \frac{3x+7}{2}$..... $\frac{3x}{3} = \frac{2y-7}{3}$ ...$f^{-1}(x)$ *…….(SE54)*

$y = \frac{3x+7}{2}$, $2y=3x+7$, $3x=2y-7$, $x = \frac{2y-7}{3}$ $f(x)=y$, $f(y)=1$, $f(x)^{-1}$ *………(SE45)*

$2y\ \frac{3x+7}{2}.2$ ....$2y=3x+7$, $\frac{3x=2y-7}{3\quad 3}$, $x = \frac{2y-7}{3}$ *…….(SF39)*

$f(x)=y$, $f(y) = \frac{3x+7}{2}$, $2y=2x+1$, $\frac{2y-7}{3} = x$, $2y = \frac{3x+7}{2}.2$

$y=3x+4$, $f(x)=3x+4$ *………..(SF9),(SF31)*

$f(x)=y$ $\quad 2y=3x+7 \quad 2\cdot y=\dfrac{3x+7}{\cancel{2}}.\cancel{2}$

$f(y)=\dfrac{3x+7}{2} \quad \dfrac{2y-7}{3}=x \quad y=3+1$

f

(SF45)

$f(x)=2y=\dfrac{3x+7}{2}$, $2y=3x+7$, $\dfrac{2y-7}{3}=\dfrac{3x}{3}$, $y=\dfrac{2y-7}{3}$, $f^{-1}(x)=\dfrac{2y-7}{3}$ ……*(SF44)*

$2x=\dfrac{3x+7}{2}$, $\dfrac{2x-7}{3}=\dfrac{3x}{3}$, $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+7}{3}$ …….*(SF17)*

RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode $\mathbf{M}_{\mathbf{xfy}}$.

$2y=\dfrac{3x+7}{2}.2$, $2y=3x+7$, $\dfrac{2y-3}{7}=\dfrac{3x}{3}$, $x=\dfrac{2y-1}{3}$, $f^{-1}(x)=\dfrac{2x-1}{3}$ …….*(SF5),(SF36)*

$f(x)=y$, $y=2\dfrac{3x+7}{2}.2$, $y=3x+7$, $y=\dfrac{3x}{3}+\dfrac{7}{3}$, $y=\dfrac{7}{3}$, $f^{-1}(x)=\dfrac{7}{3}$ ……..*(SF38),(SF15)*

Autres Réponses :

$f(x)=\dfrac{3x+7}{2}$, $f(x)=\dfrac{-2x+7}{-3}$ $=-2x+7=3$, $=x=-5$…….*(SA11)*

$\dfrac{3x+7}{2}=x$, $3(x+7).2=x$, $3x+21.2=x$, $3x+42=x$, $14=x$…….*(SA27)*

$\dfrac{3.(-1)-7}{2}=\dfrac{-3-7}{2}=-5$ ……..*(SB7)*

$f^{-1}(x)=6x+7$……*(SF22),(SF49)*

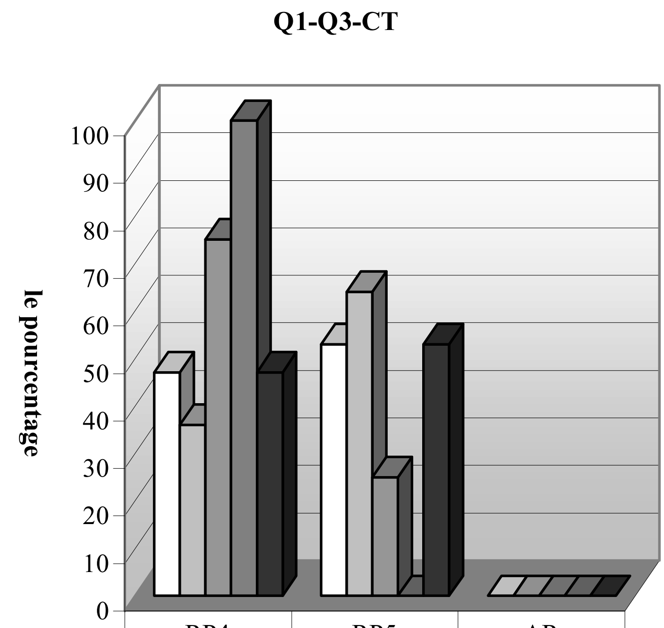
$f^{-1}(x)$ $\dfrac{3x+7}{2}.2$, $f^{-1}(x)=3x+7$…….*(SF42)*

Non-Réponses :

Voici les résultats lycée par lycée :

2.3.1 Lycée Anatolien

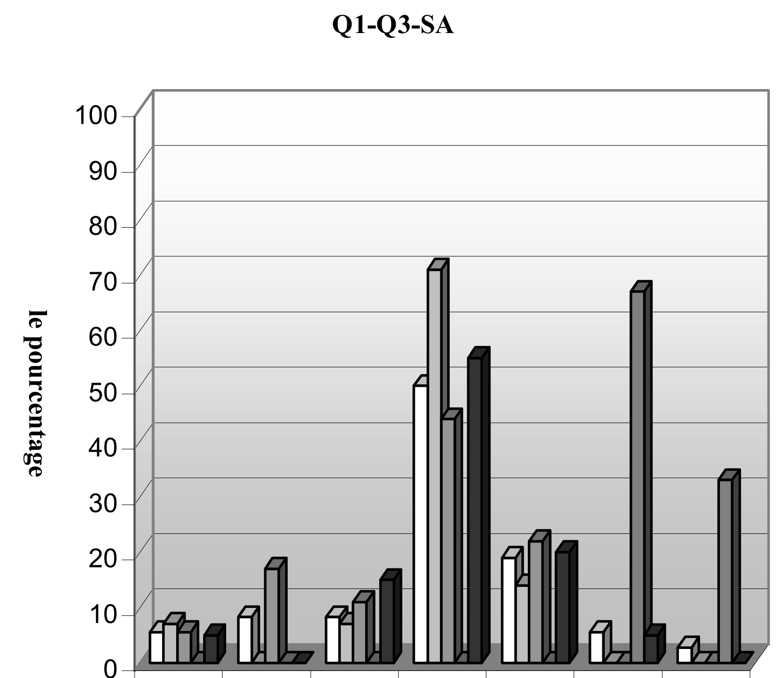
Dans ce lycée j'attends que la recette $\mathbf{R_a}$ soit trop privilégiée par les élèves. Il me semble évident que les erreurs liées à cette recette se présenteront dans les résultats des élèves surtout chez les élèves en difficulté.



	RP4	RP5	AR
T	47	53	0
BON	36	64	0
MOY	75	25	0
MAU	100	0	0
DER	47	53	0

RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_a, RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{xfy}, RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7: réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{xfy}, RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{xfy}. AR : autres réponses, NR : non-réponses

Je commence par les résultats de la classe de terminale :
Comme le montre bien le tableau ci-dessous, en classe, le taux de réussite est de 100%. 47% des élèves trouvent la bonne réponse en utilisant la recette $\mathbf{R_a}$. Tandis que les autres (soit 53%) utilisent la méthode « trouver x en fonction de y ». Comme la forme de la question ne permet pas facilement d'utiliser le phénomène, on peut donc dire que la plupart des élèves préfèrent être prudente en évitant des risques de ce dernier.
Quant aux résultats des élèves par niveau, une grande différence entre les moyens et bons s'observe par le taux des techniques privilégiées. Ainsi trois quarts des moyens favorisent la recette $\mathbf{R_a}$ contre 36% des bons. Et tous les mauvais utilisent aussi cette recette. Cela dit que plus le niveau des élèves descend, plus l'utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ monte.



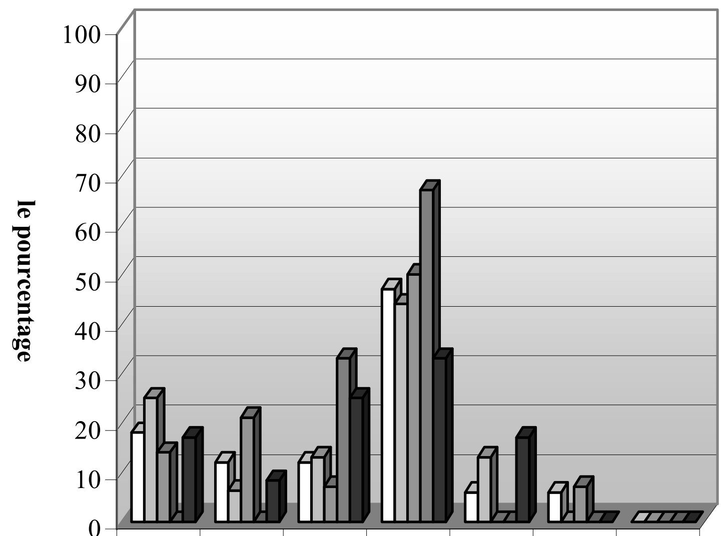
	RP1	RP2	RP3	RP4	RP6	AR	NR
SA	6	8	8	50	19	6	3
BON	7	0	7	71	14	0	0
MOY	6	17	11	44	22	0	0
MAU	0	0	0	0	0	67	33
DER	5	0	15	55	20	5	0

les réponses

RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_a, RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{xfy}, RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7: réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{xfy}, RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{xfy}. AR : autres réponses, NR : non-réponses

Le tableau ci-dessus montre que la moitié des élèves fournissent une bonne réponse en utilisant la recette $\mathbf{R_a}$. Si l'on compte les réponses RP4 et RP1 ensembles, le taux de réussite atteint 56% dans cette classe. Par contre il n'y a aucun élève qui trouve la bonne réponse à partir de la méthode « trouver x en fonction de y », 19% des élèves commettent cependant des erreurs liées à la recette $\mathbf{R_a}$ hors les réponses RP2 et RP3, 8,3% des élèves changeant seulement les places de 2 et 3. Ce taux est aussi valable pour les élèves qui oublient de changer le signe de l'un des deux nombres. Si on prend en compte les réponses RP2, RP3 et RP6 ensembles, on constate donc que le pourcentage des erreurs provoquées par l'utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ atteint 36%. Par ailleurs, la question n'est pas abordée par un très petit nombre des élèves. Et environ 6% répondent autrement à la question.
Quant aux résultats des élèves par niveau, on observe que les élèves qui donnent la bonne réponse en utilisant la recette $\mathbf{R_a}$ sont plus nombreux chez les bons élèves. Ainsi 71% de ces derniers fournissent une réponse correcte contre 44% des moyens et aucune réponse correcte de la part des mauvais. Par contre, les erreurs liées à la recette sont plus fréquentes chez les moyens. La moitié d'entre eux commettent donc ce type d'erreurs contre 21% des bons. Ce qui signifie que l'utilisation des techniques plus pratiques comme recette $\mathbf{R_a}$ ne pose pas plus de problèmes chez les bons élèves. Une grande majorité des mauvais deviennent perplexes face à la question et un tiers d'entre eux ne donnent pas de réponse.

Q1-Q3-SB



	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SB	18	12	12	47	6	6	0
BON	25	6	13	44	13	0	0
MOY	14	21	7	50	0	7	0
MAU	0	0	33	67	0	0	0
DER	17	8	25	33	17	0	0

les réponses

RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_a, RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{xfy}, RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7: réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{xfy}, RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{xfy}. AR : autres réponses, NR : non-réponses

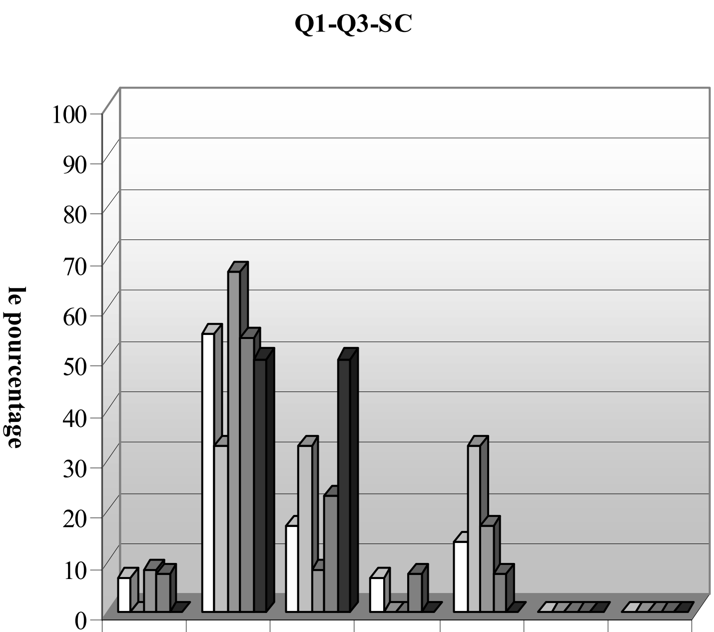
Selon le tableau ci-dessus, près de la moitié des élèves à partir de recette $\mathbf{R_a}$ et, environ 6% en utilisant la méthode « trouver x en fonction de y », fournissent une réponse correcte. Si l'on compte aussi la réponse RP1 comme réponse correcte, le taux de réussite monte jusqu'à 71%. Les erreurs relatives à la recette $\mathbf{R_a}$ sont cependant commises par 24% des élèves. Le fait que chaque élève réponde à la question et un très faible pourcentage d'autres réponses montre que la question est assez familière aux élèves.

Si l'on regarde les résultats des élèves par niveau, on constate que le taux de réussite à cette question est plus élevé chez les bons en prenant en compte la réponse RP1. Ainsi 82% des bons fournissent une réponse correcte contre 64% des moyens et 67% des mauvais. Seuls 13% des bons trouvent cependant la bonne réponse à partir de la méthode plus mathématisée. Le taux des erreurs liées à la recette $\mathbf{R_a}$ augmente des bons aux mauvais. Alors 19% des bons commettent ces erreurs contre 28% des moyens et 33% des mauvais.

En ce qui concerne les résultats des élèves de dérsané, 67% des élèves donnent la bonne réponse. Et seuls 17% d'entre eux privilégient la méthode « trouver x en fonction de y ». Une bonne partie des élèves échouent cependant à cause d'une mauvaise-utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$.

2.3.2 Lycée Super

Dans ce lycée je n'attends pas non plus que la plupart des élèves soient fidèles à la démarche plus mathématisée.



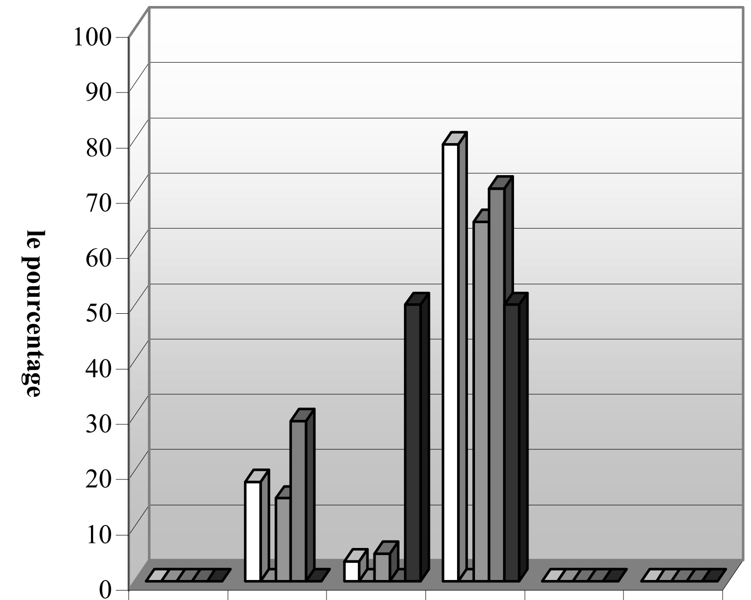
	RP1	RP2	RP3	RP4	RP6	AR	NR
SC	7	55	17	7	14	0	0
BON	0	33	33	0	33	0	0
MOY	8	67	8	0	17	0	0
MAU	8	54	23	8	8	0	0
DER	0	50	50	0	0	0	0

les réponses

RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_a, RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{xfy}, RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7: réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{xfy}, RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{xfy}. AR : autres réponses, NR : non-réponses

Remarquons qu'en classe seuls 7% des élèves donnent la bonne réponse et ce taux double avec la réponse RP1. Par ailleurs, il n'y a aucun élève qui traite la question à partir de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$.
Quant aux erreurs commises par les élèves, elles sont bien entendu des erreurs relatives au phénomène. Ainsi plus de la moitié des élèves ne changent que les places de 2 et 3. De plus 17% changent les places mais ils oublient de changer le signe de l'un des deux. Enfin 14% des élèves commettent aussi des erreurs liées à la recette $\mathbf{R_a}$ hors les précédentes. Si l'on regroupe donc les erreurs du phénomène, on observe que 86% des élèves sont très loin de savoir utiliser cette recette. Il est cependant très intéressant de constater que tous les élèves abordent la question et qu'il n'y a aucune autre réponse. On peut donc dire que la question est assez familière aux élèves.
En ce qui concerne les résultats par niveau, seuls 8% des mauvais fournissent une réponse correcte. Et ce taux double avec la réponse RP1. Les erreurs relatives à la recette $\mathbf{R_a}$ sont plus fréquentes chez les bons. Alors chaque bon fait ces erreurs contre 92% des moyens et 85% des mauvais.
Chez les élèves de dérsané, il n'y a aucun élève qui donne la bonne réponse. Ils se distinguent en deux groupes. Une moitié changent seulement les places de 2 et 3 et l'autre change les places mais ils oublient de changer le signe de l'un des deux nombres.

Q1-Q3-SD



	RP1	RP2	RP3	RP6	AR	NR
SD	0	18	3,6	79	0	0
BON	0	0	0	0	0	0
MOY	0	15	5	65	0	0
MAU	0	29	0	71	0	0
DER	0	0	50	50	0	0

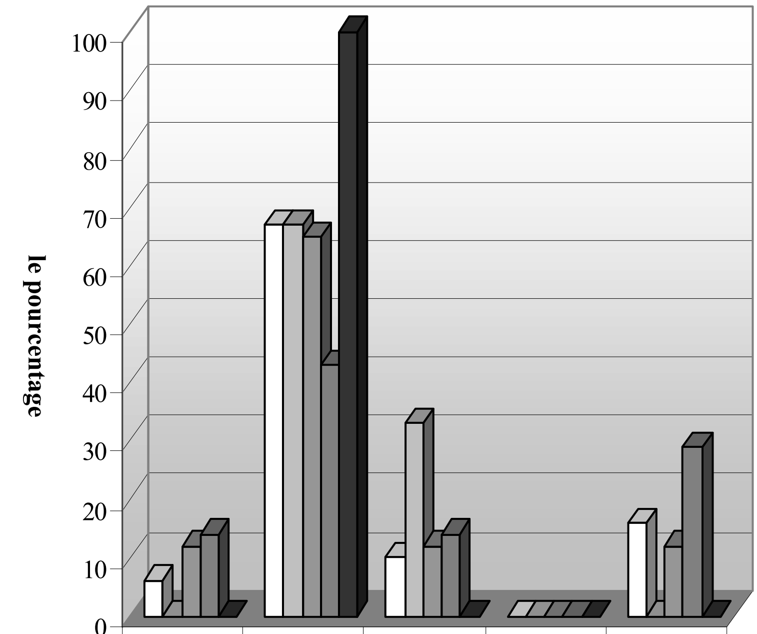
les réponses

RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_a, RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{xfy}, RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7: réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{xfy}, RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{xfy}. AR : autres réponses, NR : non-réponses

Quant à la deuxième classe du lycée Super, il est très intéressant de noter qu'aucun élève ne peut trouver la bonne réponse. Tous les élèves abordent utilitairement la question comme la classe précédente : 18% des élèves commettent l'erreur consistant à changer seulement les places. Alors que le taux des élèves qui traitent la question en changeant les places et un seul signe est de 36%. La grande majorité des élèves (79%) font des erreurs liées à la recette $\mathbf{R_a}$ hors les réponses RP2 et RP3.
Par ailleurs, l'erreur consistant à changer seulement les places de 2 et 3 est plus fréquente chez les mauvais. Ainsi 29% d'entre eux commettent cette erreur contre 15% des moyens. Seuls 5% des moyens changent les places et un seul signe. 71% des mauvais commettent les erreurs liées à la recette $\mathbf{R_a}$ hors les réponses RP2 et RP3. Ce taux descend à 65% chez les moyens.

2.3.3 Lycée Normal

Je suppose que ce lycée se distinguera d'autres à partir de l'utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ et des erreurs commises par les élèves. Il me paraît que le taux de réussite ne doit pas être plus élevé que dans les autres.



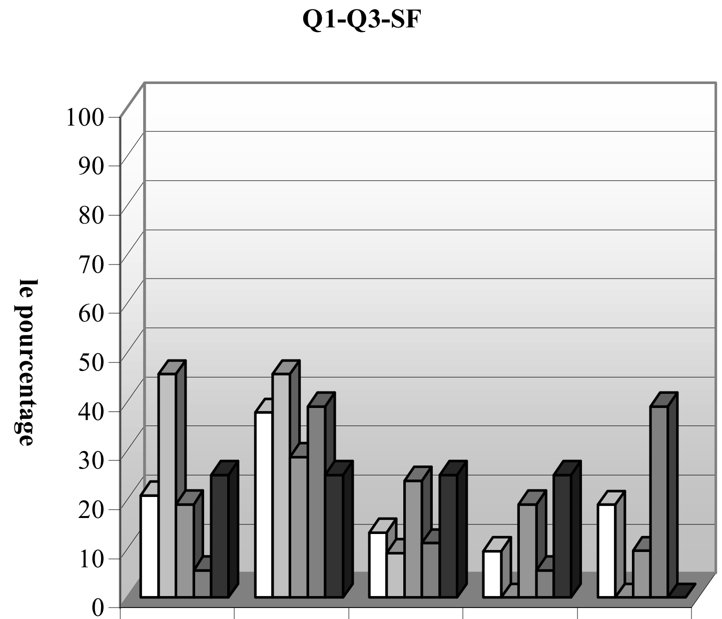
	RP4	RP5	RP7	AR	NR
SE	6	67	10	0	16
BON	0	67	33	0	0
MOY	12	65	12	0	12
MAU	14	43	14	0	29
DER	0	100	0	0	0

R

P1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_a, RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{xfy}, RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7: réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{xfy}, RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{xfy}. AR : autres réponses, NR : non-réponses

En classe de seconde E, les élèves utilisent très majoritairement (78%) la longue procédure pour cette question, 67% d'entre eux peuvent trouver la bonne réponse. Avec les deux méthodes le taux de réussite monte jusqu' à 73,1% ce qui est contraire à mes attentes. 10% des élèves ne peuvent pas arriver à la fin dans la démarche plus mathématisée. Une bonne partie des élèves (16%) ne touchent pas la question.

Si l'on regarde les résultats des élèves par niveau, on constate qu'aucun bon n'utilise le phénomène. Par contre 12% des moyens et 14% des mauvais trouvent la bonne réponse à partir de ce dernier. Les élèves qui fournissent une réponse correcte en privilégiant la méthode « trouver x en fonction de y » sont plus nombreux chez les bons (67% des bons contre 65% des moyens et 43% des mauvais). Par ailleurs un tiers des bons n'arrivent pas à terminer la résolution de la question dans la démarche plus mathématisée contre 12% des moyens et 14% des mauvais.



	RP5	RP7	RP8	AR	NR
SF	21	38	13	9	19
BON	46	46	9	0	0
MOY	19	29	24	19	10
MAU	6	39	11	6	39
DER	25	25	25	25	0

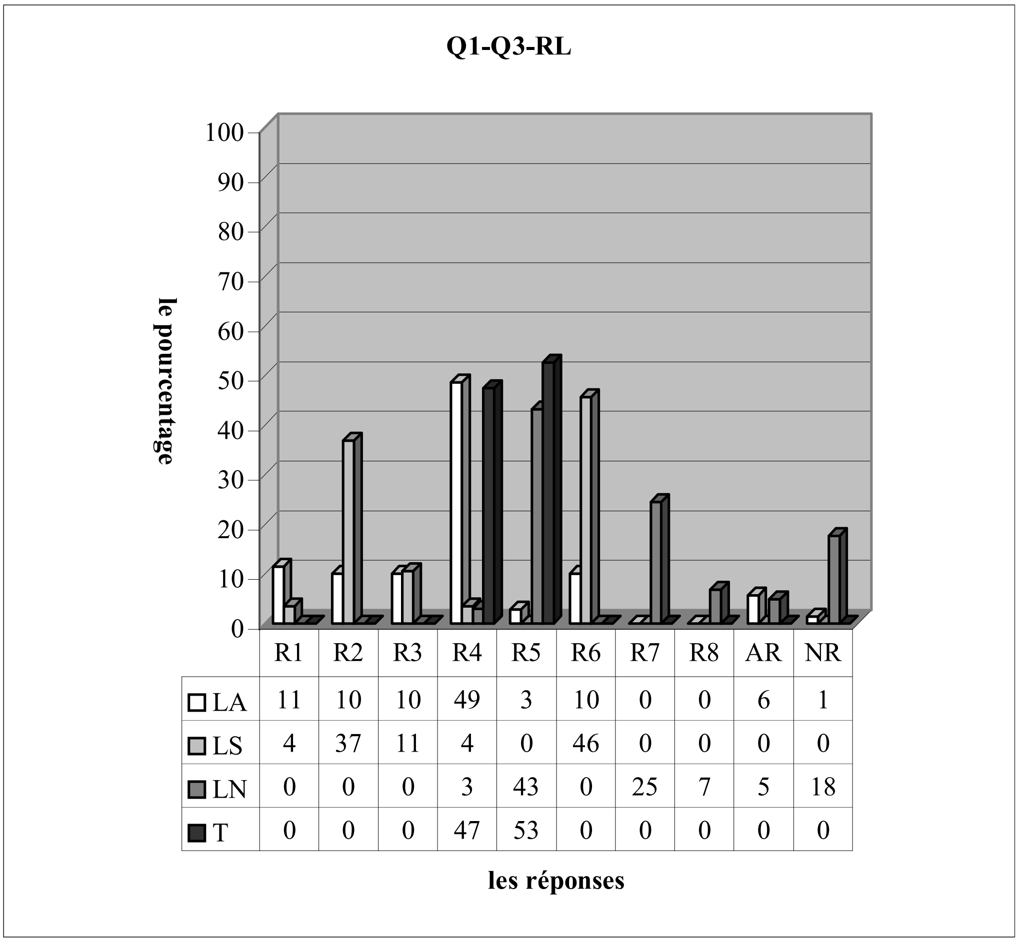
les réponses

RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_a, RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{xfy}, RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7: réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{xfy}, RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{xfy}. AR : autres réponses, NR : non-réponses

Pour l'autre classe, le taux de réussite descend à 21%. Il n' y a aucun élève qui utilise la recette $\mathbf{R_a}$. Environ 38% des élèves donnent des réponses incomplètes. C'est-à-dire qu'ils peuvent retirer x dans l'équation mais ils n'arrivent pas à passer au-delà de cette étape. Les erreurs algébriques sont cependant commises par 13,2% des élèves, environ 19% des élèves ne répondent pas à la question, tandis que le taux d'autres réponses est de 9%.
Si l'on regarde les résultats des élèves par niveau, on observe que le taux de réussite est plus élevé chez les bons. Alors près de la moitié de ces derniers fournissent une réponse correcte contre 19% des moyens et 6% des mauvais. Par ailleurs, les réponses incomplètes sont moins nombreuses chez les moyens. 29% d'entre eux n'arrivent pas à terminer la résolution de la question contre 46% des bons et 39% des mauvais. Les erreurs algébriques sont plus fréquentes chez les moyens. Ainsi 24% d'entre eux commettent ces erreurs contre 9% des bons et 11% des mauvais.

2.3.4 Résultats des élèves par lycée

En ce qui concerne les résultats généraux des lycées :

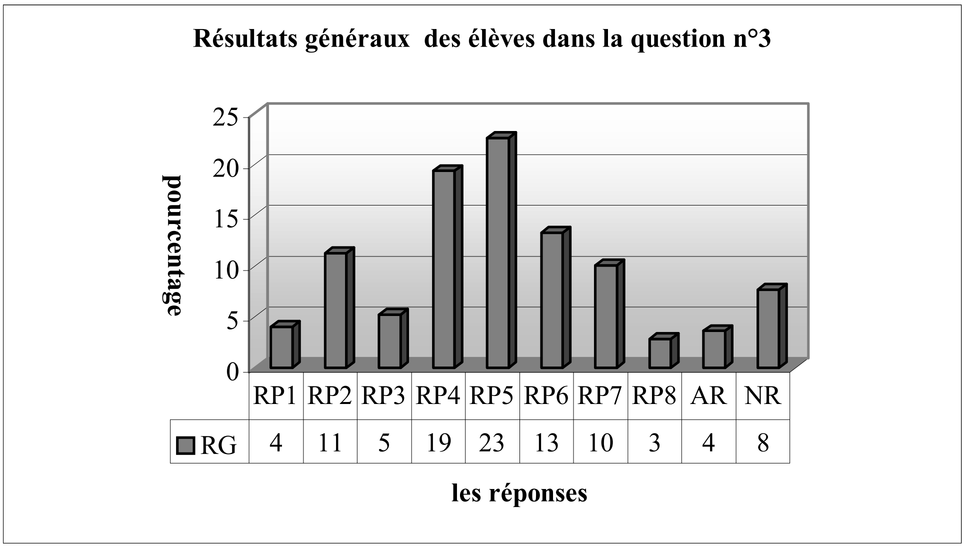


	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	AR	NR
LA	11	10	10	49	3	10	0	0	6	1
LS	4	37	11	4	0	46	0	0	0	0
LN	0	0	0	3	43	0	25	7	5	18
T	0	0	0	47	53	0	0	0	0	0

RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_a, RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{xfy}, RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7: réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{xfy}, RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{xfy}. AR : autres réponses, NR : non-réponses

Si on ne prend pas en compte le très petit nombre des élèves du lycée Normal (environ 3%) qui utilisent la recette $\mathbf{R_a}$ et celui des élèves du lycée Anatolien qui privilégient la démarche partant sur la définition de la fonction inverse (presque 3%), il est très facile de dire que les lycées se distinguent en deux groupes différents suivant les méthodes préférées par les élèves pour traiter la question. Dans le lycée Anatolien et super la quasi-totalité des élèves abordent la question en changeant les places de 2 et3 et leurs signes. Plus de la moitié des élèves dans le premier et 7% des élèves dans le deuxième trouvent la bonne réponse dans cette procédure. Dans le lycée Normal, près de la moitié des élèves ont du succès dans la démarché plus mathématisée. 25% d'entre eux ne peuvent pas arriver jusqu'au bout et environ 7% d'entre eux font des erreurs algébriques.

2.3.5 Résultats généraux des élèves



RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_a, RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{xfy}, RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7: réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{xfy}, RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{xfy}. AR : autres réponses, NR : non-réponses

Selon le tableau suivant, il y a 42% des élèves qui trouvent la bonne réponse, 23% d'entre eux privilégient la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$, tandis que le taux des élèves qui arrivent correctement à résoudre la question en utilisant la recette $\mathbf{R_a}$ est de 19%. 33% des élèves ont échoué à cause de la mauvaise utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ (RP1+RP2+RP3+RP6). Ce taux descend à 13% chez les élèves qui échouent en utilisant la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ (RP7+RP8). Si l'on ne qualifie pas les réponses incomplètes (RP7) d'erreurs, ce taux perd son importance et descend jusqu'à 3%. Par ailleurs, la question n'est pas abordée par 8% des élèves tandis que 4% donnent d'autres réponses.

2.3.6 Conclusion

Comme nous l'avons prédit lors de l'analyse a priori, la recette $\mathbf{R_a}$ est majoritairement utilisée dans les lycées anatolien et super. En revanche dans le lycée Normal il y a un très petit nombre des élèves qui utilisent cette recette. Par ailleurs, le nombre des élèves qui échouent en utilisant la recette $\mathbf{R_a}$ est plus important que celui des élèves qui échouent en utilisant la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ cela nous amène à dire que l'utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ a plus de risque d'erreurs que celle de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$.
Du lycée Anatolien au lycée Super, nous constatons que le taux d'erreurs qui résulte de la mauvaise utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ augmente beaucoup (4% de bonnes réponses). Comme le niveau des élèves descend du lycée Anatolien au lycée Super, nous pouvons conclure que plus le niveau des élèves descend, plus le taux d'erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette augmente. En d'autres termes, ce type de situations (comme la recette $\mathbf{R_a}$) pose beaucoup de problèmes chez des élèves en difficulté.

2.4 Question n°4

Dans cette question les élèves doivent mobiliser les connaissances liées à la fonction composée. Comme cette tâche n'est pas loin d'être routinière pour les élèves de tous les lycées, j'attends que le taux de réussite sera assez satisfaisant dans les classes.
J'ai classé les réponses des élèves comme suit :

RC (Procédure 1) : réponse corre

$f(g(x))=2x+1$
$f(x+6)=2x+1$
$f(x)=2(x+6)+1$
$=2x+12+1$
$=2x+13$………(SA36)
$fog(x)=2(x+6)+1=2x+12+1=2x+$

$2x+1\ o\ x+6=$
$=2(x+6)+1$
$=2x+12+1$
$=2x+13$……….(SB2)

RP1 (Procédure 4) : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x.

$$f(g(x)) = f(x+6) = 2x+6+1 = 2x+7$$
$$fog(x) = 2x+7$$
$$fog^{-1}(x) = \frac{x-7}{2}$$

(SA34) met x+6 dans la fonction à la place de x sans parenthèse.
RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f. il obtient la fonction « f rond g^{-1} ».

$fog(x)$
$f(g(x)) = 2x+1$
$f(x+6)$
$f^{-1}(x-6)$

$2(x-6)+1$
$2x-12+1$
$2x-11$

(SB8)

$f(g(x))=f(x-6)=2x+1$
$=2(x-6)+1$
$=2x-12+1$
$=2x-11$……..(SA8), (SA10), (SA18)

RP3 (Procédure 3) : l'élève ne peut pas utiliser ensemble les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel. Et il reste dans le cadre algébrique. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions.

$$fog(x) = 2x+1- x+6$$
$$= 3x+7$$

(SF14),(SF16)

L'élève écrit le signe de moins. Malgré cela il fait l'addition.
$f(x)=2x+1$, $g(x)=x+6$, $f(x+6)=2x+1$, l'élève enlève la fonction et il résolut une équation en supprimant l'un des x, $f(x)=2x-5$……..(SB13), (SB15)
RP4: l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre.

$f(g(x))$ donc $f(x)=2(x+6)+1$, $f(x)=2x+12+1$, $12-1=2x$, $\frac{-13}{2}=\frac{2x}{2}$

$=2.(\frac{-13}{2}+6) = 2\frac{6}{2}+6+1$ *$=13+6+1=20$………(SA6)*

2x+1=2x+12+2
=2x+14
x=14…………(SB7)

RP5 : l'élève compose la fonction f et g. Ensuite il trouve la fonction « fog de g $^{-1}$ ».

f(g(x)), f(x+6)=2(x+6)+1, f(x+6)=2x+12+1, f(x+6)=2x+13
f(x)=2(x-6)+13, f(x)=2x-12+13, f(x)=2x+1…….(SB22),(SB23)
f(g(x)=
f(x+6)=
f(x+6)=2(x+6)+1, f(x+6)=2x+12+1, f(x)=2(x-6)+13, f(x)=2x+1, l'élève dit que quand on simplifie la fonction f(g(x)), on obtient la fonction f. Comme la fonction f est précisée, le résultat est pareil…….(SA25),(SA23)

RP6 : l'élève juxtapose x et x+6 dans la fonction f .

f(x+6), 2(x+6)+1, fog(x)=2x^2+12x+1, fog(x)=14x+1…..(SF19)

Autres Réponses:

f(x+6)
2x(x+6)+1
f(2x +12x)+1

(SF7),(SF17),(SF24)

f(2x+1)=x(2x+1)+6=2x+6, fog=2x+6……..(SF38),(SF15)
f:R$\rightarrow$R, f(x)=2x+1; g:R$\rightarrow$R g(x)=x+6
2x+1= pour x=2, 2.2+1=5, x+6=9+6=11……..(SB19)

$f(\frac{x+6}{6})=\frac{0}{6}$, $f(x)=\frac{0}{6}$, $2x+1=\frac{0}{6}$ *=2x+1.6=0, 2x=-6, x=-3…….(SB6)*

f(g(x))=f(x+6), $\frac{f(2x+1)}{2+1}=\frac{0}{2+1}$ *…..(SB16)*

Non-réponses:

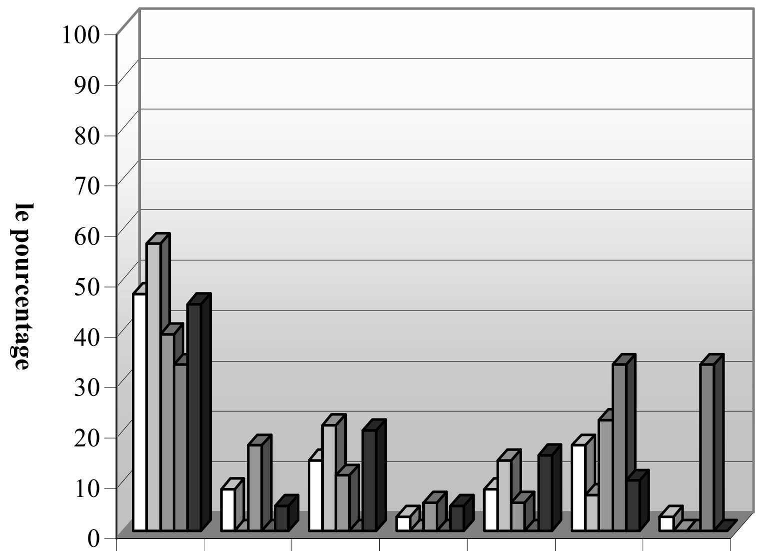
Maintenant je vais présenter les résultats des élèves :

2.4.1 Lycée Anatolien

Je n'attends pas de grande surprise dans les réponses des élèves. La question n'offre pas beaucoup de liberté aux élèves pour privilégier les techniques plus courtes dans une perspective utilitaire. C'est pour cela que les réactions des élèves seraient identiques à celles des autres lycées. Je crois que la majorité des élèves pourront trouver la bonne réponse sans peine.

En voici les tableaux :

Q1-Q4-SA



	RC	RP1	RP2	RP4	RP5	AR	NR
SA	47	8,3	14	2,8	8,3	17	2,8
BON	57	0	21	0	14	7,1	0
MOY	39	17	11	5,6	5,6	22	0
MAU	33	0	0	0	0	33	33
DER	45	5	20	5	15	10	0

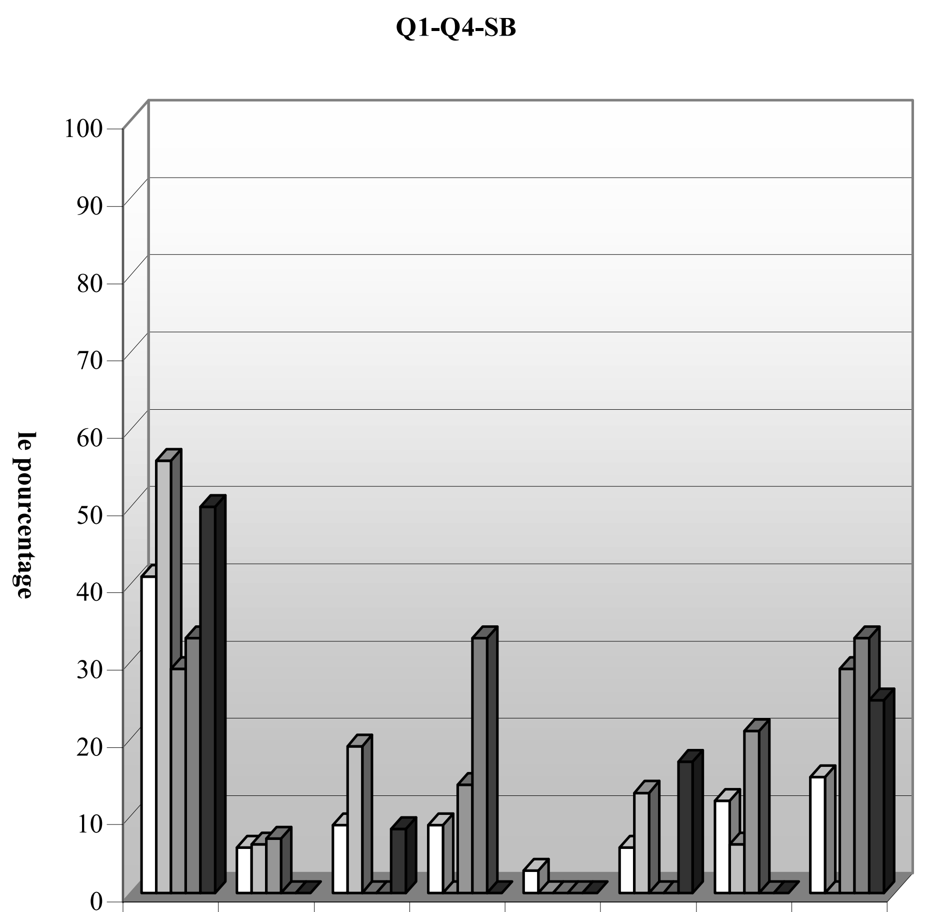
les réponses

RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x, RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f. il obtient la fonction « f rond g^{-1} », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4: l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g. Ensuite il trouve la fonction « fog de g^{-1} », RP6 : l'élève juxtapose x et x+6 dans la fonction f, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, en classe, le taux de réussite n'est pas satisfaisant. 47% des élèves donnent donc la bonne réponse, ce qui est contraire à mes attentes. Une bonne partie des élèves (14%) trouvent d'abord l'inverse de g et puis il la met à la place de x dans la fonction f. 8,3% des élèves trouvent la fonction composée de f et g mais ils ne s'arrêtent pas là. De plus ils trouvent la fonction «*fog de* g^{-1} ». Par ailleurs, l'erreur qui consiste à mettre seulement *x* à la place de *x* » est commise par 8,3% des élèves. Un faible pourcentage des élèves ne donnent pas de réponse. Tandis que le taux d'autres réponses est de 17%. On peut donc dire que la question n'est pas a priori considérée comme difficile par ces élèves.

Si l'on regarde les résultats des élèves par niveau, on constate que le taux de réussite est plus élevé chez les bons. Ainsi plus de la moitié des bons fournissent une réponse correcte contre 39% des moyens et 33% des mauvais. L'erreur consistant à mettre seulement x à la place de x (17%) et celle qui consiste à égaliser la fonction à zéro (6%) sont uniquement réservées aux moyens. Les élèves qui composent la fonction inverse de g avec la fonction f sont plus nombreux chez les bons. Alors 21% d'entre eux commettent cette erreur contre 11% des moyens et il n'y a aucune réponse pareille chez les mauvais. Par ailleurs, 14% des bons commettent l'erreur consistant à trouver la fonction « fogog^{-1} ». Cette erreur atteint 6% chez les moyens et un pourcentage nul chez les mauvais. Il est cependant normal que les élèves qui deviennent perplexes face à la question soient plus nombreux chez les mauvais. 33% de ces derniers répondent autrement à la question contre 22% des moyens et 7% des bons.

En ce qui concerne les élèves de dérsané, 45% trouvent la bonne réponse. L'erreur qui consiste à composer l'inverse de la fonction g avec la fonction f est plus fréquente chez ces élèves (20%). 5% d'entre eux mettent seulement x à la place de x dans la fonction f. Ce taux est aussi valable pour les élèves qui égalisent la fonction à zéro tandis que le taux des élèves qui trouvent la fonction « fogog^{-1} » est de 15%.

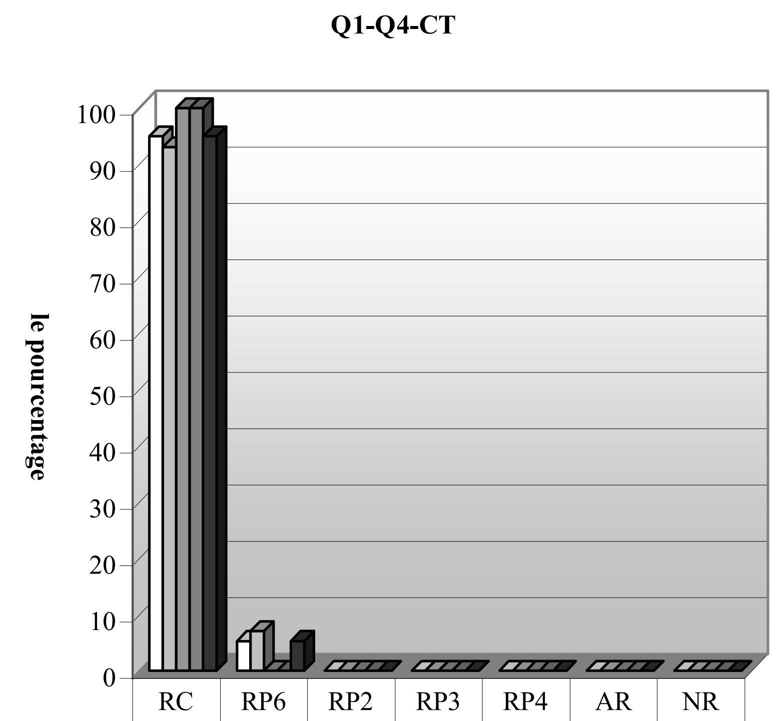


	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SB	41	6	9	9	3	6	12	15
BON	56	6	19	0	0	13	6	0
MOY	29	7	0	14	0	0	21	29
MAU	33	0	0	33	0	0	0	33
DER	50	0	8	0	0	17	0	25

RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x, RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f. il obtient la fonction « f rond g^{-1} », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4: l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g. Ensuite il trouve la fonction « fog de g^{-1} », RP6 : l'élève juxtapose x et x+6 dans la fonction f, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus montre que 41% des élèves fournissent une réponse correcte. Et la question n'est cependant pas abordée par une bonne partie des élèves (15%).Environ 9% des élèves ne peuvent pas passer du cadre algébrique au cadre fonctionnel alors ils prennent l'opération de la composition comme l'addition, la soustraction ou une équation. Ce taux est aussi valable pour les élèves qui composent la fonction f et l'inverse de g. L'erreur qui consiste à mettre seulement *x* à la place de *x* »

est commise par 6% des élèves. Tandis qu'un très petit nombre égalisent la fonction composée à zéro et ils trouvent donc un nombre.
Il n'est pas très étonnant de constater que le taux de réussite est plus élevé chez les bons. Ainsi plus de la moitié des bons élèves fournissent une réponse correcte contre 29% des moyens et 33% des mauvais. L'erreur consistant à composer la fonction inverse de g et la fonction f (19%) et celle qui consiste à trouver la fonction « fogog $^{-1}$ » (13%) sont uniquement réservées aux bons. Une légère différence entre les bons et moyens s'observe par le pourcentage de l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x (6% des bons contre 7%). Ce type d'erreurs est totalement absent chez les mauvais.
Par ailleurs, le taux de réussite monte un petit peu chez les élèves de dérsané. Alors la moitié de ces derniers donnent la bonne réponse. Par contre un quart des élèves ne répondent pas à la question. Le pourcentage des élèves qui trouvent la fonction « fogog $^{-1}$ » atteint 17%.



	RC	RP6	RP2	RP3	RP4	AR	NR
T	95	5,3	0	0	0	0	0
BON	93	7,1	0	0	0	0	0
MOY	100	0	0	0	0	0	0
MAU	100	0	0	0	0	0	0
DER	95	5,3	0	0	0	0	0

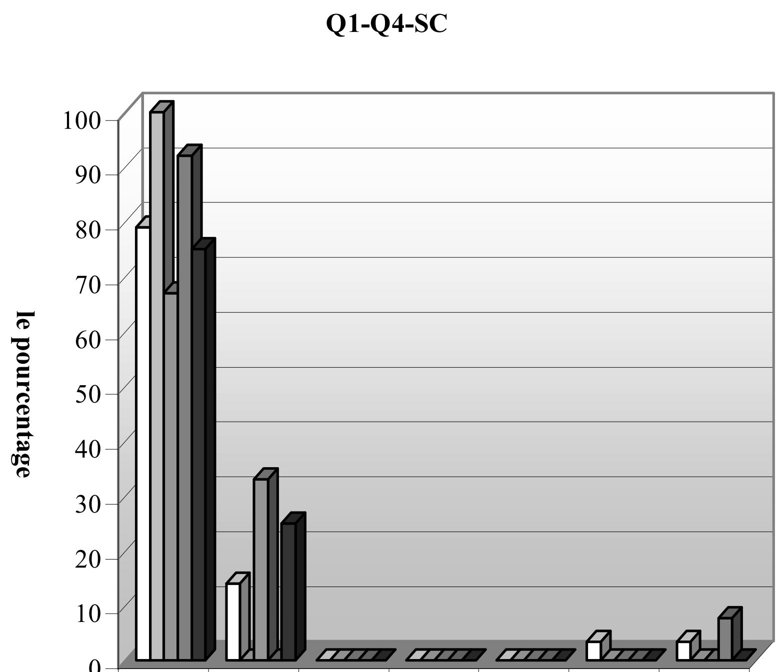
les réponses

RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x, RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f. il obtient la fonction « f rond g^{-1} », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4: l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g. Ensuite il trouve la fonction « fog de g^{-1} », RP6 : l'élève juxtapose x et x+6 dans la fonction f, AR :autres réponses, NR :non-réponses

En ce qui concerne la classe de terminale, à part un élève qui a commis une erreur de calcul, tous les élèves trouvent la bonne réponse.

2.4.2 Lycée Super

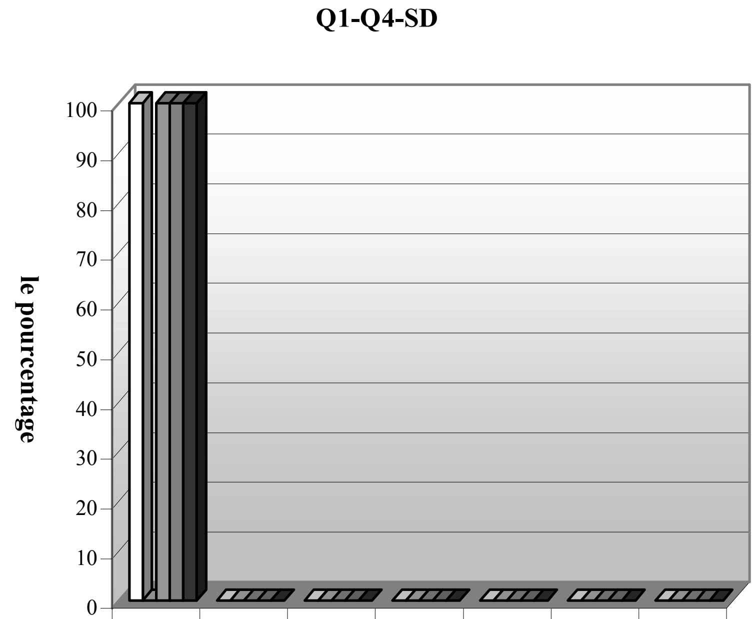
Dans ce lycée, je suppose aussi que la question ne posera pas beaucoup de problèmes aux élèves et que le taux de réussite sera donc plus élevé.



	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	AR	NR
SC	79	14	0	0	0	3,4	3,4
BON	100	0	0	0	0	0	0
MOY	67	33	0	0	0	0	0
MAU	92	0	0	0	0	0	7,7
DER	75	25	0	0	0	0	0

RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x, RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f. il obtient la fonction « f rond g^{-1} », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4: l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g. Ensuite il trouve la fonction « fog de g^{-1} », RP6 : l'élève juxtapose x et x+6 dans la fonction f, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Remarquons qu'en classe les élèves trouvent majoritairement (79%) la bonne réponse. L'erreur consistant à négliger la parenthèse est cependant commise par 14% des élèves. Environ 3% des élèves ne répondent pas à la question. Ce taux est aussi valable pour les autres réponses.
En regardant le pourcentage de réussite et le faible pourcentage d'autres réponses et non-réponse on peut donc dire que la question est assez familière aux élèves.
Quant aux résultats des élèves par niveau, on observe que chaque bon fournit une réponse correcte contre 67% des moyens et 92% des mauvais. Par ailleurs, l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x est uniquement réservée aux moyens avec un taux de 33%.
Le taux de réussite atteint 75% chez les élèves de dérsané et les élèves restants commettent l'erreur provoquée par mettre seulement x à la place de x.



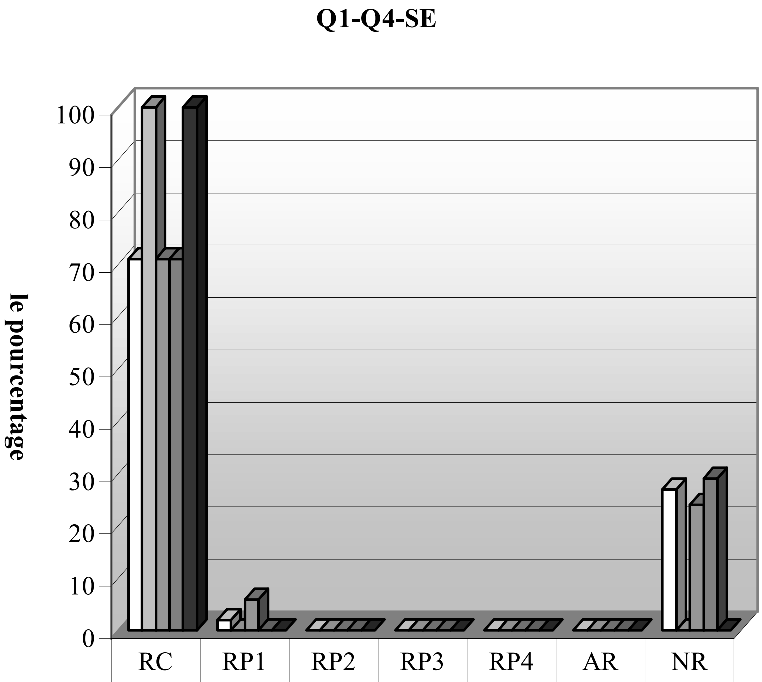
	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	AR	NR
SD	100	0	0	0	0	0	0
BON	0	0	0	0	0	0	0
MOY	100	0	0	0	0	0	0
MAU	100	0	0	0	0	0	0
DER	100	0	0	0	0	0	0

les réponses

RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x, RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f. il obtient la fonction « f rond g^{-1} », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4: l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g. Ensuite il trouve la fonction « fog de g^{-1} », RP6 : l'élève juxtapose x et x+6 dans la fonction f, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Comme le bien montre le tableau ci-dessus, en classe, tous élèves donnent la bonne réponse. On peut donc dire que la question est facile et très familière aux élèves.

2.4.3 Lycée Normal

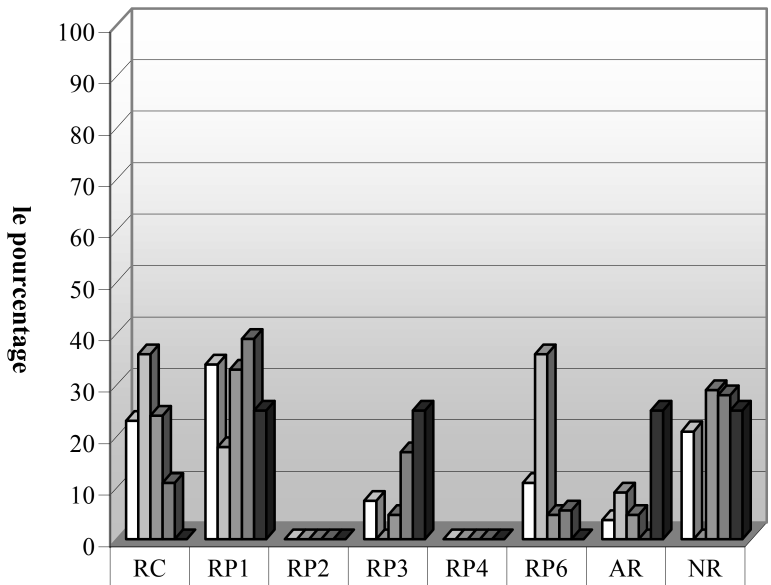


	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	AR	NR
SE	71	2	0	0	0	0	27
BON	100	0	0	0	0	0	0
MOY	71	6	0	0	0	0	24
MAU	71	0	0	0	0	0	29
DER	100	0	0	0	0	0	0

RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x, RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f. il obtient la fonction « f rond g^{-1} », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4: l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g. Ensuite il trouve la fonction « fog de g^{-1} », RP6 : l'élève juxtapose x et x+6 dans la fonction f, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Dans la classe E, la bonne partie des élèves (27%) ne touchent pas la question et 2% d'entre eux commettent l'erreur qui consiste à ne pas faire attention à la parenthèse. Alors les restants (71%) donnent la bonne réponse, ce qui confirme à mon analyse a priori.
Si on regarde les résultats des élèves par niveau, on constate que chaque bon fournit une réponse correcte contre 71 des moyens et mauvais. Seuls environ 6% des moyens commettent l'erreur de parenthèse. Par ailleurs, tous élèves de dérsané trouvent la bonne réponse.

Q1-Q4-SF



	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP6	AR	NR
SF	23	34	0	7,5	0	11	4	21
BON	36	18	0	0	0	36	9	0
MOY	24	33	0	5	0	5	5	29
MAU	11	39	0	17	0	6	0	28
DER	0	25	0	25	0	0	25	25

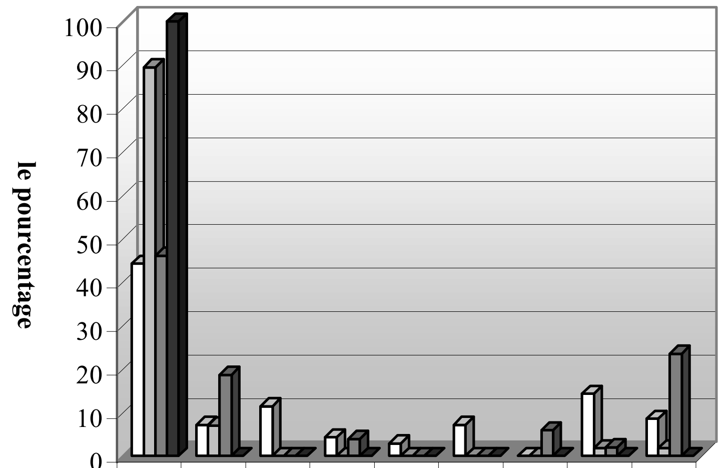
les réponses

RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x, RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f. il obtient la fonction « f rond g^{-1} », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4: l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g. Ensuite il trouve la fonction « fog de g^{-1} », RP6 : l'élève juxtapose x et x+6 dans la fonction f, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Quant à la classe F, le taux de réussite descend jusqu'à 23% et la question n'est pas abordée par 21% des élèves. Par ailleurs, le pourcentage des élèves qui ont négligé la parenthèse est de 34%. Pour 7,5% des élèves il est difficile de faire co-habiter les deux cadres :algébrique et fonctionnel. L'erreur qui consiste à juxtaposer la fonction *g* et x dans la fonction *f* est commise par 11% des élèves.
Remarquons que le taux de réussite à cette question monte à 36% chez les bons élèves et ce taux atteint 24% chez les moyens et 11% chez les mauvais. Il est cependant très intéressant qu'aucun élève de dérsané ne fournisse une réponse correcte. L'erreur qui consiste à négliger la règle de parenthèse est plus fréquente chez les mauvais. Ainsi 39% d'entre eux commettent cette erreur contre un tiers des moyens et 18% des bons. Les élèves qui juxtaposent x et x+6 dans la fonction f sont plus nombreux chez les bons. Cette erreur est commise par 36% de ces derniers contre 5% des moyens et 6% des mauvais. Les mauvais ont plus de difficulté à utiliser les deux cadres ensembles :cadre algébrique et fonctionnel. 17% d'entre eux essaient de ne résoudre la questions que dans le cadre algébrique contre environ 5% des moyens. Ce type d'erreurs est totalement absent chez les bons. Une très légère différence entre les moyens et mauvais s'observe par le taux de non-réponse. 29% des moyens et 28% des mauvais ne répondent donc pas à la question. Tandis que la question est abordée par tous les bons. Parmi les élèves de dérsané, on observe deux types d'erreur. L'erreur qui consiste à négliger la parenthèse et celle consistant à rester dans le cadre algébrique sont commises par un même taux des élèves (25%).
Maintenant les résultats des élèves suivant les lycées :

2.4.4 Résultats des élèves par lycée

Q1-Q4-RL



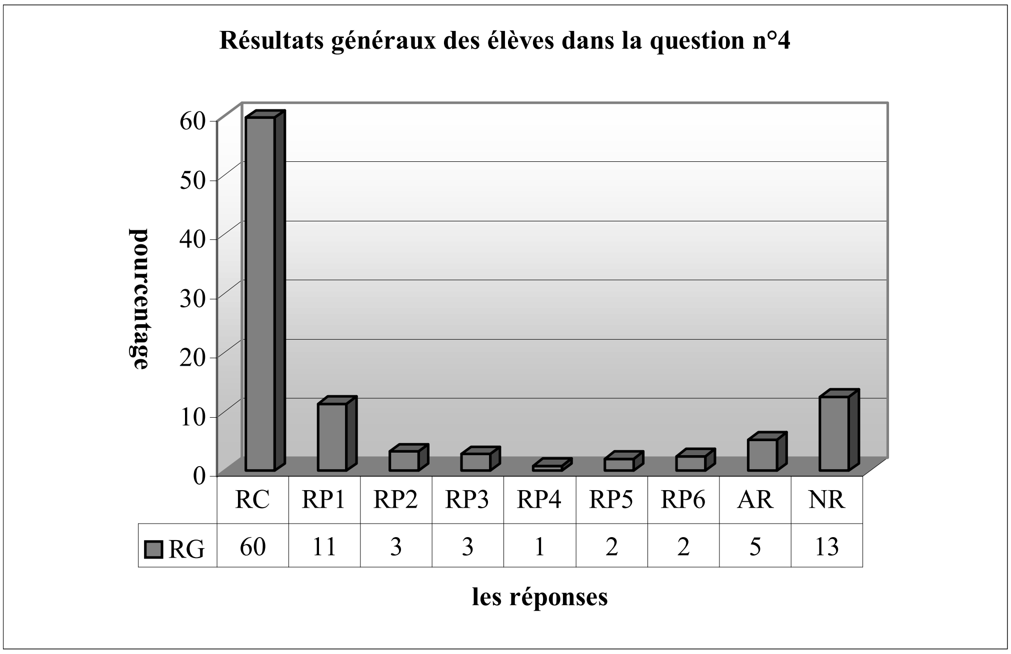
	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	RP6	AR	NR
LA	44	7	11	4	3	7	0	14	9
LS	89	7	0	0	0	0	0	2	2
LN	46	19	0	4	0	0	6	2	24
T	100	0	0	0	0	0	0	0	0

les réponses

RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x, RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f. il obtient la fonction « f rond g^{-1} », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4: l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g. Ensuite il trouve la fonction « fog de g^{-1} », RP6 : l'élève juxtapose x et x+6 dans la fonction f, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Le taux de réussite et les erreurs commises par les élèves se différencient selon les lycées. Le lycée Anatolien et normal se rapprochent en ayant une réussite modeste (respectivement 44%, 46%). Tandis que le lycée Super obtient environ 89% de succès. L'erreur la plus fréquente est l'erreur qui consiste dans l'inattention de parenthèse dans les deux lycées, le lycée Normal (19%) et le lycée Super (7%). Dans le lycée Anatolien on peut rencontrer presque toutes les erreurs catégorisées sauf celle qui est classée dans la réponse RP7.14% d'entre eux sont perturbés dans la résolution de la question. Le taux des élèves qui ne répondent pas à la question est plus élevé dans le lycée Normal que dans les autres (24% contre environ 2% dans le lycée Super et 9% dans le lycée Anatolien).

2.4.5 Résultats généraux des élèves



RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x, RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f. il obtient la fonction « f rond g^{-1} », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4: l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g. Ensuite il trouve la fonction « fog de g^{-1} », RP6 : l'élève juxtapose x et x+6 dans la fonction f, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, la plupart des élèves trouvent la bonne réponse tandis que la question n'est pas abordée par 13% des élèves. L'erreur la plus fréquente est celle qui consiste à mettre seulement x à la place de x avec un taux de 11%. En ce qui concerne les autres erreurs, elles sont peu fréquentes, leurs taux varient de 1% à 3%. Par exemple, le taux d'erreurs qui consistent à composer l'inverse de g et f et celui d'erreurs consistant à ne pas utiliser deux cadres ensemble, sont de 3%, 5% des élèves répondent autrement à cette question.

2.4.6 Conclusion

Nous avons considéré dans l'analyse a priori que cette question aurait un taux de réussite assez élevé. Conformément à cette analyse a priori, en général la plupart des élèves résolvent correctement la question. Mais si on prend en compte les résultats des élèves par lycée, seul dans le lycée Super le taux de réussite est assez satisfaisant (89%). Dans les lycées anatolien et normal, il y a seulement près de la moitié des élèves qui donnent la bonne réponse et le taux de non-réponses est assez élevé dans le lycée Normal (24%). De plus les erreurs qui consistent à ne pas articuler deux cadres (cadre algébrique et cadre fonctionnel) ne sont pas aussi fréquentes que nous attendions (3%).

Par ailleurs, il y a des différences entre les erreurs commises par les élèves du lycée Anatolien et ceux du lycée Normal. Par exemple, ce sont les réponses RP1 et RP6 qui amènent 25% des élèves à échouer dans le lycée Normal. Ce type d'erreurs signale des lacunes théoriques profondes. En ce qui concerne le lycée Anatolien, 21% des élèves échouent en commettant les erreurs de RP2,RP4 et RP5. Ces erreurs sont peut-être dues à la confusion entre la démarche à suivre et celle d'autres questions. Comme nous l'avons déjà vu, dans un enseignement très proche du concours, entraîner des élèves en proposant beaucoup de questions qui portent sur plusieurs connaissances et leur faire connaître les types de questions du concours sont très importants. C'est pourquoi il est possible que ces élèves du lycée Anatolien confondent des démarches même s'il s'agit d'une question simple et isolée.

2.5 Question n°5

La question contient les deux questions précédentes dans le sens où les tâches sont à réaliser par les élèves. Mais elle est plus complexe que la précédente. C'est pourquoi j'attends que le taux de réussite soit moins élevé que dans la question précédente. Les élèves sont obligés de mobiliser les connaissances portant sur la fonction composée et l'inverse. Je pense avoir à peu près les mêmes réactions des élèves suivant les lycées.

Maintenant je présenterai les réponses des élèves en démontrant des erreurs. J'ai caractérisé 8 catégories des réponses :

RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte.

$f(g(x))=6x+4,\ f(2x+1)=6x+4,\ f(x)=6(\frac{x-1}{2})+4,\quad f(x)=3x-3+4, f(x)=3x+1$ ….*(SA4)*

$f(g(x))=6x+4,\ \ f(2x+1)=6x+4,\ \ f(2.(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})+1)=6(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})+4,$

$f(x-1+1)=\frac{6x}{2}-\frac{6}{2}+4,\ f(x)=3x+1$ …..*(T10)*

$f(x)=mx+n,\ \ fog(x)=m(2x+1)+n=2mx+m+n,\ \ 2mx+m+n=6x+4,\ \ 2m=6 \Rightarrow m=3$
$m+n=4 \Rightarrow n=1,\ \ f(x)=3x+1$ ……*(T12)*

RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g.

$fog(x)=f(g(x))$
$f(2x+1)=6x+4$
$f(x)=6(\frac{x+1}{2})+4$
$=\frac{6x+6+8}{2}=\frac{6x+14}{2}=\frac{2(3x+7)}{2}=3x+7$ …..*(SA22)*

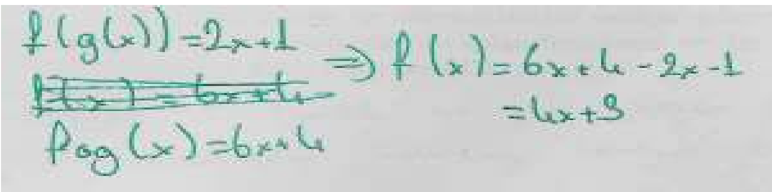
$fog(x)=6x+4,\ \ g(x)=2x+1$
$f(g(x))=6x+4,\ f(2x+1)=6x+4,\ \ \frac{x+1}{2}=6(\frac{x+1}{2})+4,\ \ f(x)=\frac{6x+6+4}{2}, f(x)=6x+8$…*(SB5)*

$g^{-1}(x)=2x-1, f(x)=6.2x-1+4,\ f(x)=12x-6+4,\ f(x)=12x-2$……*(SC29), (SC28)*

RP2: l'élève trouve la fonction composée g de fog (x).

$f(g(6x+4)),\ f(g(6x+4))$
$2.6x+4+1=12x+9$…..*(SB20)*
$fog\ (x)=g(x)=2x$
$=2(6+x4)+1$
$12x+8=1,\ 12x+9\quad x=12-9 \Rightarrow x=3$……*(SF31),(SF40),(SF21)*

RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres : cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble.



(SB27)

$fog(x)=6x+4, g(x)=2x+1,\ \ fog(x)=4x+3o2x+1=6x+4,$
$f(x)=2x+1=6x+4,\ \ f(x)=4x+3$…………..*(SC9),(SC7),(SC6)*
$6x+4=f(2x+1),\ \ 6x+4-2x+1=f(x),\ \ 4x+4=f(x),\ \ f(x)=4x+5$……..*(SE51),(SE50)*
$f(g(x))=6x+4$
$\frac{x-1}{2}=6x+4,\ 12x+4=x-1,\ 12x-x=-4-1,\ \ \frac{11x}{11}=\frac{-5}{11},\ x=\frac{5}{11},$
$=6(\frac{-5}{11})+4=\frac{-30}{11}+\frac{4}{1}=\frac{-30+44}{11},\ \ f(x)=\frac{14}{11}$ ………..*(SA6)*

$f(g(x))=6x+4,\quad f(\frac{2x+1}{2x+1})=\frac{6x+4}{2+1}=f(x)=\frac{6x+4}{2+1}=6x+2$ ………*(SB6)*

fog(x)=f(g(x))
=f(2x+1)
f(x)=6x+4-2x-1
f(x)=4x-3………………..(SC24)
fog =fog
6x+4=f(2x+1), f=2x+1-6x+4,   f(x)=-4x+5……….(SE1)
fog(x)=6x+4,
6x+4=x(2x+1), $\frac{6x}{2x}+4-1$, *3x+3………..(SF5),(SF25),(SF9)*
Si fog=6x+4, g(x)=2x+1, $f_x=\frac{6x+4}{2x+1}=\frac{3x+4}{x+1}$ *……..(SF42)*

RP4 (Procédure 4 :erreurs de mission inaccomplie): l'élève trouve la fonction « fog de g(x) ».

$$fog(x) = fg\ x) = f\ (2x+1) = 6.(2x+1)+4$$
$$6.2x+4$$
$$f(x) = 12x+1$$

(SF46)

f(g(x)), f(2x+1), f=6.2x+1+4, f=12x+5……..(SB14)
fogog, l'élève barre les deux g, 6x+4 o 2x+1, 6(2x+1)+4, 12x+6+4, 12x+10…..(SC13)
fog=6x+4, g(x)=2x+1, (fog)=3(2x+1+4), f(x)=……..(SF39)
(fog) (x)=(g(x))=(2x+1)+4=2x+5……..(SF34)

RP5: erreurs de calcul.

f(2x+1)=6x+4, f(x)=$6(\frac{x-1}{2})+4=\frac{6x+6}{2}+4=6x+7$ *……(SB15)*

f(g(x))=6x+4, $g^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$, $6.(\frac{x-1}{2})+4$, $=\frac{6x-6}{2}+\frac{4}{(2)}$ *=6x-6+8=6x-14…….(SA17)*

f(g(x))=f(2x+1)=6x+4, $f(x)=\frac{6x-1}{2}+4=\frac{6x-6+8}{2}=\frac{6x+2}{2}$ *=3x+2, l'élève simplifie 6 et 2 sans prendre en compte 2 dans le numérateur……(SA34)*

g(x)=2x+1, fog(x)=6x+4, $6.(\frac{x-1}{2})+4$, $\frac{6x-6}{2}+4$, $=\frac{6x-6+8}{2}$, $\frac{6x+2}{2}=12x+4$ *….(SB1)*

RP6 (Procédure 5): l'élève trouve la fonction « g^{-1} de fog (x) ». c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g.

fog(x)=6x+4, (fog)og $^{-1}$*=f,* $f=g^{-1}o(fog)=\frac{6x+4-1}{2}=3x+3$ *……..(SD18), (SD15),(SD2)*

Autres Réponses:

$f(g(x))=2(\frac{x+4}{6})+1=\frac{2x-8}{6}+1=\frac{x-7}{3}=6(\frac{x-1}{2})+4=\frac{6x-2}{2}=6x$ *……..(SA2)*

f(2x+1)=6x+4, $f(x)=(\frac{3x-1}{2})+4$, *f(x)=3x+4, f(x)=3x+1…….(SB22)*

f(g(x))=6x+4, f(2x+1)=6x+4, $f(x)=\frac{6x+4}{2}$ *………(SB24)*

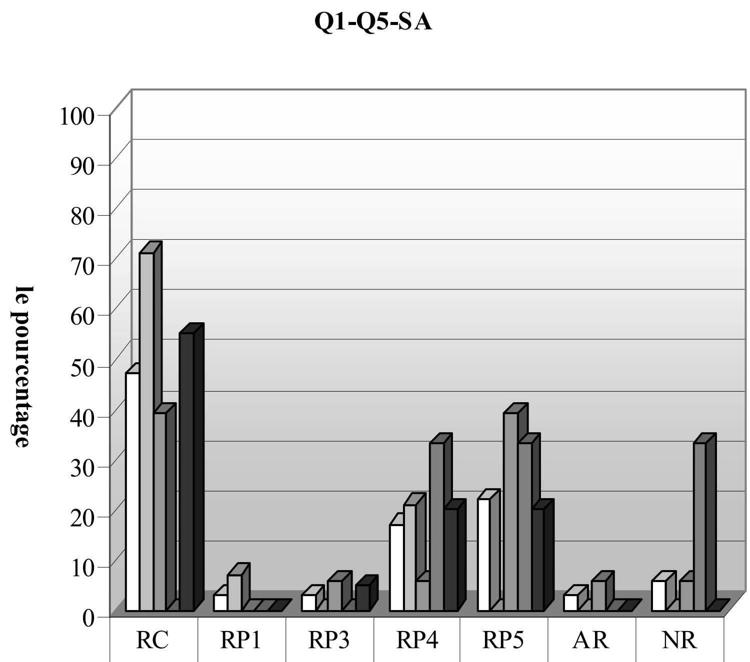
$\frac{7x+7}{10}$, $\frac{2x+1}{3}=12$, *86-y=7,   =12+7=5=9…….(SE58)*

fog(x)=6x+4, g(x)=2x+1, $(fog)(x)=\frac{2x+1}{2}.2=x+1$, $fog(x)=\frac{6x+4}{6}6=x+4$ *…..(SF32)*

Non-réponses :

Je voudrais donner dans le tableau ci-dessous les effectifs des procédures employées par les élèves pour chaque classe. Il est nécessaire de rappeler que quand je compte les procédures, je fais attention aux procédures qu'ils ont suivi sans tenir compte des erreurs qu'ils ont commises.

2.5.1 Lycée Anatolien



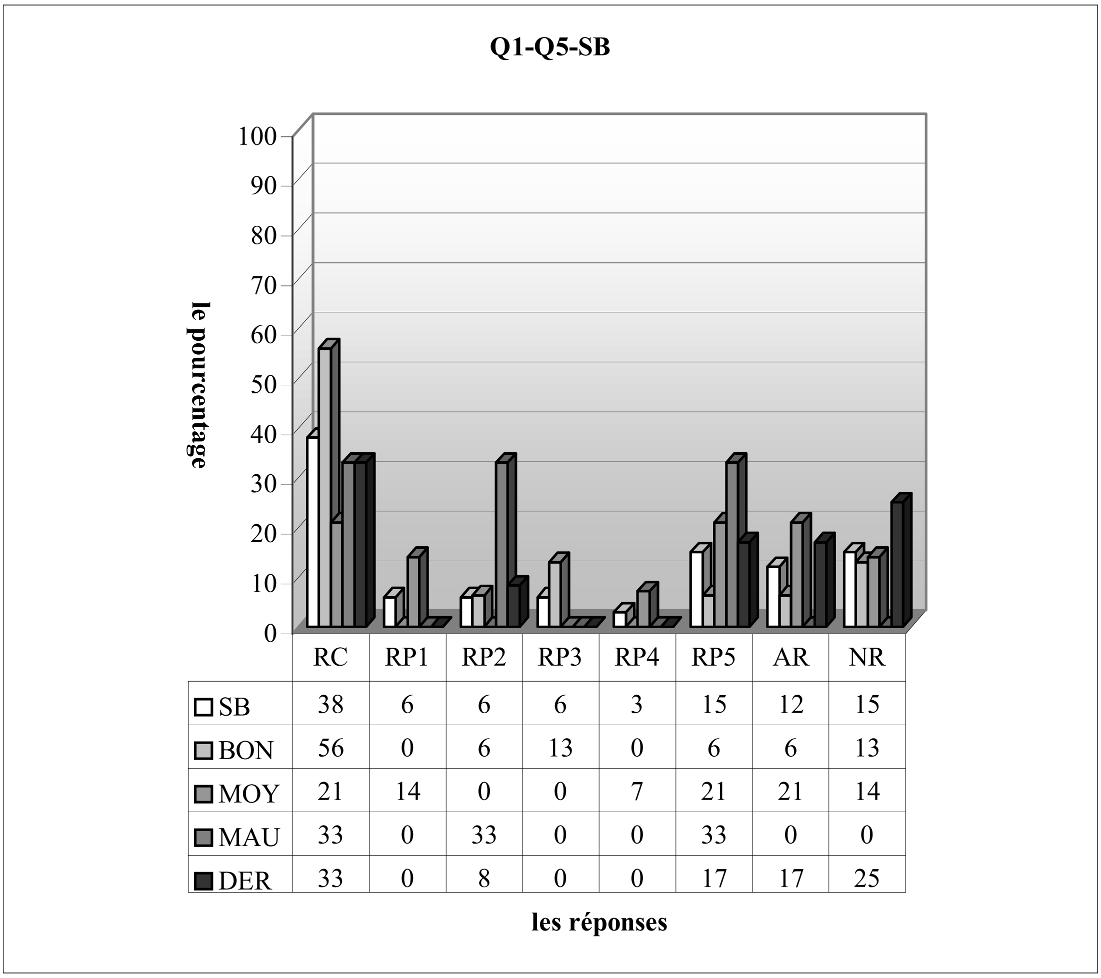
	RC	RP1	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SA	47	3	3	17	22	3	6
BON	71	7	0	21	0	0	0
MOY	39	0	6	6	39	6	6
MAU	0	0	0	33	33	0	33
DER	55	0	5	20	20	0	0

les réponses

RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte, RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g, RP2: l'élève trouve la fonction composée g de fog (x), RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP4 : l'élève trouve la fonction « fog de g(x) », RP5: erreurs de calcul, RP6: l'élève trouve la fonction « g^{-1} de fog (x) », c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Dans la classe de seconde A, près de la moitié des élèves (47%) donnent la bonne réponse. L'erreur la plus fréquente est de l'erreur de calcul commise par 22% des élèves et l'erreur qui consiste à trouver la fonction « *fog de g(x)* » suit avec un taux de 17%. Il s'agit cependant de la même répartition pour les erreurs liées au traitement de l'inverse de la fonction g et les élèves qui ne peuvent pas utiliser les deux cadres :cadre algébrique et fonctionnel (environ 3%). Enfin presque 6% des élèves ne répondent pas à la question.
En ce qui concerne les résultats des élèves par niveau, on constate que le taux de réussite monte à 71% chez les bons. Ce taux atteint 39% chez les moyens et il n'y a aucune réponse correcte de la part des mauvais. Les erreurs relatives au traitement de l'inverse de la fonction g ne sont présentes que chez les bons. 7,1% de ces derniers commettent donc ces erreurs. Par contre seuls 6% des moyens font l'erreur qui consiste à trouver la fonction « gofog ». Les élèves qui trouvent la fonction composée « fogog » sont plus nombreux chez les mauvais. Ainsi un quart d'entre eux commettent cette erreur contre 21% des bons et 6% des moyens. Les moyens et mauvais se rapprochent par le taux d'erreur de calcul. Alors 39% des moyens et 33% des mauvais font ces erreurs. Par ailleurs, ce type d'erreurs est totalement absent chez les bons.

Si l'on regarde les résultats des élèves de dérsané, on observe que le taux de réussite monte à 55%. Il s'agit cependant du même pourcentage pour les erreurs de calcul et l'erreur consistant à trouver la fonction « fog de g(x) » (20%). Un très petit nombre de ces élèves ne peuvent pas utiliser les deux cadres ensembles.



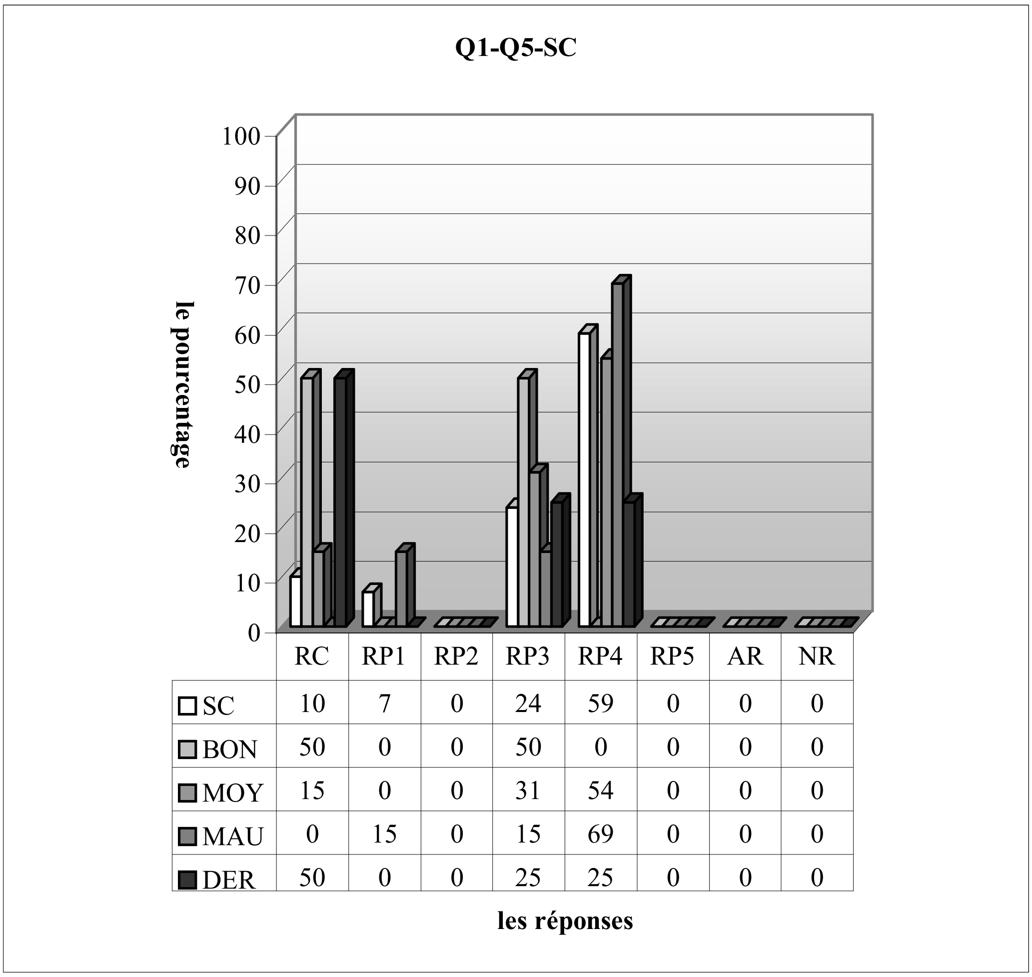
	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SB	38	6	6	6	3	15	12	15
BON	56	0	6	13	0	6	6	13
MOY	21	14	0	0	7	21	21	14
MAU	33	0	33	0	0	33	0	0
DER	33	0	8	0	0	17	17	25

RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte, RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g, RP2: l'élève trouve la fonction composée g de fog (x), RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP4 : l'élève trouve la fonction « fog de g(x) », RP5: erreurs de calcul, RP6: l'élève trouve la fonction « g^{-1} de fog (x) », c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Quant à l'autre classe de seconde du lycée Anatolien, la bonne réponse est donnée par 38% des élèves. L'erreur plus fréquente est l'erreur de calcul comme en classe précédente (15%). Presque 6% des élèves ne peuvent pas traiter correctement l'inverse de la fonction g. Il est cependant très intéressant de constater la même répartition pour les élèves qui trouvent la fonction composée g de fog(x) et ceux qui ne peuvent pas utiliser les deux cadres ensembles. Un très faible pourcentage des élèves trouvent la fonction « fog de g(x) » au lieu de la fonction f alors que 15% des élèves ne donnent pas de réponse. Pour 12% des élèves il est très difficile de catégoriser leurs réponses dans les six réponses précisées.
Il est normal que le taux de réussite soit plus élevé chez les bons. Ainsi plus de la moitié d'entre eux fournissent une réponse correcte contre 21% des moyens et un tiers des mauvais. L'erreur liée à trouver l'inverse de la fonction g (14%) et celle qui consiste à trouver « la fonction « fog de g(x) » (7%) sont uniquement réservées aux moyens. Par contre l'erreur consistant à trouver la fonction composée « g de fog(x) » est totalement absente chez ces derniers et elle est commise par 6% des bons et un tiers des mauvais. On observe cependant que les erreurs de calcul sont plus fréquentes chez les mauvais. Alors un tiers de ces derniers commettent ces erreurs contre 21% des moyens et 6% des bons.

En ce qui concerne les résultats des élèves de dérsané, le taux de réussite n'est pas satisfaisant. Seuls un tiers peuvent donc fournir une réponse correcte. Les erreurs commises par les élèves sont des erreurs qui consistent à trouver la fonction composée « g de fog(x) » (8%) et des erreurs de calcul (17%). Par ailleurs, un quart des élèves n'abordent pas la question tandis que 17% deviennent perplexes face à la question.
Je termine ce lycée par le résultat splendide de la classe de terminale : toute la classe donne la bonne réponse !

2.5.2 Lycée Super

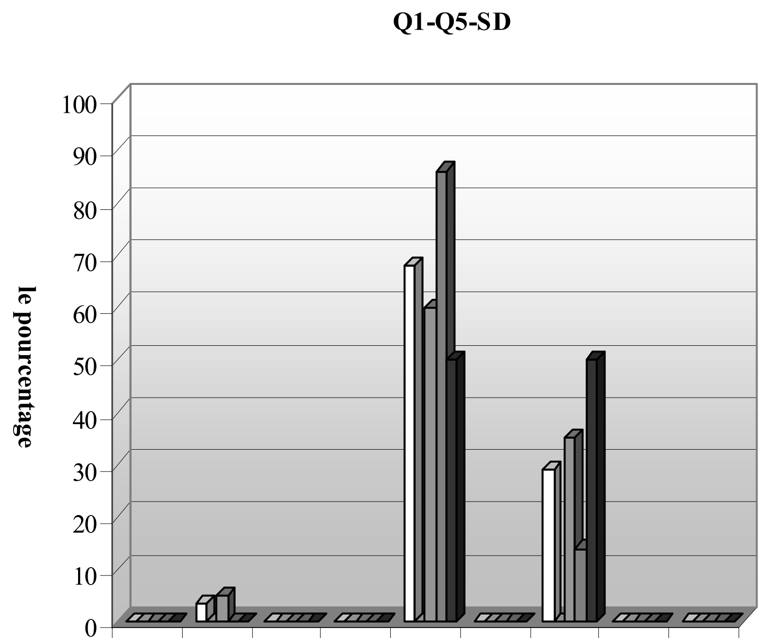


	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SC	10	7	0	24	59	0	0	0
BON	50	0	0	50	0	0	0	0
MOY	15	0	0	31	54	0	0	0
MAU	0	15	0	15	69	0	0	0
DER	50	0	0	25	25	0	0	0

RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte, RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g, RP2: l'élève trouve la fonction composée g de fog (x), RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP4 : l'élève trouve la fonction « fog de g(x) », RP5: erreurs de calcul, RP6: l'élève trouve la fonction « g^{-1} de fog (x) », c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Il est remarquable qu'en classe le taux de réussite à cette question descende à 10%. L'erreur la plus fréquente est l'erreur consistant à mettre la fonction *g* dans la fonction composée « *f rond g* » (59%). Donc on peut dire que la plupart des élèves dans ce lycée pensent que l'opération n'est pas déjà faite (ou il s'agit d'une mission accomplie). 24% des élèves ont de grosses difficultés à passer du cadre algébrique au cadre fonctionnel. Tandis que le taux des élèves qui commettent des erreurs relatives au traitement de l'inverse de la fonction g est d'environ 7%.
Par ailleurs, le pourcentage nul de non-réponse et autres réponses montrent que la question est très familière aux élèves. De plus il semble aussi que cette question n'a pas été considérée comme difficile par eux.
Remarquons cependant que le taux de réussite atteint 50% chez les bons. Ce taux descend jusqu'à 15% chez les moyens et il n'y a aucune réponse correcte de la part des mauvais. Les élèves qui ont de

grosses difficultés à utiliser les deux cadres ensembles sont plus nombreux chez les bons. Ainsi la moitié d'entre eux commettent ce type d'erreurs contre 31% des moyens et 15% des mauvais. Par ailleurs, l'erreur qui consiste à trouver la fonction « fog de g(x) » au lieu de la fonction f est totalement absente chez les bons tandis qu'elle est commise par plus de la moitié des moyens et 69% des mauvais.
Quant aux résultats des élèves de dérsané, la moitié fournissent une réponse correcte. Il s'agit de la même répartition (25%) pour les élèves qui ne peuvent pas utiliser les deux cadres ensembles et ceux qui trouvent la fonction « fog de g(x) ».



	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	RP6	AR	NR
SD	0	4	0	0	68	0	29	0	0
BON	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MOY	0	5	0	0	60	0	35	0	0
MAU	0	0	0	0	86	0	14	0	0
DER	0	0	0	0	50	0	50	0	0

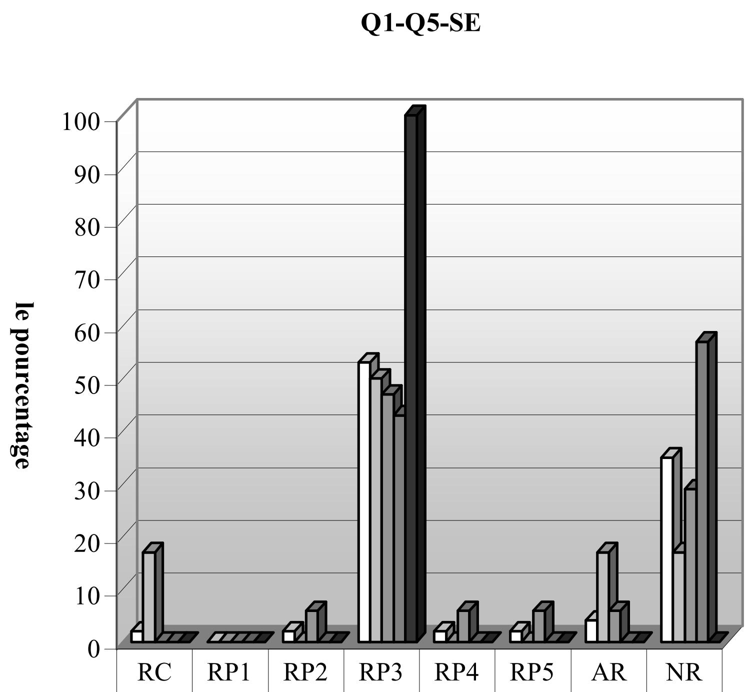
les réponses

RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte, RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g, RP2: l'élève trouve la fonction composée g de fog (x), RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP4 : l'élève trouve la fonction « fog de g(x) », RP5: erreurs de calcul, RP6: l'élève trouve la fonction « g^{-1} de fog (x) », c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'en classe il n' y a aucun élève qui trouve la bonne réponse. Par contre tous les élèves répondent à la question. Plus des deux tiers des élèves commettent cependant l'erreur qui consiste à trouver la fonction « fog de g(x) » au lieu de la fonction f. Une bonne partie (29%) traitent d'abord l'inverse de la fonction g. Mais ensuite ils trouvent la fonction « g^{-1} de fog(x) ». Environ 4% des élèves commettent les erreurs relatives au traitement de l'inverse de la fonction g.
En ce qui concerne les résultats des élèves par niveau, comme il n'y a aucun élève qui déclare qu'il est bon, l'erreur plus fréquente en classe consistant à trouver la fonction « fog de g(x) » est commise par 86% des mauvais et 60% des moyens. Par ailleurs, les élèves qui trouvent la fonction « g^{-1} de fog(x) » sont plus nombreux chez les moyens. Ainsi 35% de ces derniers commettent ce type d'erreur contre 14% des mauvais. Les erreurs liées au traitement de la fonction g ne sont présentes que chez les moyens avec un très faible pourcentage.

Si on regarde les résultats des élèves de dérsané, on constate qu'une moitié commettent les erreurs de calcul, l'autre moitié trouvent la fonction « g^{-1} de fog (x) » au lieu de la fonction f.

2.5.3 Lycée Normal

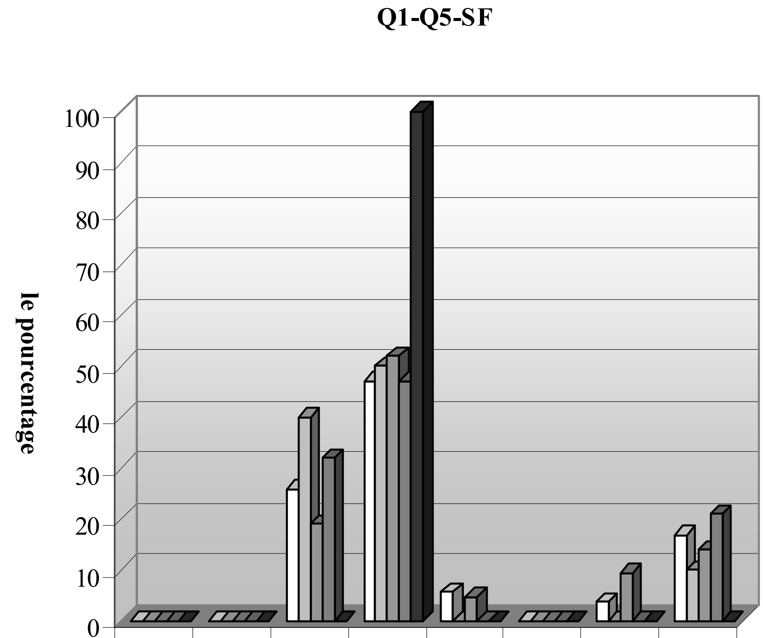


	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SE	2	0	2	53	2	2	4	35
BON	17	0	0	50	0	0	17	17
MOY	0	0	6	47	6	6	6	29
MAU	0	0	0	43	0	0	0	57
DER	0	0	0	100	0	0	0	0

les réponses

RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte, RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g, RP2: l'élève trouve la fonction composée g de fog (x), RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP4 : l'élève trouve la fonction « fog de g(x) », RP5: erreurs de calcul, RP6: l'élève trouve la fonction « g^{-1} de fog (x) », c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, un très faible pourcentage des élèves fournissent une réponse correcte (2%). Une bonne partie ne répondent cependant pas à la question, ce qui signifie que la question est assez complexe et peu familière aux élèves. Plus de la moitié des élèves commettent les erreurs consistant à ne pas utiliser ensembles les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel (53%). 2% des élèves trouvent la fonction composée « g de fog(x) ». Ce taux est aussi valable pour les élèves qui obtiennent la fonction « fog de g(x) » et les erreurs de calcul.
Remarquons que toutes les bonnes réponses viennent de la part des bons. Ainsi 17% d'entre eux fournissent une réponse correcte. Les élèves qui ne peuvent pas utiliser les deux cadres sont plus nombreux chez les bons élèves. La moitié de ces derniers commettent ce type d'erreurs contre 47% des moyens et 43% des mauvais. Il n'est cependant pas très étonnant que le taux de non-réponse soit plus élevé chez les mauvais. Alors plus de la moitié d'entre eux ne donnent pas de réponse à cette question contre 29% des moyens et 17% des bons. L'erreur qui consiste à trouver la fonction composée « g de fog(x) », la fonction « fog de g(x) » au lieu de la fonction f et les erreurs de calcul sont uniquement réservées aux moyens avec un taux de 6%. Par ailleurs, tous les élèves de dérsané commettent les erreurs relatives aux cadres.



	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SF	0	0	26	47	6	0	4	17
BON	0	0	40	50	0	0	0	10
MOY	0	0	19	52	5	0	10	14
MAU	0	0	32	47	0	0	0	21
DER	0	0	0	100	0	0	0	0

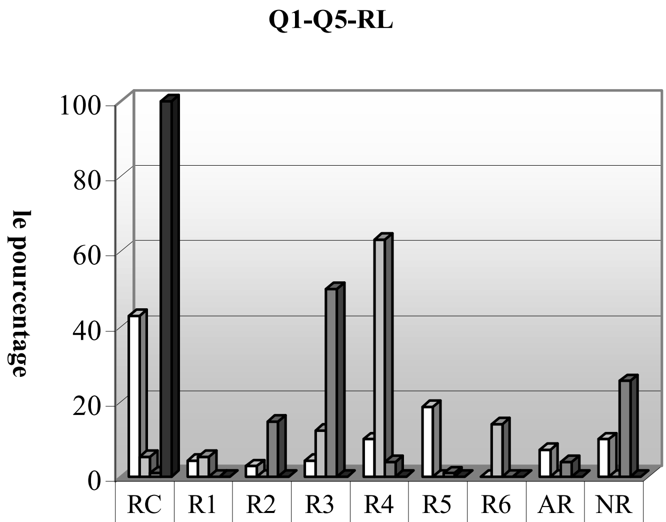
les réponses

RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte, RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g, RP2: l'élève trouve la fonction composée g de fog (x), RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP4 : l'élève trouve la fonction « fog de g(x) », RP5: erreurs de calcul, RP6: l'élève trouve la fonction « g^{-1} de fog (x) », c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Il n'y a aucun élève qui donne la bonne réponse dans la classe, la plupart des élèves commettent cependant les erreurs liées aux cadres (47%). Pour environ 6% des élèves la fonction composée « fog » n'est pas déjà effectuée. Alors ils font pour la deuxième fois et ils obtiennent la fonction *« f rond g rond g »*. De plus 26% des élèves trouvent la fonction composée « g de fog(x) » au lieu de la fonction f tandis que le taux de non-réponsee est de 17%.

Une très légère différence entre les élèves s'observe cependant par le taux des élèves qui ne peuvent pas utiliser les deux cadres ensembles. Ainsi la moitié des bons commettent ces erreurs contre 52% des moyens et 47% des mauvais. Les moyens se distinguent des autres par le taux plus faible des élèves qui trouvent la fonction composée « g de fog(x) », 19% font donc ce type d'erreur contre 40% des bons et 32% des mauvais. Il est normal que le taux de non-réponse soit plus élevé chez les mauvais. Alors 21% de ces derniers ne répondent pas à la question contre 14% des moyens et 10% des bons. Par ailleurs, chaque élève de dérsané commet les erreurs relatives aux cadres.

2.5.4 Résultats des élèves par lycée

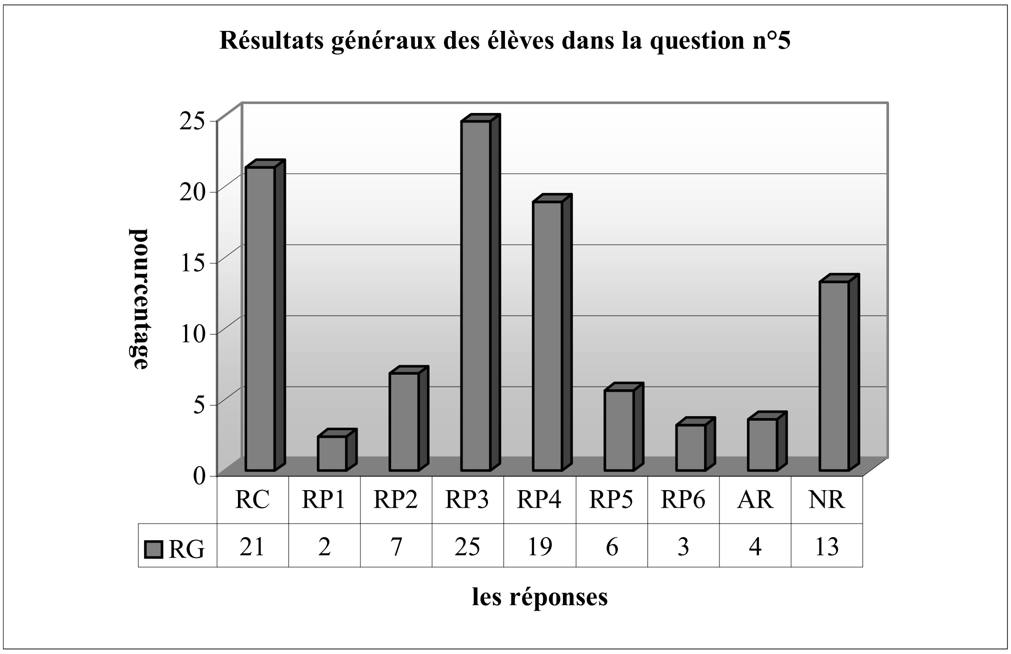


	RC	R1	R2	R3	R4	R5	R6	AR	NR
LA	43	4	3	4	10	19	0	7	10
LS	5	5	0	12	63	0	14	0	0
LN	1	0	15	50	4	1	0	4	25
T	100	0	0	0	0	0	0	0	0

RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte, RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g, RP2: l'élève trouve la fonction composée g de fog (x), RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP4 : l'élève trouve la fonction « fog de g(x) », RP5: erreurs de calcul, RP6: l'élève trouve la fonction « g^{-1} de fog (x) », c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Si on excepte la classe de terminale, le taux de réussite à cette question descend jusqu'à environ 1% dans les classes de seconde. Il y a des erreurs caractéristiques suivant les lycées : par exemple 63% des élèves du lycée Super font l'erreur nommée « l'erreur de la mission (ou opération) inaccomplie » alors qu'elle est commisse par environ 4% des élèves du lycée Normal et 10% du lycée Anatolien. La moitié des élèves du lycée Normal commettent l'erreur catégorisée dans la réponse RP4 en restant dans le cadre algébrique tandis que cette démarché erronée est effectuée par 12% des élèves dans le lycée Super et 4% dans le lycée Anatolien. L'erreur de calcul n'apparaît presque jamais dans les lycées super et normal tandis que près de 19% des élèves du lycée Anatolien font cette erreur.

2.5.5 Résultats généraux des élèves



RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte, RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g, RP2: l'élève trouve la fonction composée g de fog (x), RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP4 : l'élève trouve la fonction « fog de g(x) », RP5: erreurs de calcul, RP6: l'élève trouve la fonction « g^{-1} de fog (x) », c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'il y a seulement 21% des élèves qui donnent la bonne réponse. Les erreurs les plus fréquentes sont celles qui consistent à ne pas articuler deux cadres ensemble avec un taux de 25%. Le taux des élèves qui commettent les erreurs de « mission inaccomplie » est de 19%. Tandis que 7% trouvent la composée « gofog » au lieu de trouver la fonction demandée.
Par ailleurs, 6% des élèves commettent des erreurs de calcul dans une démarche correcte. Contrairement à nos attentes, l'erreur consistant à trouver la fonction *« g^{-1} o fog (x) »* n'est pas la plus fréquente. Ainsi il y a seulement 3% des élèves qui commettent cette erreur. Les erreurs liées au fait de trouver l'inverse de g sont aussi des erreurs marginales (2%) et 13% des élèves n'abordent pas la question, tandis que le taux d'autres réponses est de seulement 4%. Cela signifie que la question est assez familière aux élèves.

2.5.6 Conclusion

Dans notre analyse a priori, nous avons émis l'hypothèse que la décomposition des fonctions était plus difficile que la composition des fonctions pour des élèves et que le taux de réussite à cette question allait donc chuter dans cette question par rapport à la question précédente. Nous constatons que cette hypothèse est validée. Le taux de réussite à cette question descend à 21%. C'est presque trois fois plus que dans la question précédente. De plus dans cette question le taux des élèves qui commettent les erreurs qui consistent à ne pas utiliser deux cadres ensemble est plus élevé que dans la question précédente. Ainsi 3% des élèves commettent ce type d'erreurs lors qu'il s'agit de composer deux fonctions. Ce taux monte, ici, à 25%. Cela nous amène à dire que la décomposition des fonctions est moins familière aux élèves et que la complexité d'une question amène les élèves à commettre des erreurs qu'ils n'ont pas déjà commises dans des questions plus faciles.
Par ailleurs, les résultats des élèves du lycée Anatolien ne confirment pas à nos attentes. Il n'y pas de grande différence entre les taux de réussite des deux questions (n°4, 44% et n°5, 43%). Mais en ce qui concerne les deux autres lycées, cette différence est énorme (89%-5% dans le lycée Super et 46%-1% dans le lycée Normal). Cela signifie que les élèves du lycée Anatolien sont aussi familiers de la décomposition que de la composition.

2.6 Question n°6

Comme je l'ai déjà remarqué, cette question était aussi destinée à vérifier si les élèves utilisaient la recette $\mathbf{R_a}$. De plus, elle devait permettre d'observer les rapports des élèves liés à une mentalité utilitaire et de témoigner de l'appauvrissement des mathématiques dans les activités des élèves.
J'ai de nombreuses catégories de réponses à cette question. Je les présente en donnant des résultats typiques :

RC1 (Procédure 2) : réponse correcte avec la recette $\mathbf{R_a}$. L'élève trouve simplement la réponse correcte en changeant les places des deux 2 et leurs signes.

$\frac{2x+6}{3x-2}=\frac{2.2+6}{3.2-2}=\frac{4+6}{6-2}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$ ……*(SB29)*

$f^{1}(x)=\frac{2x+6}{3x-2}$, $f^{1}(x)=\frac{2.2+6}{3.2-2}=\frac{4+6}{6-2}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$ ………*(SC16)*

RC2 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$.

$y=\frac{2x+6}{3x-2} \Rightarrow 3xy-2y=2x+6,\ 3xy-2x=2y+6,\ x(3y-2)=2y+6,\ x=\frac{2y+6}{3y-2},$

$f^{-1}(x)=\frac{2x+6}{3y-2},\ f^{-1}(2)=\frac{2.2+6}{3.2-2}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$ ………*(T7)*

$y=\frac{2x+6}{3x-1},\ y(x-2)=2x+6,\ 3xy-2y=2x+6,\ 2xy-2x=6+2y,\ x=\frac{6+2y}{3y-2},$

$f^{-1}(y)=\frac{6+2x}{3.x-2}=\frac{6+4}{6-2}=\frac{5}{2}$ …..*(SE33)*

$y=\frac{2x+6}{3x-2},\ f(x)=y,\ f^{-1}(y)=x,\ y(3x-2)=2x+6,\ 3xy-2y=2x+6,\ 3xy-2x=6+2y,$

$x(3y-2)=6+2y,\ f^{-1}(y)=\frac{6+2x}{3.x-2}=\frac{6+4}{6-2}=\frac{5}{2}$ …..*(SE25)*

RC3 (Procédure 4) : réponse correcte portant sur l'image de 2 par l'inverse de la fonction f.

$f^{-1}(2)=a \Rightarrow f(a)=2$

$\frac{2a+6}{3a-2}=2 \Rightarrow 2a+6=6a-4 \Rightarrow 4a=10 \Rightarrow a=\frac{5}{2},\ f^{-1}(2)=\frac{5}{2}$ ……*(T12)*

$\frac{2x+6}{3x-2}=2,\ 6x-4=2x+6,\ 4x=10,\ x=\frac{5}{2}$ ……*(T8)*

$f^{-1}(2)=x,\ f(x)=2,\ f(x)=\frac{2x+6}{3x-2}=2,\ f(x)=6x-4=2x+6,\ f(x)=\frac{4x}{4}=\frac{10}{4},\ f(x)=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$ …..*(SA7)*

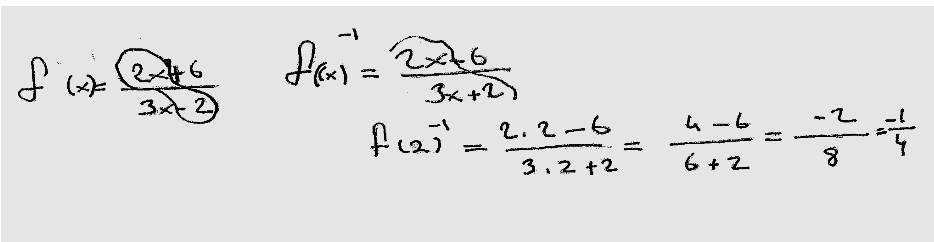
$f^{-1}(\frac{2x+6}{3x-2})=x,\ \frac{2x+6}{3x-2}=x,\ 2x+6=6x-4,\ -4x=-10,\ x=\frac{5}{2}$ ……*(SA25)*

RP4 : erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$. L'élève ne peut pas changer correctement les places ou les signes.

$f(x)=\frac{2x+6}{3x-2}$, *l'élève change les places de 2 et 3,* $f^{-1}(x)=\frac{3x+6}{2x-2},$

$f^{-1}(2)=\frac{3.2+6}{3.2-2}=\frac{6+6}{6-2}=\frac{12}{4}=3$ ……*(SB24)*

$f^{-1}(x)=\frac{-3x+6}{-2x-2},\ f^{-1}(2)=\frac{-6+6}{-4-2}=\frac{0}{-2}=0$ …….*(SB27)*



$f(x)=\frac{2x+6}{3x-2}$ $f^{-1}(x)=\frac{2x-6}{3x+2}$

$f(2)^{-1}=\frac{2.2-6}{3.2+2}=\frac{4-6}{6+2}=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4}$

(SC17)

$f(x)=\dfrac{2x+6}{3x-2}$, $f^{-1}(x)=\dfrac{-2x-6}{3x+2}$, $f^{-1}(2)=\dfrac{2.2-6}{3.2+2}=\dfrac{4-6}{6+2}=\dfrac{-2}{8}$ …….(SA34)

$f^{-1}(x)=\dfrac{2x+6}{3x+2x}$, *pour x=2,* $f^{-1}(2)=\dfrac{2.2+6}{3.2-2}=\dfrac{10}{6-2}=\dfrac{10}{4}=2{,}5$ …..(SB31)

RP5 : l'élève trouve correctement l'inverse de la fonction f. Mais il fait des erreurs lorsqu'il trouve l'image de 2 sur f^{-1}.

$f(x)=\dfrac{2x+6}{3x-2}$, $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+6}{3x-2}$, $f^{-1}(2)=\dfrac{2.2+6}{3.2-4}=\dfrac{4+6}{6-4}=\dfrac{10}{2}=5$ ……(SA13)

$f^{-1}(x)=\dfrac{2x+6}{3x-2}$, $f^{-1}(2)=\dfrac{-2.2+6}{3.2-2}=\dfrac{-4+6}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ ……(SA33),(SA17)

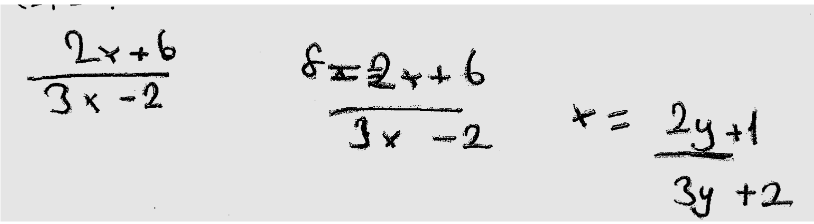
$f^{-1}(x)=\dfrac{2x+6}{3x-2}$, *pour x=2,* $f^{-1}(2)=\dfrac{2.2+6}{3.2-2}=\dfrac{4+6}{6-2}=\dfrac{13}{4}$ ……(SA35)

$f^{-1}(x)=\dfrac{2x+6}{3x-2}$, $f^{-1}(2)=\dfrac{2.(-2)+6}{3.(-2)-4}=\dfrac{2}{-8}=\dfrac{1}{4}$ …..(SB23)

RP6: l'élève trouve l'image de 2 sur la fonction f.

$f(2)=\dfrac{2.2+6}{3.2-2}=\dfrac{10}{4}$ ….(SB10)

RP7 : l'élève rend simplement x en y lorsqu'il utilise la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$.



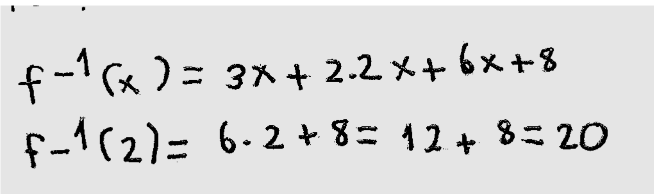
(SF46)

$f(x)=\dfrac{2x+6}{3x-2}$, $y=\dfrac{2x+6}{3x-2}$, $x=\dfrac{2y+1}{3y-2}$ …..(SF39),(SF36)

RP8 : les élèves ne peuvent pas utiliser deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble. Alors l'un égalise le numérateur au dénominateur. L'autre essai de trouver un nombre en faisant quelques choses avec le numérateur et le dénominateur.

$3x\text{-}2x=\dfrac{2x+6}{3x-2}3x-2$, $3x\text{-}2x=2x+6$, $3x\text{-}2x=2x+6$, $x=2x+6$,

$f^{-1}(2)=2.2+6$, $4+6=10$………(SF9), (SF25), (SF45)



(SF14)

$3x\text{-}2y=\dfrac{2x+6}{3x-2}3x-2$, $\dfrac{3x-2y-6}{2}=\dfrac{2x}{2}$, $\dfrac{x-6}{2}$ ……..(SF13),(SF5)

RP9 : l'élève devient perplexe dans la démarche de la réponse RC3.

$f(x)=2$, $f(x)=\dfrac{2x+6}{3x-2}=\dfrac{2x+6}{3x-6}=\dfrac{2}{1}$, $2x+6=6x+4$, $4x=2$, $x=2$,

$\dfrac{2x+6}{3x-2}=\dfrac{2.2+6}{3.2-2}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}$ ……(SD11),(SD12),(SD27),(SD4)

RP10: erreurs qui correspondent à la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$.

$$\frac{y}{1} = \frac{2x+6}{3x-2}$$

$$\frac{y(3x-2)}{\cancel{3x-2}} = \frac{2x+6}{3x-2} \qquad f^{-1}(2) = \frac{4+6}{6-2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{2x+6}{3x-2}$$

(SE1)

RP11 : réponses incomplètes.

$y=\frac{2x+6}{3x-1}$, $f(x)=y$, $f^{-1}(y)=x$, $y(x-2)=2x+6$, $3xy-2y=2x+6$, $2xy-2x=6+2y$……*(SE51),(SE35), SE21)*

$y=\frac{2x+6}{3x-2}$, $f(x)=y$, $f^{-1}(y)=x$, $y(3x-2)=2x+6$, $3xy-2y=2x+6$,

$3xy-2x=6+2y$, $x(3y-2)=6x+2y$, $x=\frac{6+2y}{3y-2}$ ……..*(SE57)*

Autres Réponses :

$f: IR-\{\frac{2}{3}\} \to IR-\{\frac{2}{3}\}$, $f(x)=\frac{2x+6}{3x-2}$, $x=6$ $2x=12$; $6=x$ $12=2x$…..*(SA21)*

$f(x)=\frac{2}{3}=\frac{2x+6}{3x-2}$, $\frac{2x-6}{3x+6}=\frac{4-6}{6+6}=\frac{-2}{16}=\frac{-1}{6}$, $\frac{2x-6}{3x+6}=2$, $6x+6=2x-6$,

$6x-2=-6-6$, $4x=-12$, $x=-3$….*(SB7)*

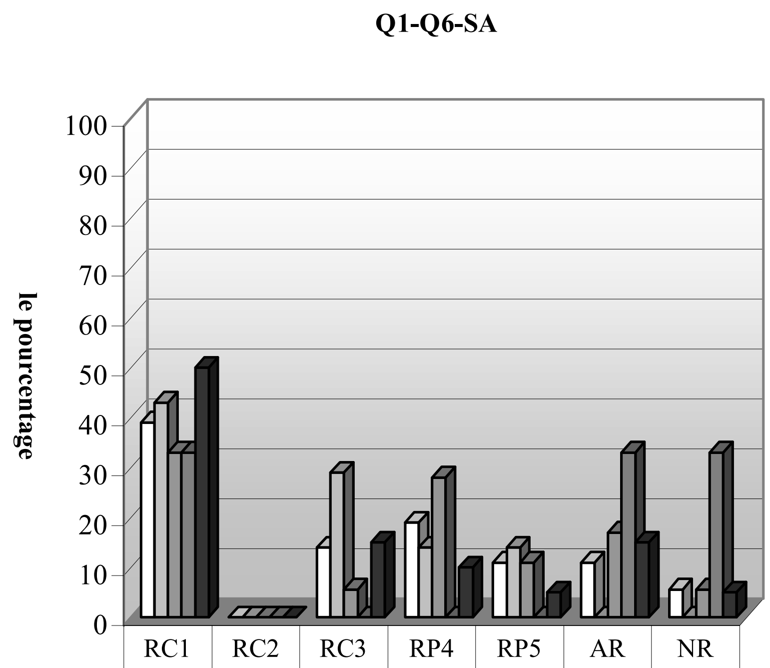
$\frac{4.2x+6}{3x-1}$, $f(x)=y$, $f(y)=x$, $y(x-2)$......*(SE30)*

Non-réponses :

En voici les résultats des élèves lycée par lycée :

2.6.1 Lycée Anatolien

Comme les élèves sont bien motivés au concours dans ce lycée, j'attendais un taux élevé des élèves qui utilisent la recette $\mathbf{R_a}$. Le fait que la fonction et son inverse sont identique sera le seul souci des élèves ($f(x)=f^{-1}(x)$) car cela donne une impression qu'on n'a rien fait.



	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	AR	NR
SA	39	0	14	19	11	11	6
BON	43	0	29	14	14	0	0
MOY	33	0	6	28	11	17	6
MAU	33	0	0	0	0	33	33
DER	50	0	15	10	5	15	5

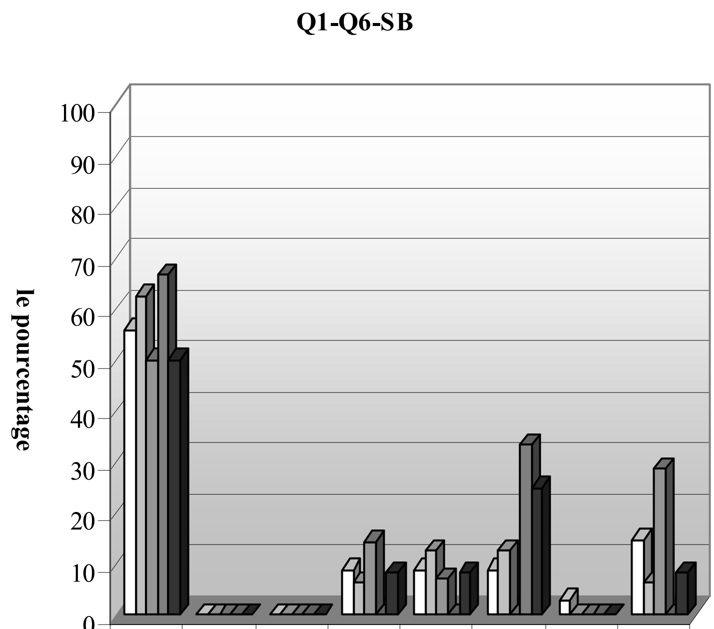
les réponses

RC1 (Procédure 2) : réponse correcte avec la recette R_a. RC2 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xfy}. RC3 (Procédure 4) : réponse correcte portant sur l'image de 2 par l'inverse de la fonction f. RP4 : erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a. RP5 : erreurs liées au calcul de l'image demandée, RP6: l'élève trouve l'image de 2 sur la fonction f, RP7 : l'élève rend simplement x en y lorsqu'il utilise la méthode M_{xfy}, RP8 : les élèves ne peuvent pas articuler deux cadres, RP9 : l'élève devient perplexe dans la démarche de la réponse RC3, RP10: erreurs qui correspondent à la méthode M_{xfy}, RP11 : réponses incomplètes, AR :autres réponses, NR: non-réponses

Dans la classe A, le taux de réussite est de 53%. Si l'on prend les réponses des élèves qui trouvent correctement l'inverse de la fonction mais pas l'image de 2 comme correcte, ce taux monte jusqu'à 64% et la plupart d'entre eux (39%) fournissent une réponse correcte à partir de la procédure partant sur la recette $\mathbf{R_a}$, tandis que 14% arrivent à la bonne réponse en privilégiant la procédure P3. Il n'y a cependant aucun élève qui aborde à la question en utilisant la deuxième procédure. Les erreurs les plus fréquentes sont des erreurs correspondant à la recette $\mathbf{R_a}$ (19%). 11% des élèves peuvent trouver l'inverse de la fonction dans une démarche peu mathématisée mais ils ne réussissent pas à trouver l'image de 2 par cette inverse à cause des erreurs de calcul. Par ailleurs, environ 6% des élèves ne répondent pas à la question alors que la question perturbe 11% des élèves.

En regardant les résultats des élèves par niveau, on observe que le taux des élèves qui trouvent la bonne réponse en privilégiant la recette $\mathbf{R_a}$ est plus élevé chez les bons. Alors 43% de ces derniers donnent cette réponse contre un tiers des moyens et mauvais. Par ailleurs, les élèves qui arrivent à la bonne réponse à partir de la procédure P3 sont aussi plus nombreux chez les bons (29% contre 6% des moyens et un pourcentage nul chez les mauvais). 14% des bons commettent les erreurs relatives à la recette $\mathbf{R_a}$ et ce taux double chez les moyens. Par contre elles sont totalement absentes chez les mauvais. Une légère différence entre les bons et moyens s'observe par le taux des élèves qui trouvent incorrecte l'image de 2. Alors 14% des bons commettent cette erreur contre 11% des moyens et un pourcentage nul chez les mauvais.

En ce qui concerne les élèves de dérsané, le taux de la réponse RC1 monte à 50% chez eux. De plus une bonne partie trouvent la bonne réponse à partir de la procédure P3 (15%). 10% des élèves commettent cependant les erreurs relatives à la recette $\mathbf{R_a}$, tandis que le taux d'autres réponses atteint 15%.

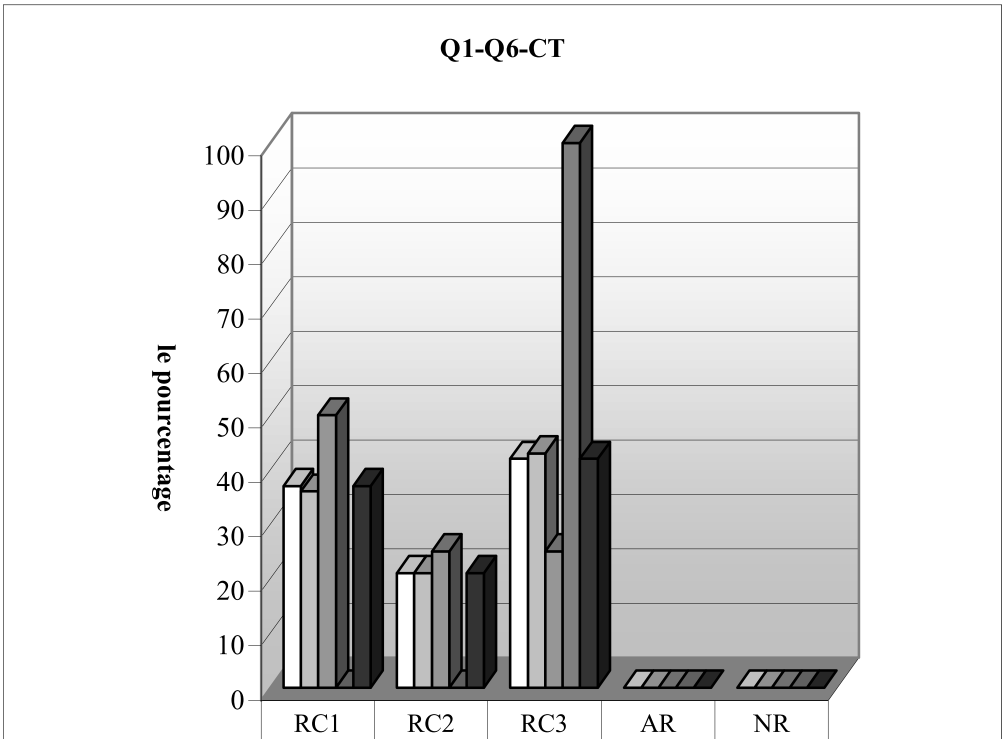


	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	RP6	AR	NR
SB	56	0	0	9	9	9	3	15
BON	63	0	0	6	13	13	0	6
MOY	50	0	0	14	7	0	0	29
MAU	67	0	0	0	0	33	0	0
DER	50	0	0	8	8	25	0	8

RC1 (Procédure 2) : réponse correcte avec la recette R_a. RC2 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xfy}. RC3 (Procédure 4) : réponse correcte portant sur l'image de 2 par l'inverse de la fonction f. RP4 : erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a. RP5 : erreurs liées au calcul de l'image demandée, RP6: l'élève trouve l'image de 2 sur la fonction f, RP7 : l'élève rend simplement x en y lorsqu'il utilise la méthode M_{xfy}, RP8 : les élèves ne peuvent pas articuler deux cadres, RP9 : l'élève devient perplexe dans la démarche de la réponse RC3, RP10: erreurs qui correspondent à la méthode M_{xfy}, RP11 : réponses incomplètes, AR :autres réponses, NR: non-réponses

Quant à la deuxième seconde, la répartition des élèves qui donnent la bonne réponse est à peu prés la même qu'en classe précédente (64% y compris la réponse RP5)). La seule procédure utilisée est la procédure portant sur la recette $\mathbf{R_a}$. Environ 9% des élèves font des erreurs provoquées par la mauvaise-utilisation du phénomène. Par ailleurs, il s'agit du même taux pour les élèves qui trouvent directement l'image de 2 sur f sans prendre en compte l'inverse et ceux qui font des erreurs lors qu'ils trouvent l'image de 2. Le fait que la répartition de non-réponses est assez élevée ne montre pas que la question est plus complexe et peu habituée aux élèves mais l'égalité de la fonction et son inverse conduit les élèves à rester immobiles face à la question.
Si on regarde les résultats des élèves par niveau, une légère différence entre les élèves s'observe par le taux de réussite à cette question : ainsi, 63% des bons fournissent une réponse correcte contre la moitié des moyens et 67% des mauvais ; ce qui signifie que l'utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ supprime l'importance des connaissances mathématiques et du savoir-faire. De plus elle détruit aussi la différence entre des bons, moyens et mauvais élèves. Les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ sont plus fréquentes chez les moyens. 14% d'entre eux commettent ces erreurs contre 6%

des bons. Par contre les élèves qui commettent des erreurs lors du traitement de l'image de 2 sur f^{-1} sont plus nombreux chez les bons (13% des bons contre 7% des moyens). Par ailleurs, ces deux types d'erreurs sont totalement absents chez les mauvais. Une bonne partie de ces derniers (33%) trouvent l'image de 2 par la fonction f contre 13% des bons et il n'y a aucune réponse concernant cette erreur de la part des moyens.
Le taux de réussite à cette question ne dépasse pas la moitié chez les élèves de dérsané. On observe cependant trois types d'erreurs parmi ces élèves. Alors un quart des élèves trouvent simplement l'image de 2 sur la fonction f sans traiter l'inverse tandis que le taux des erreurs relatives à la mauvaise utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ est d'environ 8%, ce taux est aussi valable pour les élèves qui font des erreurs lorsqu'ils trouvent l'image de 2 par f^{-1}.

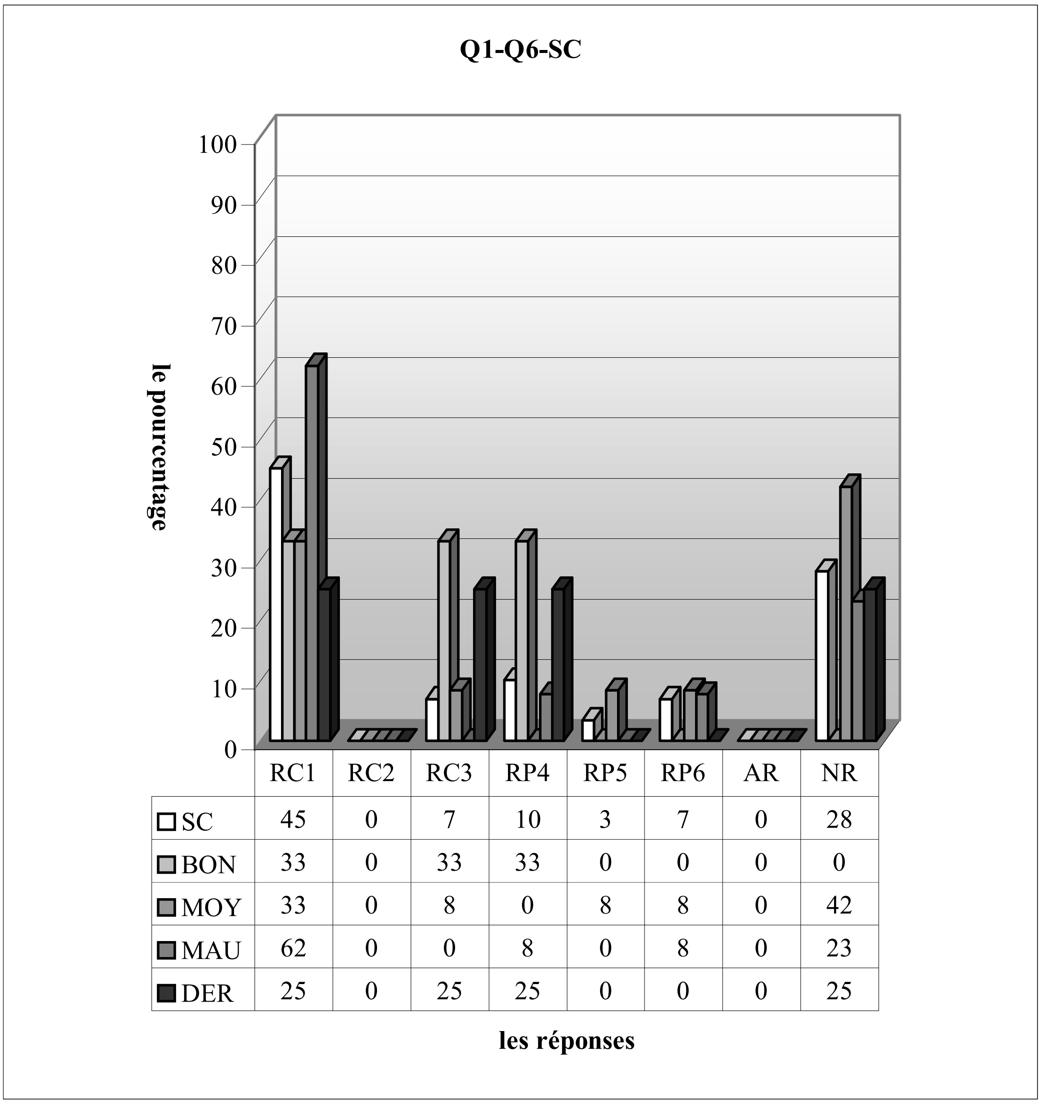


	RC1	RC2	RC3	AR	NR
T	37	21	42	0	0
BON	36	21	43	0	0
MOY	50	25	25	0	0
MAU	0	0	100	0	0
DER	37	21	42	0	0

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, en classe, il s'agit d'une réussite pleine. De plus les élèves se distinguent suivant les procédures préférées. Ainsi 21% d'entre eux trouvent la fonction inverse en favorisant la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Tandis que le taux des élèves qui mettent en cause la recette $\mathbf{R_a}$ fameuse est de 37%. Par ailleurs, la majorité de la classe (42%) privilégient la démarche célébrée dans la réponse RC3. Ce qui signifie donc que le fait que la fonction et son inverse soient identiques peut provoquer à s'orienter vers d'autres démarches peu risquées chez ces élèves bien équipés.
En ce qui concerne les résultats des élèves par niveau, remarquons que le taux d'utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ est plus élevé chez les moyens. Ainsi la moitié fournissent une réponse correcte à partir de recette $\mathbf{R_a}$ contre 36% des bons. Par contre les élèves qui trouvent la bonne réponse en utilisant la définition de la fonction inverse sont plus nombreux chez les moyens. Alors un quart de ces derniers privilégient la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ contre 21% des bons. On constate cependant que la totalité des mauvais

donnent la bonne réponse avec la procédure de la réponse RC3 contre 43% des bons et un quart des moyens.

2.6.2 Lycée Super

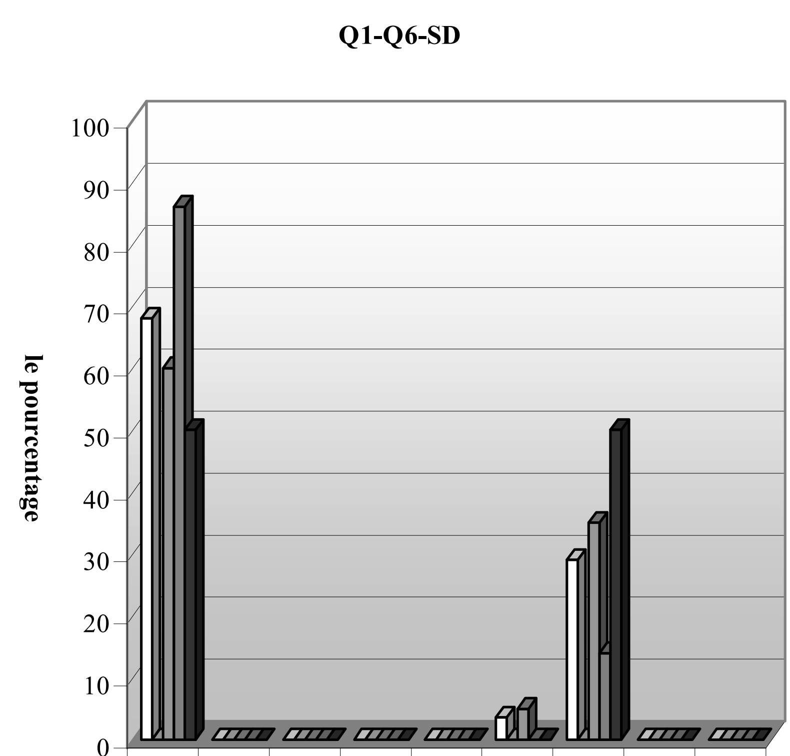


	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	RP6	AR	NR
SC	45	0	7	10	3	7	0	28
BON	33	0	33	33	0	0	0	0
MOY	33	0	8	0	8	8	0	42
MAU	62	0	0	8	0	8	0	23
DER	25	0	25	25	0	0	0	25

RC1 (Procédure 2) : réponse correcte avec la recette R_a. RC2 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xfy}. RC3 (Procédure 4) : réponse correcte portant sur l'image de 2 par l'inverse de la fonction f. RP4 : erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a. RP5 : erreurs liées au calcul de l'image demandée, RP6: l'élève trouve l'image de 2 sur la fonction f, RP7 : l'élève rend simplement x en y lorsqu'il utilise la méthode M_{xfy}, RP8 : les élèves ne peuvent pas articuler deux cadres, RP9 : l'élève devient perplexe dans la démarche de la réponse RC3, RP10: erreurs qui correspondent à la méthode M_{xfy}, RP11 : réponses incomplètes, AR :autres réponses, NR: non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'en classe C, plus de la moitié des élèves donnent la bonne réponse. De plus ce taux monte à 55% avec la réponse RP5. Environ 7% d'entre eux utilisent la démarche de la réponse RC3 alors que la recette $\mathbf{R_a}$ est majoritairement utilisée par 45% des élèves, 10% des élèves commettent cependant des erreurs lors de l'utilisation du phénomène. La hausse de non-réponse(28%) peut être interprétée comme l'effet de l'égalité da la fonction et son inverse. 7% des élèves trouvent simplement l'image de 2 par la fonction f tandis qu'il s'agit d'un très petit pourcentage pour les erreurs relatives au mauvais-traitement de l'image de 2 par f^{-1} .
Quant aux résultats suivant les niveaux, les mauvais se distinguent remarquablement des autres par le taux plus élevé de la réponse correcte RC1 : ainsi 33% des moyens et bons fournissent une réponse correcte à partir de recette $\mathbf{R_a}$ contre 62% des mauvais. Par ailleurs, le pourcentage de la réponse correcte RC3 est plus élevé chez les bons, alors un tiers d'entre eux donnent ce type de réponses contre

8% des moyens et il s'agit d'un pourcentage nul chez les mauvais. L'erreur consistant au mal-traitement de l'image de 2 par la fonction f^{-1} est uniquement réservée aux moyens avec un taux de 8%. Tandis qu'une très légère différence entre les moyens et mauvais s'observe par le taux des élèves qui trouvent simplement l'image de 2 par la fonction f (respectivement 8,3% contre 7,7%). Les erreurs correspondant à la mauvaise utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ sont cependant plus fréquentes chez les bons : un tiers de ces derniers commettent ces erreurs contre environ 8% des mauvais. Par contre elles sont totalement absentes chez les moyens. La question n'est pas abordée par 42% des moyens contre 23% des mauvais. Alors que chaque bon répond à la question.
Le taux de réussite atteint cependant 50% chez les élèves de dérsané. 25% trouvent la bonne réponse en privilégiant le phénomène. Ce taux est aussi valable pour les élèves qui fournissent une réponse correcte à partir de la procédure de la réponse RC3. Par ailleurs, on observe un seul type d'erreur chez ces élèves : c'est l'erreur qui consiste à la mauvaise-utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$: un quart des élèves commettent ces erreurs tandis qu'un autre quart ne répondent pas à la question.



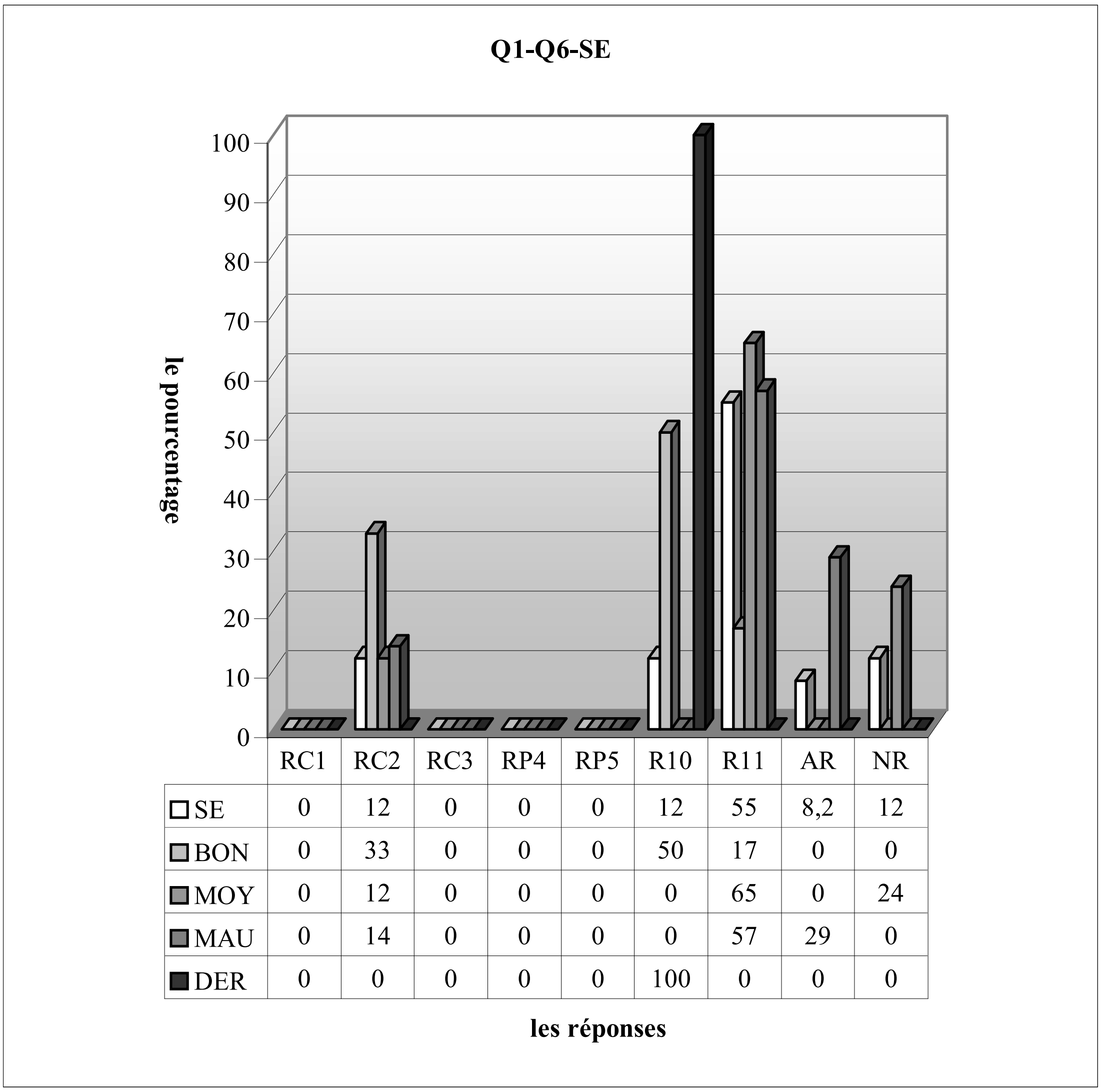
	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	RP6	RP9	AR	NR
SD	68	0	0	0	0	4	29	0	0
BON	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MOY	60	0	0	0	0	5	35	0	0
MAU	86	0	0	0	0	0	14	0	0
DER	50	0	0	0	0	0	50	0	0

les réponses

Le taux de réussite à cette question dans la classe D est de 68%. La seule démarche utilisée par les élèves est la démarche célébrée (la recette $\mathbf{R_a}$). La grande partie des élèves (29%) font des erreurs dans la démarche de la réponse RC3 tandis que 4% des élèves trouvent simplement l'image de 2 sur f. On remarque cependant que tous les élèves répondent à la question.
En ce qui concerne les résultats des élèves par niveau, comme il n'y a aucun élève qui déclare qu'il est bon, la grande majorité des mauvais (86%) fournissent une réponse correcte contre 60% des moyens.

Les erreurs liées à la démarche de la réponse RC3 sont cependant plus fréquentes chez les moyens. Ainsi 35% d'entre eux commettent ce type d'erreurs contre 14% des mauvais. L'erreur consistant à trouver simplement l'image de 2 sur la fonction f est uniquement réservée aux moyens avec un taux de 5%.
L'une moitié des élèves de dérsané trouvent la bonne réponse à partir de la recette $\mathbf{R_a}$ tandis qu'une autre commettent des erreurs liées à la démarche de la réponse RC3.

2.6.3 Lycée Normal

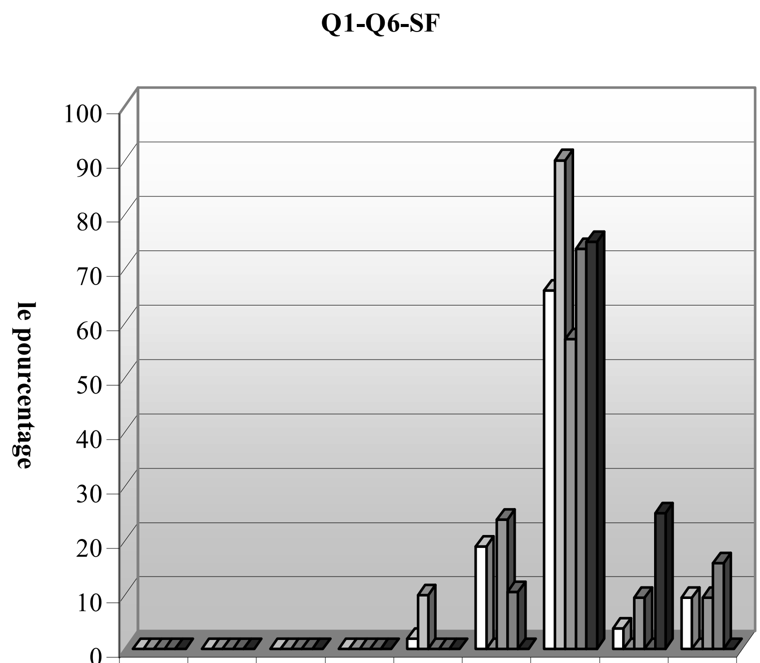


	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	R10	R11	AR	NR
SE	0	12	0	0	0	12	55	8,2	12
BON	0	33	0	0	0	50	17	0	0
MOY	0	12	0	0	0	0	65	0	24
MAU	0	14	0	0	0	0	57	29	0
DER	0	0	0	0	0	100	0	0	0

RC1 (Procédure 2) : réponse correcte avec la recette R_a. RC2 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xfy}. RC3 (Procédure 4) : réponse correcte portant sur l'image de 2 par l'inverse de la fonction f. RP4 : erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a. RP5 : erreurs liées au calcul de l'image demandée, RP6: l'élève trouve l'image de 2 sur la fonction f, RP7 : l'élève rend simplement x en y lorsqu'il utilise la méthode M_{xfy}, RP8 : les élèves ne peuvent pas articuler deux cadres, RP9 : l'élève devient perplexe dans la démarche de la réponse RC3, RP10: erreurs qui correspondent à la méthode M_{xfy}, RP11 : réponses incomplètes, AR :autres réponses, NR: non-réponses

En classe de seconde E, on ne rencontre pas les élèves qui utilisent la recette $\mathbf{R_a}$ et la démarche citée dans la réponse RC3. Le taux de réussite à cette question ne dépasse pas de 12%. Par ailleurs, la grande majorité des élèves (55%) ne peuvent pas terminer la résolution de la question dans la démarche partant sur la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. De plus les erreurs liées à cette méthode sont commises par 12% des élèves. Ce taux est aussi valable pour les élèves qui ne répondent pas à la question.
Si on regarde les résultats des élèves par niveau, il n'est pas très étonnant d'observer que le taux de réussite est plus élevé chez les bons. Un tiers de ces derniers trouvent donc la bonne réponse contre

12% des moyens et 14% des mauvais. La moitié des bons commettent cependant les erreurs relatives à la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Par contre ce type d'erreurs est totalement absent chez les moyens et mauvais. Les réponses incomplètes sont plus fréquentes chez les moyens. Ainsi près des deux tiers d'entre eux ne peuvent pas terminer la résolution de la question contre 57% des mauvais et 17% des bons.



	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	RP7	RP8	AR	NR
SF	0	0	0	0	2	19	66	4	9
BON	0	0	0	0	10	0	90	0	0
MOY	0	0	0	0	0	24	57	10	10
MAU	0	0	0	0	0	11	74	0	16
DER	0	0	0	0	0	0	75	25	0

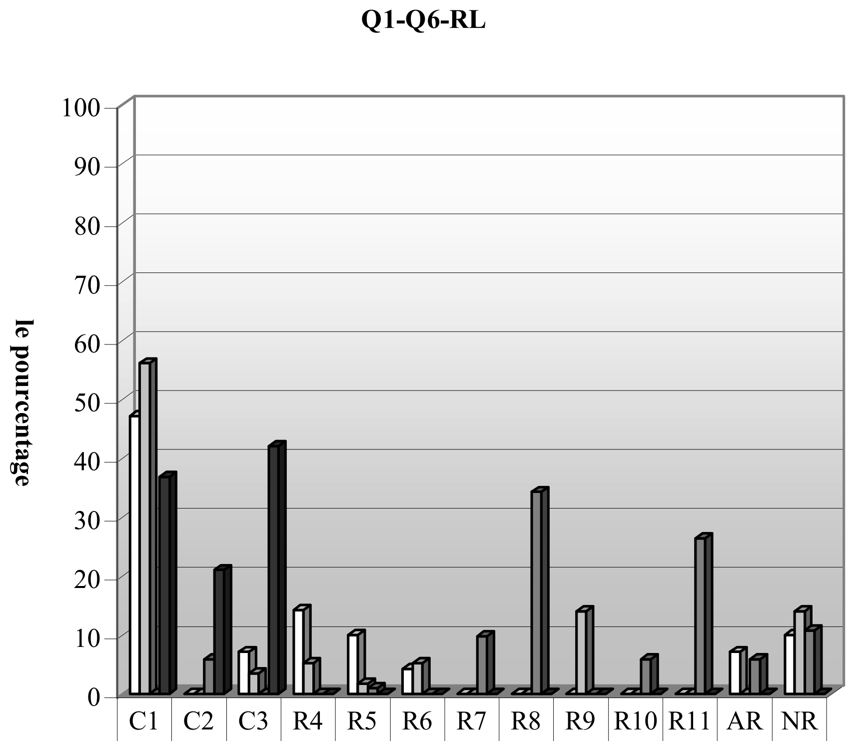
RC1 (Procédure 2) : réponse correcte avec la recette R_a. RC2 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xfy}. RC3 (Procédure 4) : réponse correcte portant sur l'image de 2 par l'inverse de la fonction f. RP4 : erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a. RP5 : erreurs liées au calcul de l'image demandée, RP6: l'élève trouve l'image de 2 sur la fonction f, RP7 : l'élève rend simplement x en y lorsqu'il utilise la méthode M_{xfy}, RP8 : les élèves ne peuvent pas articuler deux cadres, RP9 : l'élève devient perplexe dans la démarche de la réponse RC3, RP10: erreurs qui correspondent à la méthode M_{xfy}, RP11 : réponses incomplètes, AR :autres réponses, NR: non-réponses

En ce qui concerne l'autre classe de ce lycée, il est très intéressant d'observer qu'il n'y a aucun élève qui donne la bonne réponse. 66% des élèves ne peuvent pas utiliser les deux cadres :cadres algébriques et fonctionnel. Alors certains égalisent le numérateur au dénominateur, d'autres essaient de trouver un nombre en faisant quelques opérations avec les données dans l'énoncé. Au début de la démarche de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ environ 19% des élèves changent simplement les places de x et y en passant plusieurs étapes intermédiaires tandis que la question n'est pas abordée par 9% des élèves.

Remarquons cependant que les élèves qui ne peuvent pas utiliser ensembles les deux cadres sont plus nombreux chez les bons élèves. Ainsi la grande majorité d'entre eux commettent ce type d'erreurs contre 74% des mauvais et 57% des moyens. Par ailleurs, 24% des moyens changent simplement les places de x et y en passant plusieurs étapes intermédiaires contre 11% des mauvais. Cette erreur est totalement absente chez les bons.

Quant aux élèves de dérsané, les trois quarts commettent l'erreur consistant à changer simplement les places de x et y et les élèves restant répondent autrement à la question.

2.6.4 Résultats des élèves par lycée



	C1	C2	C3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	AR	NR
LA	47	0	7	14	10	4	0	0	0	0	0	7	10
LS	56	0	4	5	2	5	0	0	14	0	0	0	14
LN	0	6	0	0	1	0	10	34	0	6	26	6	11
T	37	21	42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

les réponses

RC1 (Procédure 2) : réponse correcte avec la recette R_a. RC2 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xfy}. RC3 (Procédure 4) : réponse correcte portant sur l'image de 2 par l'inverse de la fonction f. RP4 : erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a. RP5 : erreurs liées au calcul de l'image demandée, RP6: l'élève trouve l'image de 2 sur la fonction f, RP7 : l'élève rend simplement x en y lorsqu'il utilise la méthode M_{xfy}, RP8 : les élèves ne peuvent pas articuler deux cadres, RP9 : l'élève devient perplexe dans la démarche de la réponse RC3, RP10: erreurs qui correspondent à la méthode M_{xfy}, RP11 : réponses incomplètes, AR :autres réponses, NR: non-réponses

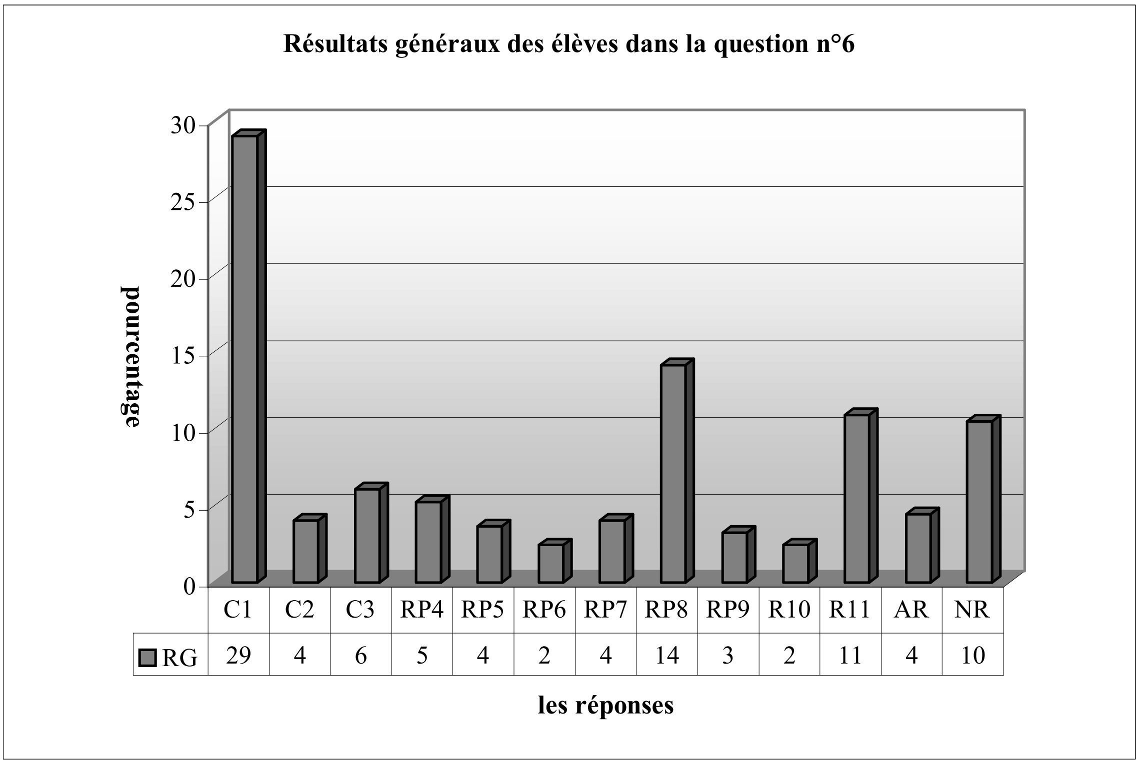
A nouveau nous sommes face à une question où les démarches privilégiées et les erreurs commises par les élèves se différencient suivant les lycées, et même suivant les classes. Dans le lycée Normal aucun élève ne privilégie la recette $\mathbf{R_a}$ tandis qu'il est majoritairement utilisé dans les autres. Par ailleurs, la démarche partant sur la définition de la fonction inverse ne paraît jamais dans ces deux derniers alors qu'elle conduit 21% des élèves de terminale et presque 6% des élèves du lycée Normal à trouver la bonne réponse.

Les erreurs célébrées dans les réponses RP7, RP8, RP10 et RP11 sont uniquement réservées aux élèves du lycée Normal tandis que l'erreur de la réponse RP9 ne paraît que dans le lycée Super.

Si on regarde l'aspect des erreurs dans les lycées, on rencontre les erreurs correspondant à la démarche utilisée, par exemple les erreurs provoquées par la mauvaise-application de la recette $\mathbf{R_a}$ sont commises par 14% des élèves dans le lycée Anatolien et 5% dans le lycée Super. 14% des élèves du lycée Super font des erreurs dans la démarche de la réponse RC3 tandis que 34% des élèves du lycée Normal ne peuvent pas passer du cadre algébrique au cadre fonctionnel dans la résolution de la question à partir de la méthode de « en fonction de y », 26% d'entre eux n'arrivent pas à terminer la résolution. Environ 10% des élèves du lycée Normal changent les places de x et y comme s'ils étaient à la dernière étape de la résolution.

En ce qui concerne le taux de réussite, plus de la moitié des élèves des lycées anatolien et super donnent la bonne réponse alors que le taux de réussite est seulement d'environ 6% dans le lycée Normal.

2.6.5 Résultats généraux des élèves



RC1 (Procédure 2) : réponse correcte avec la recette R_a. RC2 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xfy}. RC3 (Procédure 4) : réponse correcte portant sur l'image de 2 par l'inverse de la fonction f. RP4 : erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a. RP5 : erreurs liées au calcul de l'image demandée, RP6: l'élève trouve l'image de 2 sur la fonction f, RP7 : l'élève rend simplement x en y lorsqu'il utilise la méthode M_{xfy}, RP8 : les élèves ne peuvent pas articuler deux cadres, RP9 : l'élève devient perplexe dans la démarche de la réponse RC3, RP10: erreurs qui correspondent à la méthode M_{xfy}, RP11 : réponses incomplètes, AR :autres réponses, NR: non-réponses

Le tableau précédent montre que plus du tiers des élèves répondent correctement à cette question. La grande majorité de ces bonnes réponses sont fournies en utilisant la recette $\mathbf{R_a}$ (29%). Il y a seulement 4% des élèves qui trouvent la bonne réponse en privilégiant la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ tandis que le taux de bonnes réponses avec la procédure 4 (RC3) est de 6%.
Les erreurs qui consistent à ne pas utiliser deux cadres ensemble, sont les erreurs les plus fréquentes, 14% des élèves commettent ainsi ce type d'erreurs. Par ailleurs, le taux des élèves qui n'arrivent pas à terminer la résolution de la question et donnent des réponses incomplètes est de 11%.
En ce qui concerne les autres erreurs commises par les élèves, elles ne sont pas très fréquentes. Par exemple, 5% des élèves commettent des erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$, 4% des élèves font des erreurs de calcul, lors qu'ils calculent l'image demandée, 4% des élèves font des erreurs consistant à remplacer simplement x par y lors de l'utilisation de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ et 2% des élèves font des erreurs liées à cette méthode.
Par ailleurs, un très petit nombre d'élèves trouve simplement l'image demandée par f et 3% des élèves n'arrivent pas à trouver la bonne réponse dans la démarche de la réponse RC3. Le taux d'autres réponses et celui de non-réponses ne sont pas plus élevés. Ainsi la question n'est pas abordée par 10% des élèves. Tandis que le taux des élèves qui répondent autrement à la question n'est que de 4%. Cela indique que la question est assez familière aux élèves.

2.6.6 Conclusion

En regardant les taux des procédures correctes, nous constatons que la procédure P2 dans laquelle la recette $\mathbf{R_a}$ est privilégiée est majoritairement utilisée. Cela nous permet de dire que les procédures utilitaires (ou les plus courtes) sont préférées par les élèves. De plus le fait que, dans cette question, le taux des élèves qui trouvent la bonne réponse à partir de méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ soit beaucoup moins élevé que dans la question n°3 (4%-23%) montre que les élèves sont plus habitués à utiliser la recette $\mathbf{R_a}$ dans des fonctions rationnelles et que la recette $\mathbf{R_a}$ engendre moins de risques d'erreurs dans des fonctions rationnelles (5% des erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette contre 13% dans la question n°3).

Par ailleurs, dans les lycées anatolien et super les taux de réussite sont très proches et satisfaisants. La quasi-totalité des élèves qui trouvent la bonne réponse utilisent la recette $\mathbf{R_a}$. Comme les élèves ne privilégient pas la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$, il n'y a aucune réponse correcte ni aucune réponse erronée liée à cette méthode dans ces deux lycées. Cela montre bien qu'un enseignement très proche du concours est très favorisé. Par ailleurs, comme nous l'avons déjà indiqué, les élèves du lycée Anatolien sont meilleurs en mathématiques que ceux des lycées super, parce qu'ils sont recrutés sur un concours. Mais il y a cependant une très petite différence entre les taux de réussite à cette question dans ces lycées. Cela nous conduit à nous demander si ce type de situations comme la recette $\mathbf{R_a}$ (mathématiquement peu riches) gomme la différence entre les élèves qui sont bons et ceux qui ne les sont pas. En ce qui concerne le lycée Normal, un très petit nombre des élèves peut trouver la bonne réponse. Contrairement aux élèves des autres lycées, il n'y a aucun élève qui utilise la recette $\mathbf{R_a}$ et la procédure 4. C'est pourquoi la plupart des erreurs sont liées à la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. De plus les aspects des erreurs commises par les élèves de ce lycée nous amènent à conclure qu'ils ont beaucoup de lacunes théoriques profondes (34% des erreurs consistent à ne pas utiliser deux cadres et 26% des réponses sont incomplètes).

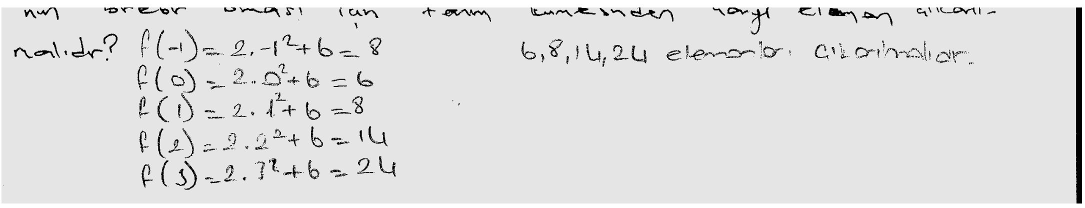
<u>2.7 Question n°7</u>

Comme je l'ai dit plus haut, j'ai voulu ici voir si les élèves connaissent la définition de la fonction injective et qu'ils peuvent la réinvestir à l'occasion d'un exercice.
Je présente maintenant les catégories de réponse des élèves :

RC (Procédure 1) : réponse correcte.
$2(-1)^2+6=8$, $2.0+6=6$, $2(1)^2+6=8$, $2.(2)^2+6=14$, $2.(3)^2+6=24$,
il faut sortir 1, $f(x)=\{(-1,8), (6,0), (2,14), (3,24)\}$………(SA30)
$x=-1$ $f(-1)=2.1^2+6=8$, $x=1$ $f(1)=2.1+6=8$ il faut sortir 1 ou –1…….(SA24)
il faut sortir l'élément $\{-1\}$……(SB7)
$f(x)=2.(-1)^2+6=2.1^2+6$ pour que le même élément n'ait pas de deux images, il faut sortir 1 ou –1…..(T5)

RP1 : l'élève ne trouve que les images des éléments de l'ensemble A sur f.
$f(x)=2x^2+6=2.-1+6=-2+6=4$, $=2x^2+6=2.0^2+6=2.1+6=8$, $=2x^2+6=2.1^2+6=8$,
$=2x^2+6=2.2^2+6=14$, $=2x^2+6=2.3^2+6=18+6=24$……(SF9)
$f(-1)=2.(-1)^2+6=8$, $f(0)=2.0+6=6$, $f(1)=2.1+6=8$,
$f(2)=2.2+6=10$, $f(3)=2.3+6=12$….(SA26)

RP2 : erreur des éléments à supprimer.
$f(-1)=2.-1^2+6=8$, $f(0)=2.0^2+6=6$, $f(1)=2.1^2+6=8$,
$f(-1)=2(-1)^2+6=9$, $f(0)=2.0^2+6=8$, $f(1)=2.(1)^2+6=8$,
$f(2)=2.2^2+6=14$, $f(3)=2.3^2+6=24$ comme chaque élément a sa correspondance, il ne faut supprimer aucun élément…….(SA9)

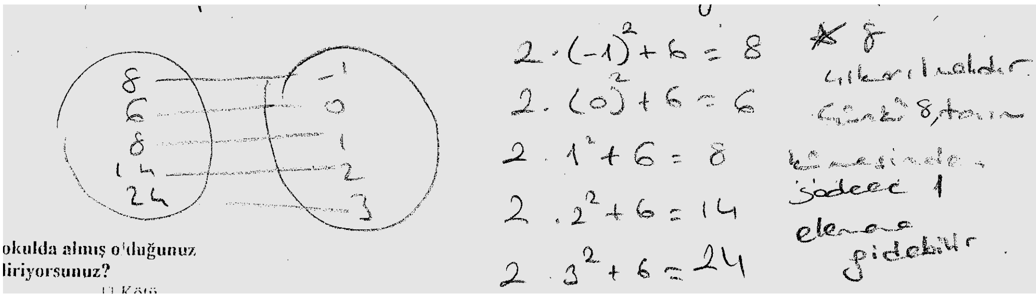


… il faut sortir les éléments 6,8,14,24……(SA20)

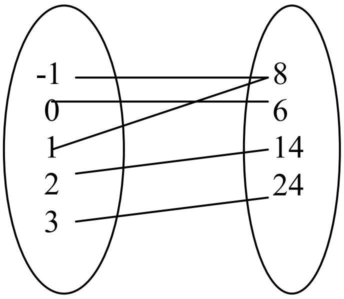
RP3 : erreurs de calcul.
Pour x= 0, $2x^2+6=2.0^2+6=6$
Pour x= -1, $2x^2+6=2(-1)^2+6=-2+6=4$
Pour x= 1, $2x^2+6=2.1^2+6=8$
Pour x= 2, $2x^2+6=2.2^2+6=8+6=14$
Pour x= 3, $2x^2+6=2.3^2+6=17$*…….(SA36)*
$f(-1)=2.(-1)+6=6$, $f(0)=2.0^2+6=6$, $f(1)=2.1^2+6=8$, $f(2)=2.2^2+6=12$,
$f(3)=2.3^2+6=24$ *f(-1), f(0) ne se fait pas correspondance au même ensemble (ils veulent dire au même élément), on doit supprimer l'un des deux…….(SB25),(SB26)*
RP4 : l'élève supprime les éléments 1 et –1.
$2.-1^2+6$,
$2.1+6$,
$2+6=8$
il faut supprime

2.0^2+6	2.1^2+6	2.3^2+6
0+6	2.1+6	2.9+6
=6	2+6	18+6
	=8	=24

RP5 : l'élève trouve les images sur la …te …uelques éléments de l'ensemble d'images.



Il faut enlever 8. Car 8 peut avoir une seule image dans l'ensemble de définition……(SD27)

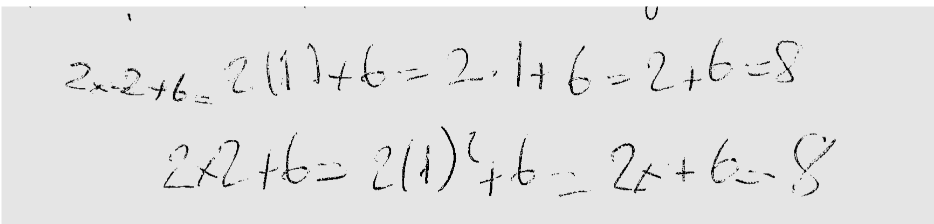


Pour x= -1
=2.1+6
=8

Pour x=0
=0+6
=6

Pour x=1
=2+6
=8

Pour x=2, =14
Pour x=3, =24*. le résultat : il faut supprimer 8. Sinon la fonction semble comme une fonction fixe…..(SD18)*
RP6 : l'élève trouve les images de quelques éléments sur la fonction f.
$2-1^2+6$
$2+1+6$
$=9$*……..(SE51)*
RP7 : L'élève trouve l'image de 1 et –1 sur f.



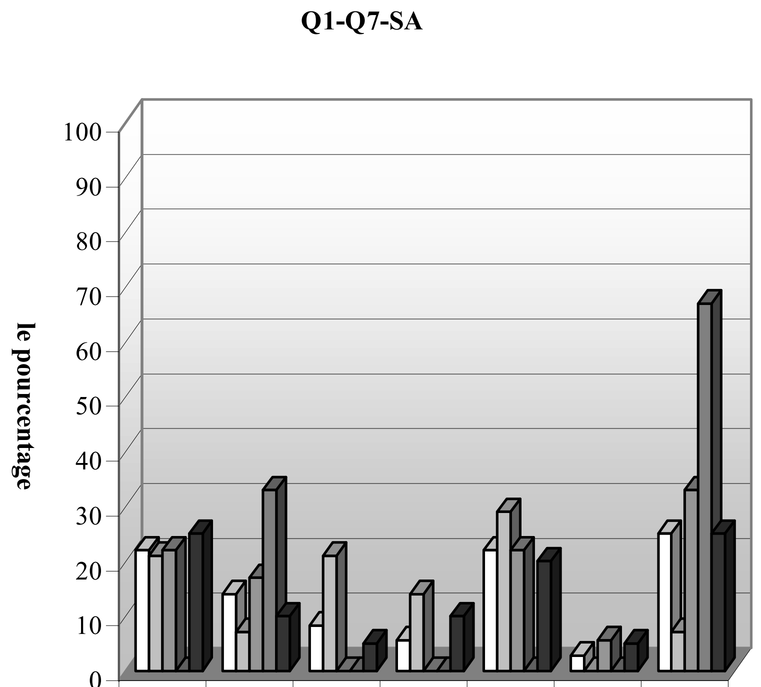
(SE35)

Autres Réponses:
$f: A \rightarrow B$, $f(x)=2x^2+6=4+6=10$*……(SE23)*

f : A → B, f(x)=2x²+6 et A={-1, 0, 1, 2, 3}, f(x)=2x-6 A={1, 2, 3}…..(SA14)
1,2,3,0,5,7=8……(SE8)
on met x= -1, 2x+6, 2 –1² +6=8, comme 8 n'est pas dans l'ensemble A, donc il faut sortir -1…..(SE15)
Non-réponses :
Maintenant je vais passer à l'analyse des résultats des élèves lycée par lycée :

2.7.1 Lycée Anatolien

Comme la question n'est pas un simple exercice d'application, (les élèves doivent savoir et adapter la définition de la fonction injective à la résolution de la question) j'attends que cela fasse chuter le taux de réussite dans le lycée.
Bien qu'il soit suffisant de sortir l'un des deux, je suppose que la bonne partie des élèves auraient tendance à supprimer les deux 1 et –1 dans l'ensemble de définition.



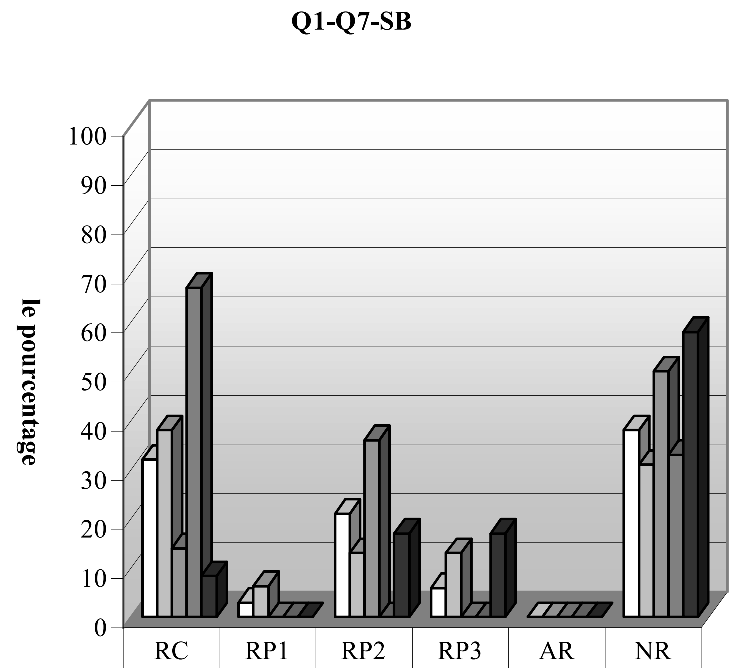
	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	AR	NR
SA	22	14	8	6	22	3	25
BON	21	7	21	14	29	0	7
MOY	22	17	0	0	22	6	33
MAU	0	33	0	0	0	0	67
DER	25	10	5	10	20	5	25

les réponses

RC (Procédure 1) : réponse correcte, RP1 : l'élève ne trouve que les images des éléments de l'ensemble A sur f, RP2 : erreur des éléments à supprimer, RP3 : erreurs de calcul, RP4 : l'élève supprime les éléments 1 et –1, RP5 : l'élève trouve les images sur la fonction f. Ensuite il supprime quelques éléments de l'ensemble d'images, RP6 : l'élève trouve les images de quelques éléments sur la fonction f, RP7 : L'élève trouve l'image de 1 et –1 sur f,AR :autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'en classe de seconde A, le taux de réussite est de 22%. Ce taux monte à 44%, si l'on prend comme correcte la réponse RP4 qui est donnée par les élèves qui suppriment les deux nombres –1 et 1. 14% des élèves trouvent cependant l'image des éléments de l'ensemble A sur la fonction f sans mettre en cause l'injection. L'erreur des éléments à supprimer est faite par 8,3% des élèves. Tandis qu'environ 6% des élèves commettent les erreurs de calcul dans une démarche correcte.

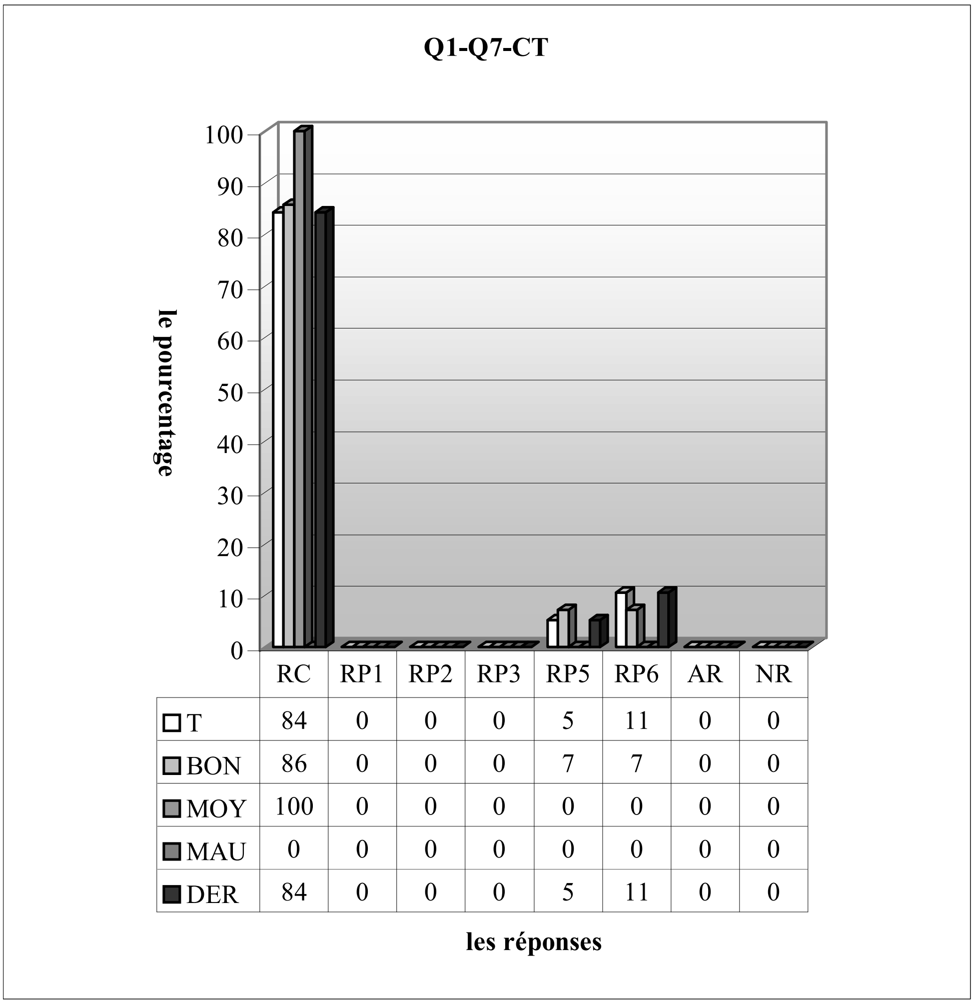
Le fait qu'un quart des élèves ne donnent pas de réponse nous montre que la question (ou plutôt le type de la question) n'est pas très familière aux élèves.
Une légère différence entre les bons et moyens s'observe par le taux de réussite à cette question. Ainsi 21% des bons fournissent une réponse correcte contre 22% des moyens par contre il n'y aucune réponse correcte de la part des mauvais élèves.



	RC	RP1	RP2	RP3	AR	NR
SB	32	3	21	6	0	38
BON	38	6	13	13	0	31
MOY	14	0	36	0	0	50
MAU	67	0	0	0	0	33
DER	8	0	17	17	0	58

RC (Procédure 1) : réponse correcte, RP1 : l'élève ne trouve que les images des éléments de l'ensemble A sur f, RP2 : erreur des éléments à supprimer, RP3 : erreurs de calcul, RP4 : l'élève supprime les éléments 1 et –1, RP5 : l'élève trouve les images sur la fonction f. Ensuite il supprime quelques éléments de l'ensemble d'images, RP6 : l'élève trouve les images de quelques éléments sur la fonction f, RP7 : L'élève trouve l'image de 1 et –1 sur f,AR :autres réponses, NR :non-réponses

Quant à la deuxième seconde, le taux de réussite à cette question n'est pas très satisfaisant (32%). 21% des élèves ont cependant des difficultés à trouver l'élément qui « détruise » l'injection. Les erreurs de calcul sont commises par 6% des élèves tandis qu'une grande partie (38%) n'abordent pas la question.
Il est très intéressant de constater que le taux de réussite est plus élevé chez les mauvais. Alors plus des deux tiers d'entre eux fournissent une réponse correcte contre 38% des bons et 14% des moyens. Par ailleurs, les élèves qui commettent l'erreur des éléments à supprimer sont plus nombreux chez ces derniers (36% contre 13% des bons). Par contre on ne rencontre pas ce type d'erreur chez les mauvais. Les erreurs de calcul avec un taux de 13% et l'erreur consistant à ne trouver que les images des éléments A sur f avec un taux de 6% sont uniquement réservées aux bons élèves. On remarque cependant que les moyens se distinguent des bons et mauvais par le taux plus élevé de non-réponses. Ainsi la moitié des moyens ne répondent pas à la question contre 31% des bons et un tiers des mauvais.
Quant aux élèves de dérsané, le taux de réussite descend sensiblement à 8%. De plus 58% ne répondent pas à la question. Il s'agit cependant d'un même pourcentage pour l'erreur des éléments à supprimer et les erreurs de calcul.

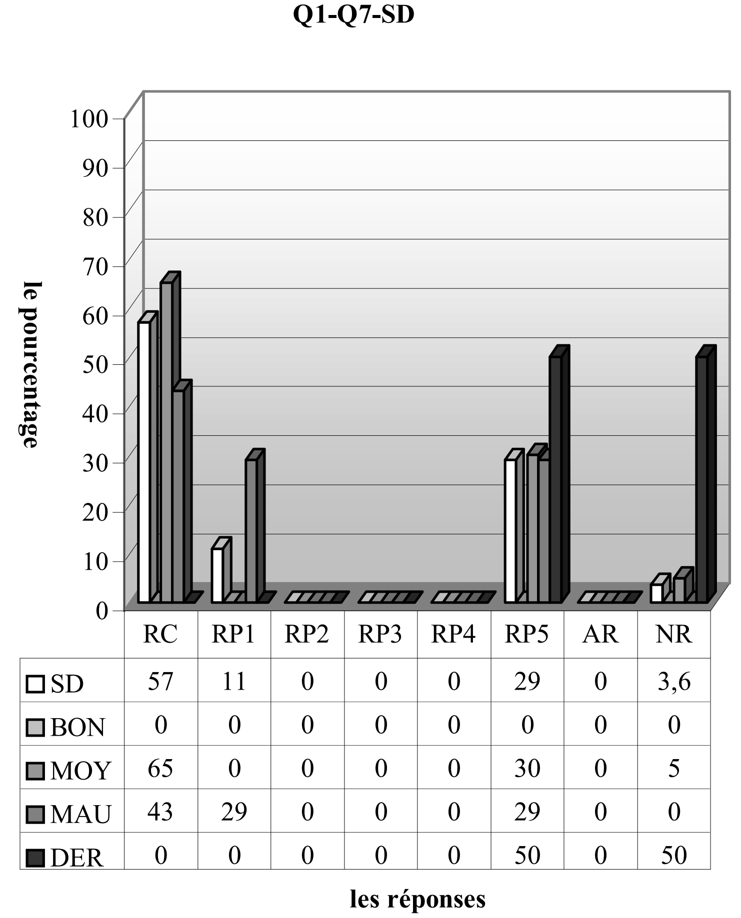


	RC	RP1	RP2	RP3	RP5	RP6	AR	NR
T	84	0	0	0	5	11	0	0
BON	86	0	0	0	7	7	0	0
MOY	100	0	0	0	0	0	0	0
MAU	0	0	0	0	0	0	0	0
DER	84	0	0	0	5	11	0	0

RC (Procédure 1) : réponse correcte, RP1 : l'élève ne trouve que les images des éléments de l'ensemble A sur f, RP2 : erreur des éléments à supprimer, RP3 : erreurs de calcul, RP4 : l'élève supprime les éléments 1 et –1, RP5 : l'élève trouve les images sur la fonction f. Ensuite il supprime quelques éléments de l'ensemble d'images, RP6 : l'élève trouve les images de quelques éléments sur la fonction f, RP7 : L'élève trouve l'image de 1 et –1 sur f,AR :autres réponses, NR :non-réponses

Dans la classe de terminale, les élèves donnent majoritairement (85%) la bonne réponse, 11% des élèves trouvent les images des éléments sans dire rien sur l'injection, un élève dit qu'il faut sortir les éléments 1 et –1.

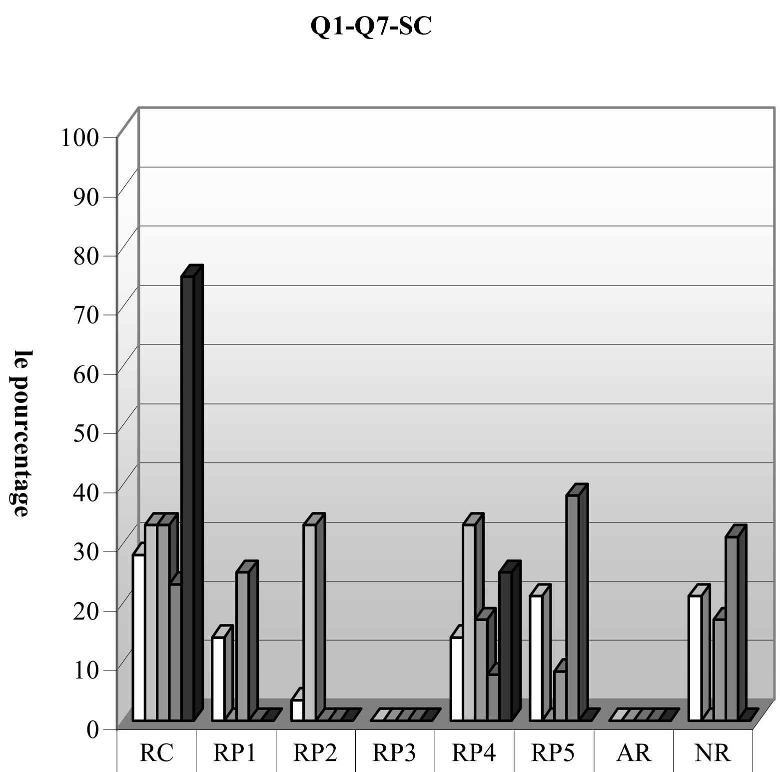
2.7.2 Lycée Super



	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SD	57	11	0	0	0	29	0	3,6
BON	0	0	0	0	0	0	0	0
MOY	65	0	0	0	0	30	0	5
MAU	43	29	0	0	0	29	0	0
DER	0	0	0	0	0	50	0	50

RC (Procédure 1) : réponse correcte, RP1 : l'élève ne trouve que les images des éléments de l'ensemble A sur f, RP2 : erreur des éléments à supprimer, RP3 : erreurs de calcul, RP4 : l'élève supprime les éléments 1 et –1, RP5 : l'élève trouve les images sur la fonction f. Ensuite il supprime quelques éléments de l'ensemble d'images, RP6 : l'élève trouve les images de quelques éléments sur la fonction f, RP7 : L'élève trouve l'image de 1 et –1 sur f,AR :autres réponses, NR :non-réponses

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, en classe D, plus de la moitié des élèves donnent la bonne réponse (57%). 11% des élèves ne trouvent que les images des éléments de l'ensemble A par f, tandis que le taux des élèves qui trouvent les images des éléments par la fonction f et suppriment les images de 1 et –1 de l'ensemble image est de 29%. Par ailleurs, 11% des élèves ne disent rien sur l'élément à supprimer bien qu'ils aient trouvé toutes les images des éléments de l'ensemble A. En regardant la répartition de non-réponse, on peut dire que la question n'est pas très loin d'être routinière aux élèves.
En ce qui concerne les résultats des élèves par niveau, 65% des moyens donnent la bonne réponse contre 43% des mauvais. Une légère différence entre les moyens et mauvais s'observe par le taux des élèves qui suppriment les images de 1 et –1 de l'ensemble image. 30% des moyens commettent cette erreur contre 29% des mauvais, seuls 29% des mauvais ne trouvent que les images des éléments de l'ensemble A.
Chez les élèves de dérsané la moitié trouvent les images et suppriment quelques éléments de l'ensemble image tandis que la question n'est pas abordée par 50% des élèves.



	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SC	28	14	3	0	14	21	0	21
BON	33	0	33	0	33	0	0	0
MOY	33	25	0	0	17	8	0	17
MAU	23	0	0	0	8	38	0	31
DER	75	0	0	0	25	0	0	0

les réponses

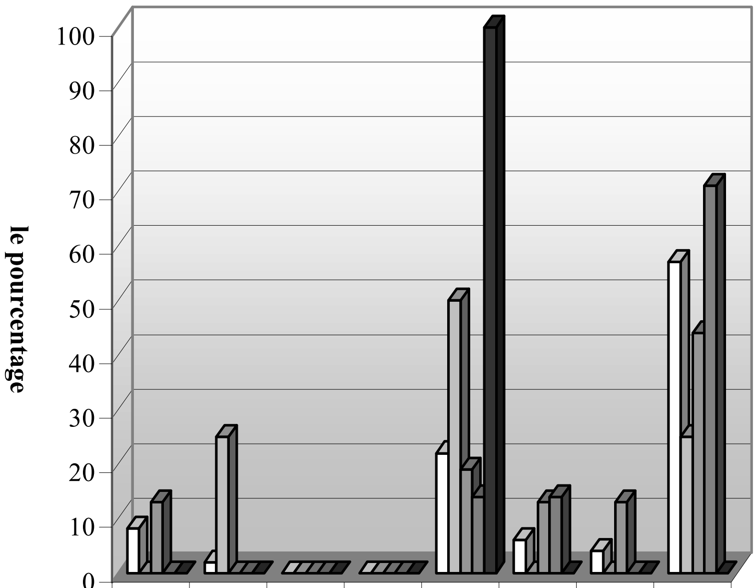
Le tableau ci-dessus montre qu'en classe C, la répartition des élèves qui donnent la bonne réponse descend jusqu'à 28%. Si l'on compte la réponse RP4 comme correcte, ce taux atteint 42%. Par ailleurs, 14% des élèves trouvent simplement les images par la fonction f sans parler de l'injection. Alors que le même taux des élèves suppriment les deux éléments 1 et –1 dans l'ensemble de définition, 21% cherchent l'élément à supprimer dans l'ensemble image. Contrairement à la classe précédente le taux de non-réponse est plus élevé. La question est donc peu familière aux élèves de cette classe.

En prenant la réponse RP4 comme correcte, on observe que le taux de réussite à cette question est plus élevé chez les bons élèves de cette classe. Ainsi les deux tiers des bons fournissent une réponse correcte contre la moitié des moyens et 31% des mauvais. La réponse RP1 concernant les élèves qui ne trouvent que les images est uniquement réservée aux moyens avec un taux de 25%. Par contre l'erreur des éléments à supprimer n'est présente que chez un tiers des bons, 38% des mauvais trouvent cependant toutes les images par la fonction f, ensuite ils suppriment quelques éléments de l'ensemble image. Ce taux descend à 8% chez les moyens et il n'y aucune réponse pareille de la part des bons. Il n'est pas très surprenant de constater que les élèves qui ne répondent pas à la question sont plus nombreux chez les mauvais que les autres (31% contre 17% des moyens et un pourcentage nul chez les bons).

Quant aux résultats des élèves de dérsané, le taux de réussite monte à 75% chez eux. Les élèves restant affirment qu'il faut supprimer les éléments 1 et –1 bien qu'il soit suffisant d'éliminer l'un des deux. Alors on peut dire en comptant ce type de réponses comme correcte que chaque élève trouve la bonne réponse.

2.7.3 Lycée Normal

Q1-Q7-SE

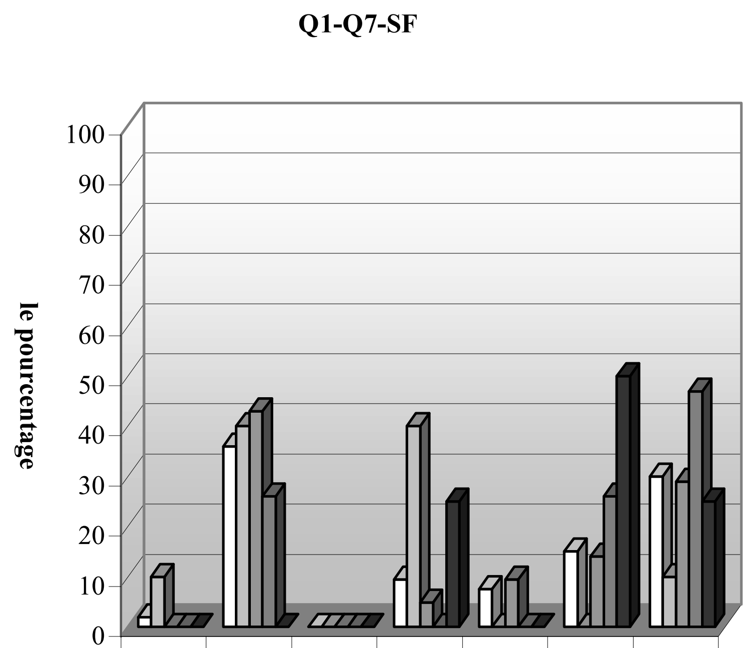


	RC	RP1	RP2	RP3	RP6	RP7	AR	NR
SE	8	2	0	0	22	6	4	57
BON	0	25	0	0	50	0	0	25
MOY	13	0	0	0	19	13	13	44
MAU	0	0	0	0	14	14	0	71
DER	0	0	0	0	100	0	0	0

les réponses

RC (Procédure 1) : réponse correcte, RP1 : l'élève ne trouve que les images des éléments de l'ensemble A sur f, RP2 : erreur des éléments à supprimer, RP3 : erreurs de calcul, RP4 : l'élève supprime les éléments 1 et –1, RP5 : l'élève trouve les images sur la fonction f. Ensuite il supprime quelques éléments de l'ensemble d'images, RP6 : l'élève trouve les images de quelques éléments sur la fonction f, RP7 : L'élève trouve l'image de 1 et –1 sur f,AR :autres réponses, NR :non-réponses

En regardant les répartitions de non-réponse on peut dire que les élèves voient pour la première fois une question pareille (57%). Le taux de réussite est donc seulement de 8,2%. Ce qui signifie que la grande majorité des élèves ne connaissent pas l'injectivité. Par ailleurs, 22% des élèves trouvent les images de quelques éléments par la fonction f tandis que 6,1% trouvent les images de 1 et –1 sans commentaire.
Comme le montre bien le tableau ci-dessus, les bonnes réponses ne viennent que de la part des moyens : seuls 13% de ces derniers fournissent donc une réponse correcte. Les bons se distinguent sensiblement des autres par le taux plus élevé d'erreur consistant à trouver quelques éléments sur la fonction f. Ainsi la moitié d'entre eux commettent cette erreur contre 19% des moyens et 14% des mauvais.
Tous les élèves de dérsané trouvent cependant les images de quelques éléments sur la fonction f.



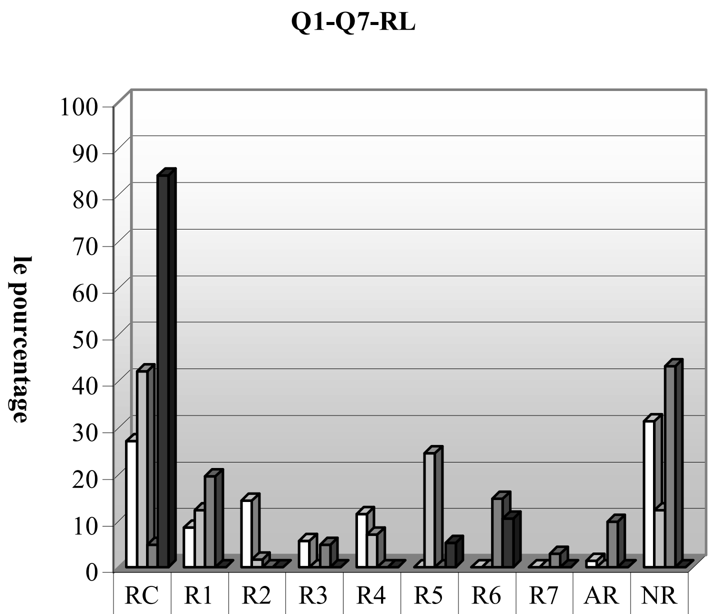
	RC	RP1	RP2	RP3	RP6	AR	NR
SF	2	36	0	9	8	15	30
BON	10	40	0	40	0	0	10
MOY	0	43	0	5	10	14	29
MAU	0	26	0	0	0	26	47
DER	0	0	0	25	0	50	25

les réponses

RC (Procédure 1) : réponse correcte, RP1 : l'élève ne trouve que les images des éléments de l'ensemble A sur f, RP2 : erreur des éléments à supprimer, RP3 : erreurs de calcul, RP4 : l'élève supprime les éléments 1 et –1, RP5 : l'élève trouve les images sur la fonction f. Ensuite il supprime quelques éléments de l'ensemble d'images, RP6 : l'élève trouve les images de quelques éléments sur la fonction f, RP7 : L'élève trouve l'image de 1 et –1 sur f,AR :autres réponses, NR :non-réponses

Quant à la classe F, le taux de réussite à cette question descend jusqu'environ 2%. De plus une bonne partie des élèves n'abordent pas la question. La plupart (36%) trouvent cependant les images de l'ensemble de définition sans dire rien sur l'injection. Les erreurs de calcul sont commises par 9,4% des élèves tandis que 7,5% trouvent l'image de quelques éléments sur f.
Si on regarde les résultats des élèves par niveau, on constate que seuls 10% des bons peuvent fournir la réponse correcte. Une légère différence entre les bons et moyens s'observe par le taux plus élevé d'erreur consistant à ne trouver que toutes les images par la fonction f. Alors 40% des bons et 43% des moyens donnent ce type de réponses contre 26% des mauvais. On remarque cependant qu'une grande partie des bons élèves ne peuvent pas arriver à la bonne réponse à cause des erreurs de calcul (40%). Ce taux perd son importance en descendant jusqu'à 5% chez les moyens et un pourcentage nul chez les mauvais. Le taux de non-réponses augmente des bons aux mauvais : près de la moitié de ces derniers ne répondent pas à la question contre 29% des moyens et 10% des bons. Par ailleurs, l'erreur qui consiste à trouver les images de quelques éléments est uniquement présente chez les moyens avec un taux de 10%.
En ce qui concerne les résultats des élèves qui suivent les dérsanés, seul un quart d'entre eux se rapprochent assez de la bonne réponse mais ils commettent les erreurs de calcul. La moitié des élèves deviennent cependant perplexes face à la question. De plus la question n'est pas abordée par un quart des élèves.

2.7.4 Résultats des élèves par lycée



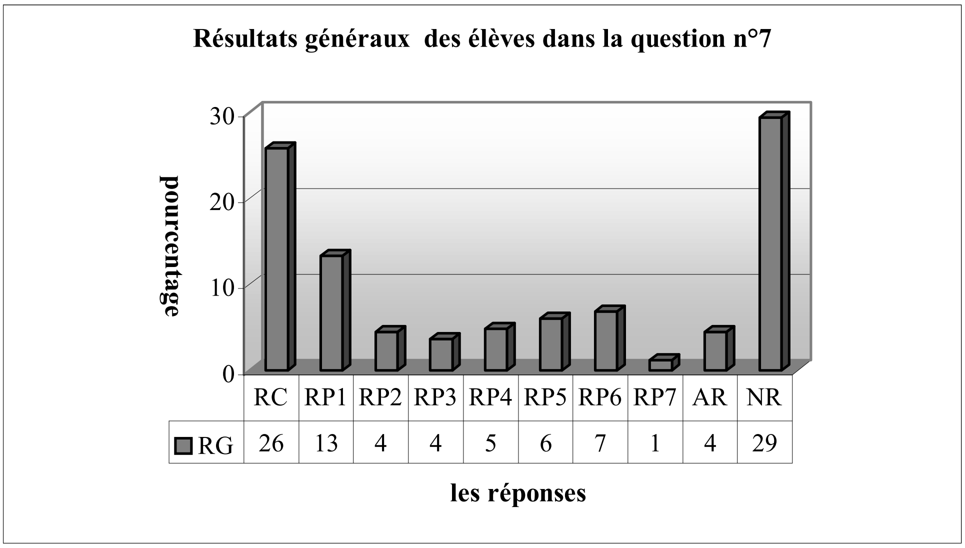
	RC	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	AR	NR
LA	27	9	14	6	11	0	0	0	1	31
LS	42	12	2	0	7	25	0	0	0	12
LN	5	20	0	5	0	0	15	3	10	43
T	84	0	0	0	0	5	11	0	0	0

les réponses

RC (Procédure 1) : réponse correcte, RP1 : l'élève ne trouve que les images des éléments de l'ensemble A sur f, RP2 : erreur des éléments à supprimer, RP3 : erreurs de calcul, RP4 : l'élève supprime les éléments 1 et –1, RP5 : l'élève trouve les images sur la fonction f. Ensuite il supprime quelques éléments de l'ensemble d'images, RP6 : l'élève trouve les images de quelques éléments sur la fonction f, RP7 : L'élève trouve l'image de 1 et –1 sur f,AR :autres réponses, NR :non-réponses

Il est remarquable qu'ici le nombre de non-réponses à cette question soit plus élevé et celui de réussite soit moins élevé dans les lycées anatolien et normal. On peut dire que la question n'est pas très familière aux élèves. Le taux de réussite dans le lycée Super est plus satisfaisant que les autres (42% contre 27% dans l'une et environ 5% dans l'autre). Si on prend la réponse RP4 comme correcte, le taux de réussite monte à environ 38% pour le lycée Anatolien et à 49% le lycée Super. Les élèves qui trouvent les images de l'ensemble de définition sans mettre en cause l'injection sont nombreux dans le lycée Normal (presque 20% contre 12% dans le lycée Super et 9% dans le lycée Anatolien).
14% des élèves du lycée Anatolien ont des difficultés à trouver l'élément à supprimer. Ce taux perd de son importance dans les autres (environ 2% le lycée Super, aucun élève le lycée Normal).

2.7.5 Résultats généraux des élèves



RC (Procédure 1) : réponse correcte, RP1 : l'élève ne trouve que les images des éléments de l'ensemble A sur f, RP2 : erreur des éléments à supprimer, RP3 : erreurs de calcul, RP4 : l'élève supprime les éléments 1 et –1, RP5 : l'élève trouve les images sur la fonction f. Ensuite il supprime quelques éléments de l'ensemble d'images, RP6 : l'élève trouve les images de quelques éléments sur la fonction f, RP7 : L'élève trouve l'image de 1 et –1 sur f,AR :autres réponses, NR :non-réponses

Selon le tableau ci-dessus, il y a 26% des élèves qui donnent la bonne réponse. Ce taux atteint 31% avec la réponse RP4 et la question n'est pas abordée par 29% des élèves. Cela signifie que cette question n'est pas très familière aux élèves, 31% des élèves échouent de ne pas savoir utiliser la définition de l'injectivité (RP1,RP2,RP5,RP6 et RP7).

2.7.6 Conclusion

Comme nous l'avons prédit lors de l'analyse a priori, la plupart des élèves ne peuvent pas utiliser la définition de l'injectivité. C'est pourquoi il y a une grande chute de réussite par rapport à la question n°2 (80%-31%). Cela nous permet dire que les élèves ont le niveau technique mais ils ne savent cependant pas interpréter ou utiliser les résultats des définitions même s'ils savent ces définitions. (Nous avons constaté, lors des déroulements des questionnaires, la plupart des élèves savaient la définition de l'injectivité. Mais ils n'arrivaient pas à déterminer l'élément à supprimer).

Le taux de réussite est plus élevé dans le lycée Super que dans les autres. Le fait que dans le lycée Normal un très petit nombre des élèves donnent la bonne réponse (5%) et que le taux de non-réponse soit très élevé (43%) peuvent être interprétés en évoquant le fait que la question est très loin d'être routinière pour les élèves de ce lycée. Par ailleurs, le fait que dans le lycée Anatolien il y ait une petite différence entre le taux de réussite (38%) et celui de non-réponse (31%) nous conduit à penser que le niveau des élèves n'est pas très homogène.

3. Analyse a posteriori du deuxième questionnaire-élèves

Comme je l'ai déjà indiqué, ce questionnaire est préparé à partit des cahiers des élèves de seconde du lycée Anatolien et des manuels de préparation au concours. La plupart des questions sont les questions déjà proposées au concours dans les années différentes.
Afin de repérer les comportements des élèves en face aux questions du concours suivant les lycées ; les techniques utilisées et les erreurs commises par les élèves j'ai passé ce questionnaire auprès des élèves de classes de seconde et une classe de terminale. Dans cette partie, je vais analyser les résultats des élèves question par question dans le questionnaire 2.

3.1 Question n°1

Dans cette question, les élèves sont amenés à traduire la fonction proposée dans l'énoncé du langage naturel en langage algébrique. Pour ce faire les élèves doivent mobiliser des connaissances déjà acquises sur l'inverse des nombres.
Comme les élèves ne sont pas très habitués à résoudre ce type de questions qui les conduit à penser ou dire autrement, je n'attends pas que le taux de réussite à cette question soit très élevé dans les classes de seconde surtout les classes ayant plus d'élèves fréquentant les dérsanés.

Comme il n'y a aucun élève qui remarque que la fonction n'est pas définie pour le nombre $\frac{1}{2}$, nous ne l'avons pas non plus pris en compte et nous avons compté les réponses des élèves qui calculent l'image demandée comme correctes.
Voici les catégories des réponses des élèves :

RC1 (Procédure 2) : réponse correcte.
L'élève peut algébriquement écrire la fonction. Ensuite il met le nombre $\frac{1}{2}$ dans cette *fonction.*

f(x)=x+$\frac{1}{x}$*, f(1/2)=1/2+2=5/2………..(SA30),(T4)*

RC2 (Procédure 3) : réponse correcte sans trouver la formule algébrique de la fonction.
L'élève trouve la bonne réponse sans écrire la fonction en forme algébrique.
f(1/2)=1/2+2=5/2………(SA20),(SB29)
RC3 : réponse correcte sans calculer l'image demandée.
L'élève écrit algébriquement la fonction. Ensuite il s'arrête là.
f(x)=x+$(x)^{-1}$*…………(SB10)*
RP4: erreurs de calcul

$$\underset{(1)}{\frac{1}{2}} + \underset{(2)}{\frac{2}{1}} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{4} \qquad f(x) = x + \frac{1}{x}$$

(SE46)

$\frac{1}{2}+\frac{2}{1}=\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{5}{4}$ *……….(SE30)*

RP5 : l'élève multiple $\frac{1}{2}$ avec son inverse. Et il le fait deux fois. Ensuite il additionne les deux produits.

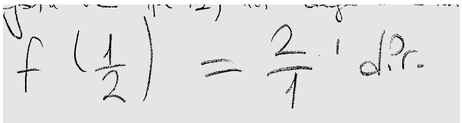
$$2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2$$
$$f(1/2) = \cancel{2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \cancel{2 \cdot \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2}} \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

(SC6)

Autres réponses :

$\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $\quad (\frac{1}{2})^{-1}+(\frac{1}{2})^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{1}+\frac{2}{1}=4$ ………*(SE7),(SE40),(SE9)*

$x=\frac{1}{2}$, $\; y=\frac{8}{8}=1$ ……. *(SE44)*



***(SC28)**,(SC27),(SC17)*

$\frac{1}{2}=0,5$ ……*(SC26)*

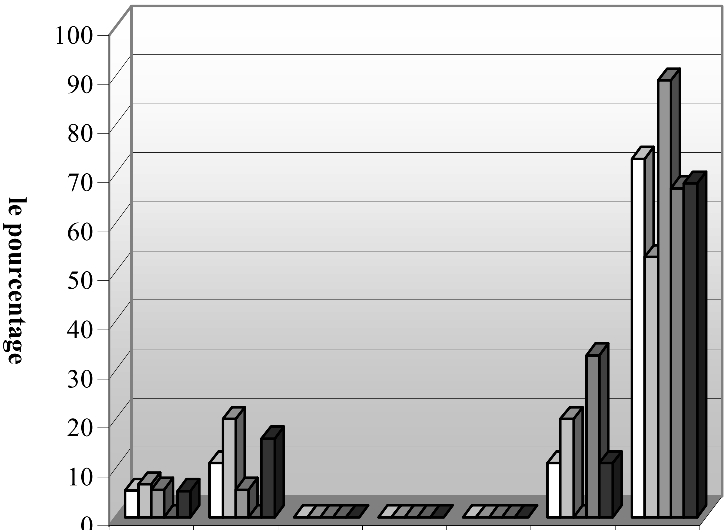
$\frac{1}{2}=2+2x=2x=6=2x3-2$ ………..*(SC18)*

Non-réponses :

Maintenant je passe à l'analyse des résultats en donnant les tableaux lycée par lycée ;

3.1.1 Lycée Anatolien

Q2-Q1-SA (Questionnaire 2-Question 1- Classe de Seconde A)



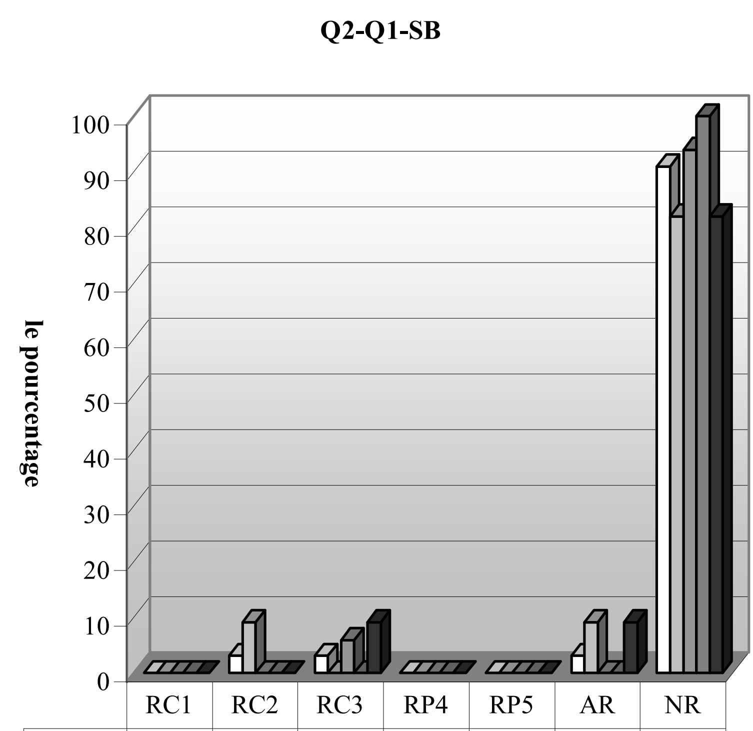
	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	AR	NR
SA	5	11	0	0	0	11	73
BON	7	20	0	0	0	20	53
MOY	6	6	0	0	0	0	89
MAU	0	0	0	0	0	33	67
DER	5	16	0	0	0	11	68

les réponses

RC1 : réponse correcte, RC2 : réponse correcte sans trouver la formule algébrique de la fonction, RC3 : réponse correcte sans calculer l'image demandée, RP4: erreurs de calcul, RP5 : l'élève multiple 1/2avec son inverse. Et il le fait deux fois. Ensuite il additionne les deux produits, AR :autres réponses, NR : non-réponses

Dans la classe de seconde A, 16,4% des élèves donnent la bonne réponse. Seuls 5,4%d'entre eux peuvent algébriquement écrire la fonction. Donc si on ne demandait que la fonction sous la forme

algébrique, le taux de réussite serait juste de 5,4%. Comme déjà prévu la question n'est pas traitée par la grande majorité des élèves (73%). Le taux d'autres réponses est de 11%.
Les résultats par niveau des élèves ne sont pas très homogènes. Le taux de réussite monte à presque 27% chez les bons. La question n'est correctement traitée que par 11,2% des moyens. Par ailleurs, une légère différence entre les bons élèves et moyens s'observe par la procédure 1(6,7% contre 5,6%). Mais en ce qui concerne la deuxième procédure 20% des bons élèves l'utilisent alors qu'elle n'est privilégiée que par 5,6% des moyens. Chez les mauvais il n'y aucune bonne réponse. Les moyens se distinguent des autres par le pourcentage plus élevé de non-réponse. (89% contre 53% chez les bons et 67% les mauvais). Une bonne partie des mauvais élèves répondent autrement la question. Ce taux atteint 20% chez les bons et un taux nul chez les moyens.



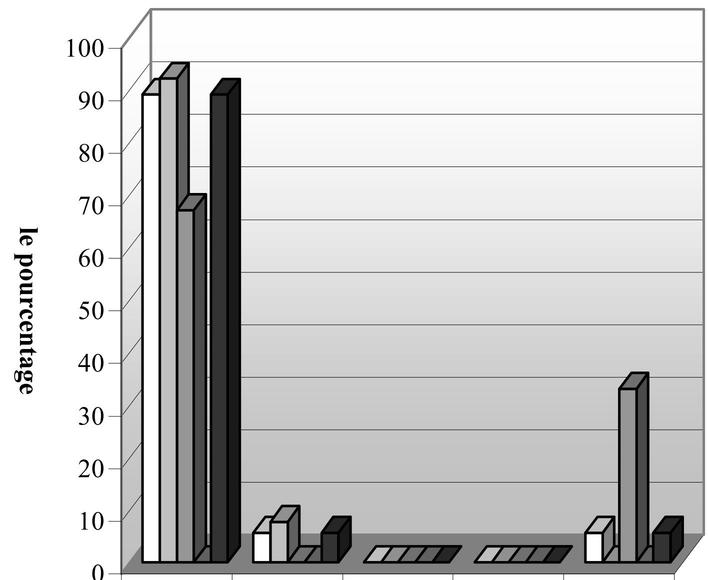
	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	AR	NR
SA	0	3	3	0	0	3	91
BON	0	9	0	0	0	9	82
MOY	0	0	6	0	0	0	94
MAU	0	0	0	0	0	0	100
DER	0	0	9	0	0	9	82

RC1 : réponse correcte, RC2 : réponse correcte sans trouver la formule algébrique de la fonction, RC3 : réponse correcte sans calculer l'image demandée, RP4: erreurs de calcul, RP5 : l'élève multiple 1/2 avec son inverse. Et il le fait deux fois. Ensuite il additionne les deux produits, AR : autres réponses, NR : non-réponses

Quant à la deuxième classe de seconde de ce lycée, le taux de réussite à cette question reste à 6,2%. La moitié d'entre eux n'écrivent algébriquement que la fonction sans trouver l'image de $\frac{1}{2}$ alors que l'autre moitié trouvent l'image du nombre donné sans écrire la fonction. On observe cependant que la quasi totalité des élèves ne donnent pas de réponse (91%).
Les résultats par niveau des élèves présentent une grande diversité. Ainsi seuls 9,1% des bons élèves fournissent une bonne réponse concernant l'image de $\frac{1}{2}$ sans l'écriture de la fonction. De plus les

autres réponses correctes ont totalement disparu chez les bons. Par contre parmi les moyens seulement 6% peuvent fournir une bonne réponse en n'écrivant que la fonction en forme algébrique.
En regardant le taux de réussite et celui de non-réponse on peut dire que la question est assez complexe et très peu familière aux élèves.

Q2-Q1-CT (Questionnaire 2-Question 1-Classe de Terminale)



	RC1	RC2	RC3	AR	NR
T	89	6	0	0	6
BON	92	8	0	0	0
MOY	67	0	0	0	33
MAU	0	0	0	0	0
DER	89	6	0	0	6

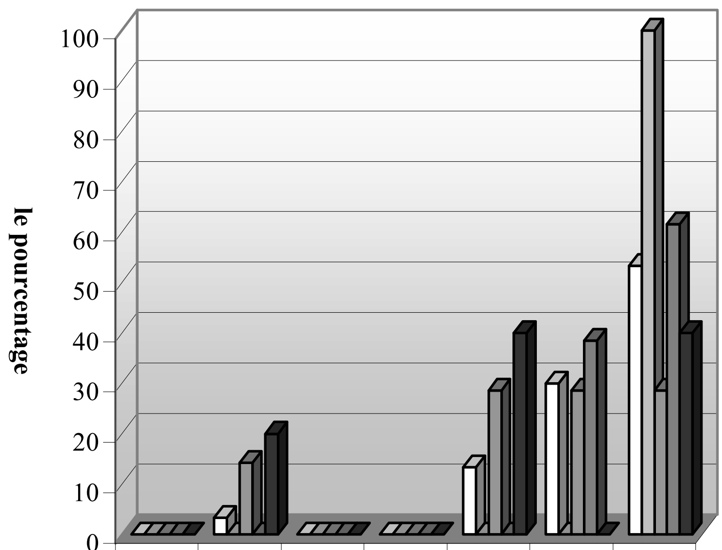
les réponses

RC1 : réponse correcte, RC2 : réponse correcte sans trouver la formule algébrique de la fonction, RC3 : réponse correcte sans calculer l'image demandée, RP4: erreurs de calcul, RP5 : l'élève multiple 1/2avec son inverse. Et il le fait deux fois. Ensuite il additionne les deux produits, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, à part un seul élève qui ne donne pas de réponse tous les élèves fournissent une bonne réponse. La quasi-totalité d'entre eux écrivent algébriquement la fonction ensuite trouvent l'image de $\frac{1}{2}$ tandis qu'un élève la trouve directement.

3.1.2 Lycée Super

Q2-Q1-SC



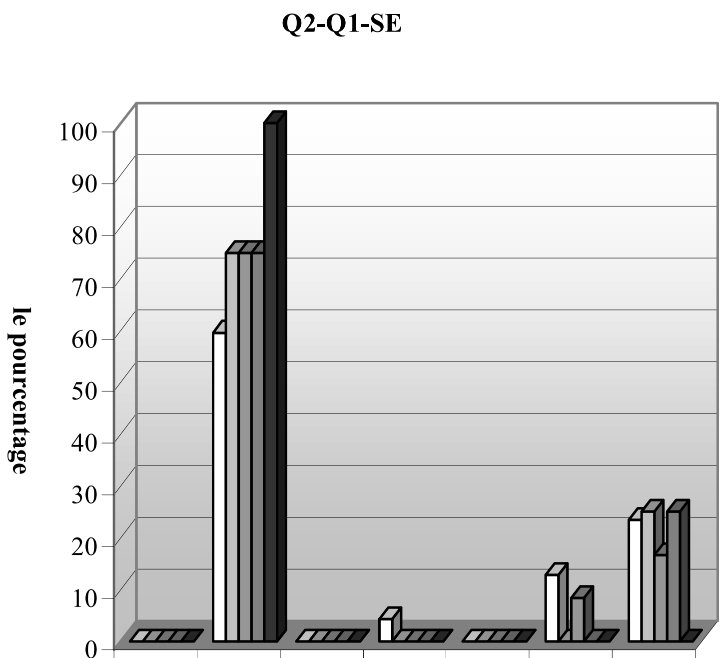
	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	AR	NR
SC	0	3	0	0	13	30	53
BON	0	0	0	0	0	0	100
MOY	0	14	0	0	29	29	29
MAU	0	0	0	0	0	38	62
DER	0	20	0	0	40	0	40

les réponses

RC1 : réponse correcte, RC2 : réponse correcte sans trouver la formule algébrique de la fonction, RC3 : réponse correcte sans calculer l'image demandée, RP4: erreurs de calcul, RP5 : l'élève multiple 1/2avec son inverse. Et il le fait deux fois. Ensuite il additionne les deux produits, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Dans cette classe, on observe un très faible pourcentage de réussite (3,3%).13% des élèves commettent l'erreur mentionnée par la réponse 5. Le pourcentage des élèves qui n'abordent pas la question est de 53%. Environ 30% des élèves donnent des réponses méritant de n'être comptées que dans la catégorie d'autres réponses. Il est intéressant de voir qu'aucun bon élève ne donne pas de réponse alors que seuls 14,3% des moyens peuvent fournir une bonne réponse en ne mettant pas en cause l'écriture algébrique de la fonction. Par ailleurs, le taux de réussite monte un peu chez les dérsaniens (20%). L'erreur de RP5 est commise par 29% des moyens. 40% des élèves fréquentant les dérsanés font cette erreur.

3.1.3 Lycée Normal

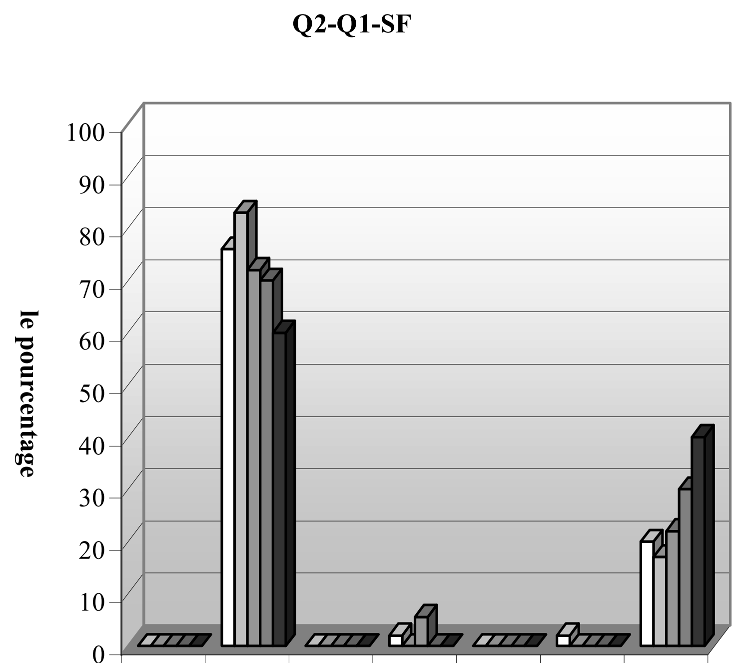


	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	AR	NR
SE	0	60	0	4	0	13	23
BON	0	75	0	0	0	0	25
MOY	0	75	0	0	0	8	17
MAU	0	75	0	0	0	0	25
DER	0	100	0	0	0	0	0

RC1 : réponse correcte, RC2 : réponse correcte sans trouver la formule algébrique de la fonction, RC3 : réponse correcte sans calculer l'image demandée, RP4: erreurs de calcul, RP5 : l'élève multiple 1/2avec son inverse. Et il le fait deux fois. Ensuite il additionne les deux produits, AR : autres réponses, NR : non-réponses

Le tableau ci-dessus montre bien que plus de la moitié de la classe fournissent une bonne réponse sans écrire la fonction en forme algébrique(60%). Il n'y a aucune réponse concernant l'écriture algébrique de la fonction, ce qui signifie que ces élèves ont de grosses difficultés à investir dans un nouveau domaine. Autrement dit, Même s'ils n'arrivent pas à représenter la fonction dans le cadre fonctionnel, les connaissances héritées du collège leur permettent de résoudre la question. 4,3% des élèves font des erreurs de calcul. Une bonne partie des élèves n'abordent pas la question(23,4%) alors que le pourcentage d'autres réponses est d'environ 13%.

En ce qui concerne les résultats par niveau des élèves, il est très remarquable qu'il s'agisse d'un même taux de réussite pour tous les niveaux (75%). De plus les résultats des bons élèves et mauvais élèves sont tout à fait identiques(25% de non-réponse chez les deux). C'est peut-être du au fait que la question puisse être résolue par les connaissances du collège donc le niveau actuel n'est pas, ici, très important.



	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	AR	NR
SF	0	76	0	2	0	2	20
BON	0	83	0	0	0	0	17
MOY	0	72	0	6	0	0	22
MAU	0	70	0	0	0	0	30
DER	0	60	0	0	0	0	40

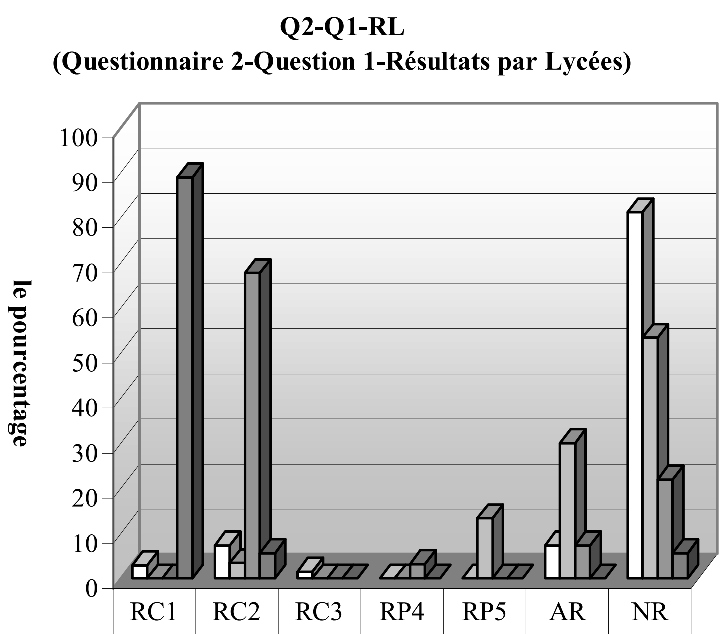
les réponses

RC1 : réponse correcte, RC2 : réponse correcte sans trouver la formule algébrique de la fonction, RC3 : réponse correcte sans calculer l'image demandée, RP4: erreurs de calcul, RP5 : l'élève multiple 1/2avec son inverse. Et il le fait deux fois. Ensuite il additionne les deux produits, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Quant à la classe F, les trois quarts des élèves fournissent une bonne réponse sans l'écriture de la fonction. La question n'est pas abordée par 20% des élèves alors qu'un faible pourcentage des élèves commettent des erreurs de calcul dans la démarche de la réponse RP2.

Comme dans la classe précédente une grande stabilité entre les bons, moyens et mauvais élèves s'observe par les taux des réponses. Ainsi 83% des bons peuvent donner la bonne réponse contre 72% des moyens et 70% des mauvais. Les moyens se distinguent des autres par un faible pourcentage des erreurs de calcul(5,6% contre un pourcentage nul pour les autres).

3.1.4 Résultats des élèves par lycée

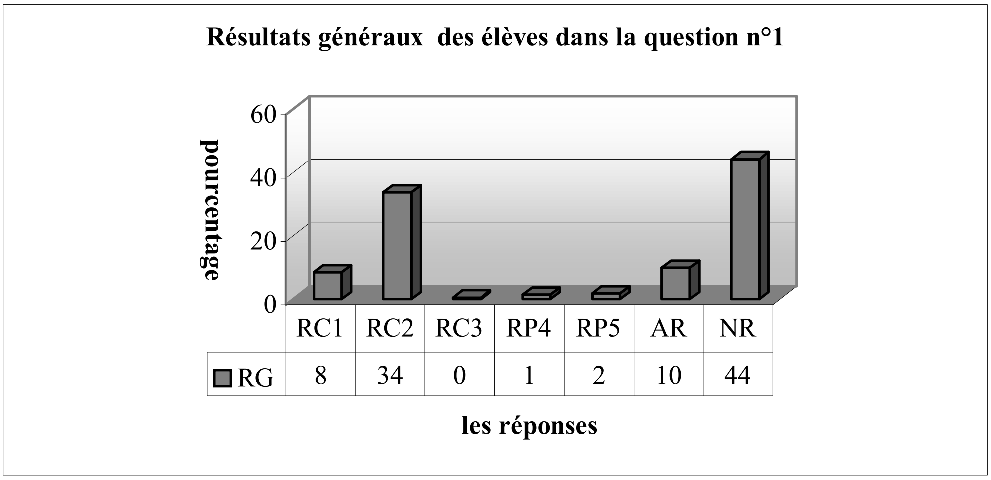


	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	AR	NR
LA	3	7	1	0	0	7	81
LS	0	3	0	0	13	30	53
LN	0	68	0	3	0	7	22
T	89	6	0	0	0	0	6

RC1 : réponse correcte, RC2 : réponse correcte sans trouver la formule algébrique de la fonction, RC3 : réponse correcte sans calculer l'image demandée, RP4: erreurs de calcul, RP5 : l'élève multiple 1/2 avec son inverse. Et il le fait deux fois. Ensuite il additionne les deux produits, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Selon le tableau ci-dessus le lycée Normal se distingue de deux autres par le taux de réussite et celui de non-réponse (un taux de réussite de 68% contre 11% dans le lycée Anatolien et 3% le lycée Super). Il y a seulement 3% des élèves du lycée Anatolien donnent la bonne réponse en écrivant aussi algébriquement la fonction. 7% des élèves du lycée Anatolien et 3% des élèves du lycée Super répondent correctement à la question sans écriture algébrique de la fonction. Ce taux monte jusqu'à 68% dans le lycée Normal. Mais il n'y a cependant aucun élève de ce lycée qui arrive à écrire algébriquement la fonction.
La grande majorité des élèves du lycée Anatolien et plus de la moitié des élèves du lycée Super n'abordent pas la question. En ce qui concerne le lycée Normal, il y a 22% des élèves qui ne traitent pas la question.
Par ailleurs, il semble que les élèves du lycée Super sont plus perplexes face à la question, 30% des élèves de ce lycée répondent ainsi autrement à la question contre 7% des élèves du lycée Anatolien et du lycée Normal. Les erreurs de la réponse RP5 sont uniquement réservées aux élèves du lycée Super avec un taux de 13%. Tandis que les erreurs de calcul n'apparaissent que chez 3% des élèves du lycée Normal.

3.1.5 Résultats généreux des élèves



RC1 : réponse correcte, RC2 : réponse correcte sans trouver la formule algébrique de la fonction, RC3 : réponse correcte sans calculer l'image demandée, RP4: erreurs de calcul, RP5 : l'élève multiple 1/2avec son inverse. Et il le fait deux fois. Ensuite il additionne les deux produits, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Ce tableau montre que près de la moitié des élèves traite correctement la question, 34% d'entre eux trouvent l'image demandée sans écrire algébriquement la fonction tandis que le taux des élèves qui trouvent correctement à la fois l'écriture algébrique de la fonction et l'image demandée est de seulement 8%.
Par ailleurs, la question n'est pas abordée par 44% des élèves et 10% des élèves deviennent perplexes face à la question et donnent d'autres réponses. En ce qui concerne les erreurs, elles sont très peu fréquentes. Ainsi 2% des élèves commettent les erreurs de la réponse RP5 et 1% des erreurs de calcul.

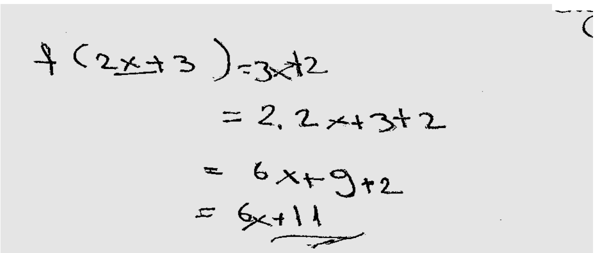
3.1.6 Conclusion

Le fait qu'un très petit nombre des élèves puisse écrire algébriquement la fonction montre que la grande majorité des élèves n'ont pas d'habitude de passer d'une écriture à l'autre et d'un cadre à l'autre. Si l'on compare le taux de réussite et de non-réponses à cette question avec ceux de la question n°2, on constate qu'il y a une grande chute de réussite (80%-42%) et une grande augmentation de non-réponses (2%-44%), cela confirme aussi cette hypothèse.
Le fait qu'il n'y ait aucun élève qui ait écrit algébriquement la fonction peut être interprété comme traduisant le fait que les élèves du lycée Normal ont du mal à investir un nouveau domaine mal maîtrisé.
Quant à la chute du taux de réussite et à la hausse de celui de non-réponse dans le lycée Anatolien et super en faveur du lycée Normal, il faut rappeler que les lycées anatolien recrutent les élèves sur un concours donc la quasi-totalité des élèves anatolien ont déjà subi l'enseignement de dérsané au collège. C'est la raison pour la quelle les élèves de ces lycées n'ont pas, surtout ceux du lycée Anatolien, beaucoup l'habitude de ce type de questions qui les invitent à imaginer, à regarder ou à dire autrement. En d'autres termes, le fait que l'enseignement de dérsané ait pour but de faire acquérir aux élèves une pratique en les conduisant à résoudre beaucoup de questions d'entraînement de même type dans un automatisme provoque, même si les connaissances en jeu étaient déjà disponibles, une déstabilisation face aux questions non habituelles chez ces élèves. C'est l'une des conséquences de l'enseignement portant sur la mentalité utilitaire.

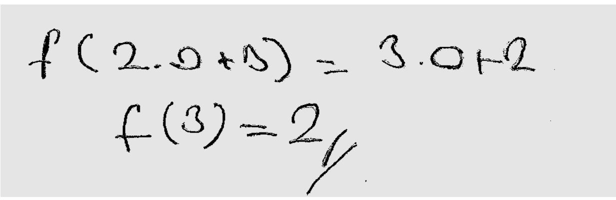
3.2 Question n°2

A nouveau nous sommes face à une question concernant certaines illusions pour les élèves. Je me demandais ce que les spécialistes du concours cherchent en posant la question dans cette forme au lieu de la suivante : « *soit fog(x)= 3x+2 et g(x)=2x+3 donc trouver la fonction f* ». Il n'est pas très difficile de deviner des raisons : d'abord la question n'est pas dans une forme habituelle aux élèves, cela peut dans un premier temps perturber une bonne partie des élèves ; ensuite les élèves doivent aussi éviter de mettre l'expression *2x+3* dans la fonction déjà composée « fog » en supposant qu'il s'agit d'une composée accomplie.
Maintenant je passe à la présentation des réponses catégorisées :

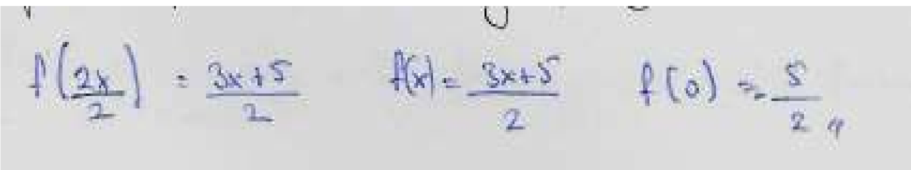
RC1 : réponse correcte.
L'élève trouve la bonne réponse en utilisant la procédure P1.
RC2 : réponse correcte.
L'élève fournit une bonne réponde à partir de la procédure P2.
RP3 :erreur de la mission inaccomplie.
L'élève met l'expression 2x+3 dans la fonction « fog » en prêtant qu'il s'agit d'une mission inaccomplie. Ensuite il obtient la fonction composée de g par fog.
f(x)=3(2x+3)+2, 6x+9+2, f(x) 6x+1, f(0)=6.0+11, f(0)=11……(SA16),(SA3)



(SC23)
RP4: l'élève met zéro à chaque côté. Ensuite il obtient l'image de 3 :



(SA27)
f(2x+3)=3x+2, f(0)=3.0+2, f(0)=2….(SC40)
f(0)=3.0+2, =0+2, =2………(SC27)
RP5: l'élève n' essai de résoudre la question que dans le cadre algébrique:
[2x+3]=3x+2, 2x+3=3x+2, -x=-1, x=1…….(SE38), (SE47), (SE13)



***(SB4)**,(SB9),(SB16)*
f(2x+3)=3x+2, f(0)=2x+3=3x+2, f(0)=2.0+3=3.0+2, f(0)=3=3, f(0)=3….(SE42)
RP6 : réponses incomplètes.
L'élève n'arrive pas à terminer la résolution de la question dans une démarche correcte.
f(2x+3)= 3x+2, 2x+3=0, 2x=-3, $x=\frac{-3}{2}$ *…….(SF21), (SF27)*
$f(x)=3(\frac{x-3}{2})+2 \Rightarrow \frac{3x-9+4}{2}=\frac{3x-5}{2}$ *…….(SB32),(SC17)*
f(2x+3)=3x+2, 2x+3=0, 2x=3, x=3……….(SF14)
RP7: erreurs de calcul.

$f(x)=(\frac{x-3}{2})$, $f(2\frac{x-\cancel{3}}{3}+\cancel{3})=3.\frac{x-3}{2}+2$, $f(x)=\frac{3x-2}{2}$, $f(0)=\frac{3.0-2}{2}$, $f(0)=-1$……..(SB21),(SB17)

$2x+3=0$, $2x=-3$, $x=\frac{-3}{2}$, $f(0)=\cancel{2}.\frac{-3}{\cancel{2}}+2$, $f(0)=-3+2$, $f(0)=-1$………(SA25)

$f(\frac{x-3}{2})=3x+2$, $f(x)=3.(\frac{x-3}{\cancel{2}})+\cancel{2}$, $f(x)=3x-6$, $f(0)=3.0+6$, $f(0)=6$………(SA1)

$f(x)=\frac{x-3}{2}+2$, $f(x)=\frac{3.9+4}{2}=\frac{x-5}{2}$, $f(0)=\frac{3-0.5}{2}=\frac{5}{2}$……..(SA21)

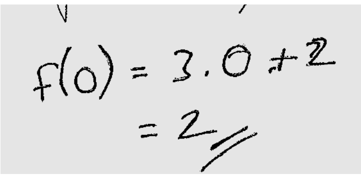
$f(x)=3.(\frac{x-3}{2})+2$, $f(x)=\frac{3x-7}{2}$, pour $x=0$, $f(0)=\frac{3.0-7}{2}=\frac{-7}{2}$………..(SA4),(SA40)

$f(x)=3(\frac{x-3}{2})+2$, $f(x)=\frac{3.x-9+4}{2}=\frac{3x-5}{2}$, $f(0)=\frac{3.0-5}{2}=\frac{-2}{2}$………(SB15)

RP8: l'élève trouve d'abord la fonction f. Ensuite il met zéro dans la fonction f(2x+3)=3x+2 à chaque côté.

$f(x)=3(\frac{x-3}{2})+2$, $f(x)=\frac{3.x-9+4}{2}$, $f(x)=\frac{3x-5}{2}$, $f(0)=3.0+2$, $=2$………(SA12),(SA31)

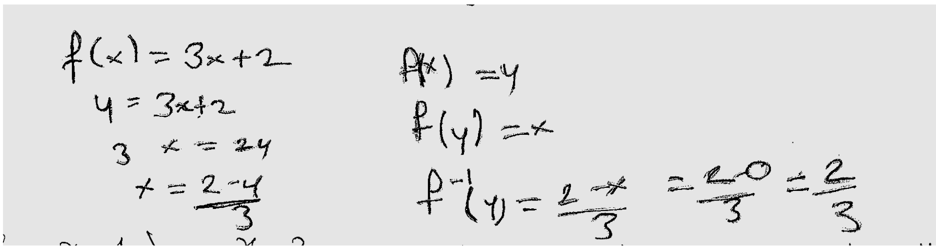
RP9 : l'élève obtient simplement la fonction f en supprimant l'expression 2x+3. Ensuite il trouve donc l'image de 0 sur la composée des fonctions f et g.



*(SC14), **(SC13)***

$f(2x+3)=3x+2$, $f(0)=3.0+2$, $f(0)=2$……(SC40), (SC27)

RP10: l'élève supprime l'expression 2x+3 pour obtenir la fonction f comme dans la réponse précédente. Mais ensuite il trouve l'inverse de cette fonction qu'il a trouvée.



(SE28)

$f(x)=3x+2$, y…., $3x=2y$, $x=\frac{2-y}{3}$, $f(x)=y$, $f(y)=x$, $f^{-1}(y)=\frac{2x-x}{3}$, $\frac{2-0}{0}=\frac{-2}{3}$…….(SE39)

Autres réponses :

$f(2x+3)=3x+2$, $2.0+3=3$……….(SB7)

$f(\frac{x-3}{2})=3(\frac{x-3}{2})+2=\frac{3x-9+\cancel{4}}{\cancel{2}}=3x-7$, $f(\frac{\frac{6}{2}-\frac{6}{2}}{2})=3.\frac{6}{2}-7$, $f(0)=\frac{18}{2}-\frac{7}{1}=\frac{4}{2}=2$…..(SB6)

$f^{-1}(2x+3)=3x+2$, $\frac{-2}{3x}=\frac{-2}{3.0}=\frac{-2}{1}=-2$……….(SC18)

$f(2x+3)=3x+2=5x$, $f(0)=3x$, $f(x)=3x+2=5x$, $f(0)=5x$……..(SC21)

$f(2x+3)$ $3x+2$, $f(2x.3x)=3+2$, $f\frac{6x}{6}=\frac{-6}{6}$, $x=1$………(SE44)

$f(2x+3)=3x+2$, $3x+2=0$, $2x=-3$, $x=\frac{-3}{2}$………..(SF22),(SF17)

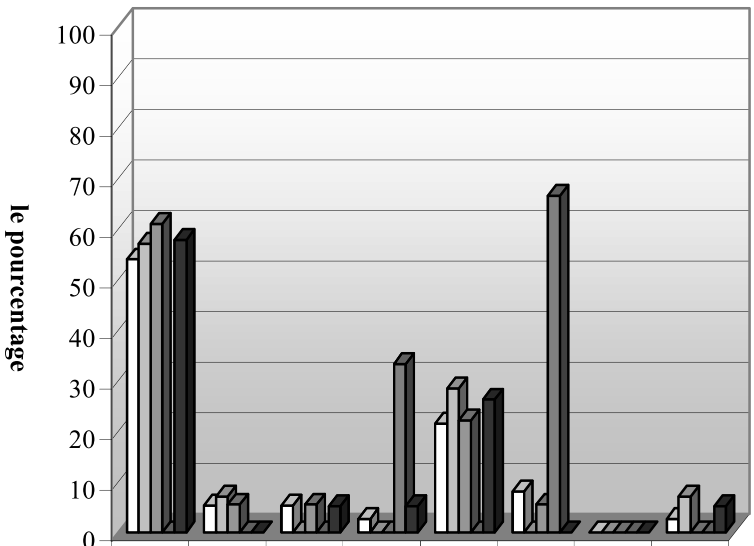
Non-réponses:

Voici l'analyse des tableaux qui résument les résultats des élèves dans cette question;

3.2.1 Lycée Anatolien

Comme la question n'est pas très loin d'être routinière aux élèves de ce lycée, j'attendais que la plupart des élèves puissent fournir une bonne réponse. De plus, en raison de l'importance de l'enseignement de dérsané dans ce lycée, je me demandais aussi si le pourcentage des élèves qui privilégient la procédure P2 serait plus élevé.

Q2-Q2-SA



	RC1	RC2	RP3	RP4	RP7	RP9	AR	NR
SA	54	5	5	3	22	8	0	3
BON	57	7	0	0	29	0	0	7
MOY	61	6	6	0	22	6	0	0
MAU	0	0	0	33	0	67	0	0
DER	58	0	5	5	26	0	0	5

les réponses

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte, RP3 : erreur de la mission inaccomplie, RP4: l'élève met zéro à chaque côté. Ensuite il obtient l'image de 3, RP5: l'élève n'essai de résoudre la question que dans le cadre algébrique, RP6 : réponses incomplètes, RP7: erreurs de calcul, RP8: l'élève trouve d'abord la fonction f. Ensuite il met zéro dans la fonction f(2x+3)=3x+2 à chaque côté, RP9 : l'élève obtient simplement la fonction f en supprimant l'expression 2x+3. Ensuite il trouve donc l'image de 0 sur la composée des fonctions f et g, RP10: l'élève supprime l'expression 2x+3 pour obtenir la fonction f comme dans la réponse précédente. Mais ensuite il trouve l'inverse de cette fonction qu'il a trouvée, AR : autres réponses, NR : non-réponses

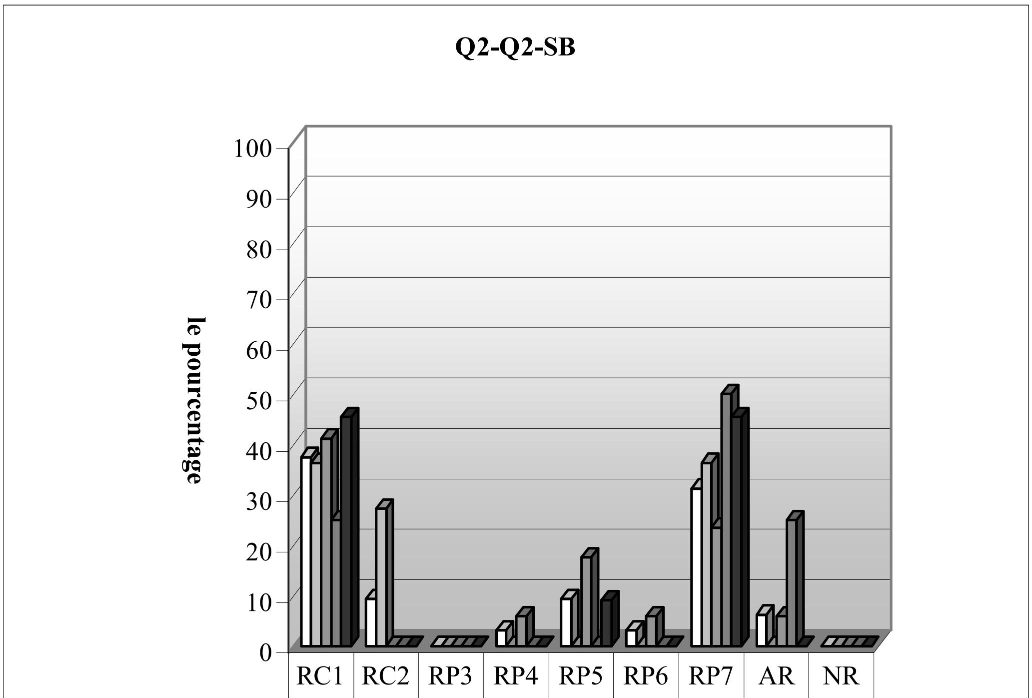
Le tableau ci-dessus montre que plus de la moitié des élèves (environ 60%) fournissent une bonne réponse. Seuls 5,4% d'entre eux privilégient la procédure P2 pour résoudre la question. De plus il n'y a aucune bonne réponse en utilisant la procédure P2 chez les dérsaniens. Ce qui confirme que l'enjeu de dérsané n'a pas pu être réalisé chez ces élèves.

Les erreurs les plus fréquentes sont les erreurs de calcul dans une démarche correcte (22%). Pour 5,4% des élèves il s'agit ici d'une mission inaccomplie. Ils mettent l'expression 2x+3 dans la fonction déjà composée. Par ailleurs, 8,1% trouvent d'abord la fonction f. Ensuite ils ne s'arrêtent pas là. Ils mettent zéro à chaque côté de f(2x+ 3)=3x+2. Un faible pourcentage des élèves mettent zéro dans chaque côté de f(2x+ 3)=3x+2 (environ 3%).

En prenant en compte le taux de réussite et le très faible pourcentage de non-réponse et autres réponses, on peut dire que la question est assez familière aux élèves.

En ce qui concerne les résultats par niveau, on observe une légère différence entre les bons et moyens par le taux de réussite (60% chez les bons contre 67% les moyens). C'est aussi valable pour la

préférence de la procédure P2 (7% contre 6%). Il n'y a aucune réponse correcte chez les mauvais. L'erreur de mission inaccomplie est totalement absente chez les bons et mauvais. Alors qu'elle est commise par 6% des moyens. Les erreurs de calcul ne sont présentes que chez les bons et moyens avec un taux proche (respectivement 29% contre 22%).
La grande majorité des mauvais élèves obtient, soit 67%, la fonction f en supprimant simplement l'expression 2x+3. Cette erreur s'observe avec un taux de 6% chez les moyens et disparue les bons. L'erreur qui consiste à mettre zéro à chaque côté de f(2x+ 3)=3x+2 n'est réservée qu'aux mauvais. 33% d'entre eux commettent cette erreur.



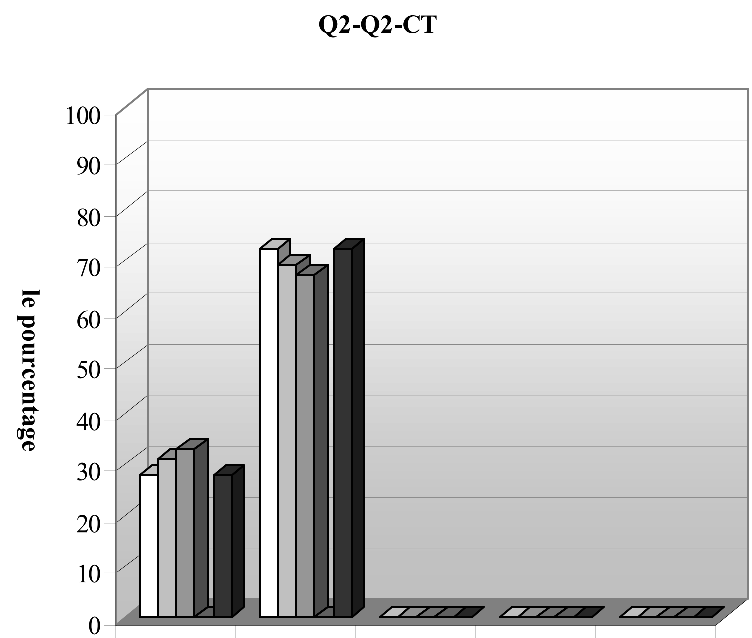
	RC1	RC2	RP3	RP4	RP5	RP6	RP7	AR	NR
SB	38	9	0	3	9	3	31	6	0
BON	36	27	0	0	0	0	36	0	0
MOY	41	0	0	6	18	6	24	6	0
MAU	25	0	0	0	0	0	50	25	0
DER	45	0	0	0	9	0	45	0	0

les réponses

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte, RP3 : erreur de la mission inaccomplie, RP4: l'élève met zéro à chaque côté. Ensuite il obtient l'image de 3, RP5: l'élève n'essai de résoudre la question que dans le cadre algébrique, RP6 : réponses incomplètes, RP7: erreurs de calcul, RP8: l'élève trouve d'abord la fonction f. Ensuite il met zéro dans la fonction f(2x+3)=3x+2 à chaque côté, RP9 : l'élève obtient simplement la fonction f en supprimant l'expression 2x+3. Ensuite il trouve donc l'image de 0 sur la composée des fonctions f et g, RP10: l'élève supprime l'expression 2x+3 pour obtenir la fonction f comme dans la réponse précédente. Mais ensuite il trouve l'inverse de cette fonction qu'il a trouvée, AR : autres réponses, NR : non-réponses

Selon le tableau ci –dessus, en classe de seconde B, le taux de réussite descend à 47% par rapport à la classe précédente par contre le nombre des élèves qui privilégient la procédure P2 est plus élevé (9,4% contre 5,4%). Une bonne partie des élèves commettent des erreurs de calcul dans une démarche correcte (31%) cela signifie que les erreurs venant de l'enseignement précédent (du collège) posent encore des problèmes dans l'enseignement actuel de ces élèves.
9,4% des élèves ont de grosses difficultés à utiliser les deux cadres (cadre algébrique et cadre fonctionnel) ensemble. Par ailleurs le taux d'erreur consistant à mettre zéro dans chaque côté de f(2x+3)=3x+2 et celui des réponses incomplètes sont identiques (3,1%).
Si on regarde les résultats par niveau, on observe que le taux de réussite change suivant le niveau ainsi 64% des bons fournissent une bonne réponse contre 41% des moyens et 25% des mauvais. Par

ailleurs, il y a seulement 27% des bons élèves qui résolvent la question à partir de la procédure P2. Il est très intéressant d'observer qu'il n'y a aucun élève de dérsané qui trouve la bonne réponse en utilisant la procédure P2. Cela me permet de dire que les bons élèves peuvent plus facilement s'adapter à l'enseignement de dérsané que d'autres. Les erreurs de calcul sont présentes chez tous les élèves et elles sont respectivement commises par la moitié des mauvais, 36% des bons et 24% des moyens. En ce qui concerne les autres erreurs, elles apparaissent seulement chez les moyens. Cela me conduit à faire l'hypothèse que les moyens font ces erreurs parce qu'ils ne sont pas sûr tant des bons et ils connaissent davantage le sujet que les mauvais.



	RC1	RC2	RP3	AR	NR
T	28	72	0	0	0
BON	31	69	0	0	0
MOY	33	67	0	0	0
MAU	0	0	0	0	0
DER	28	72	0	0	0

les réponses

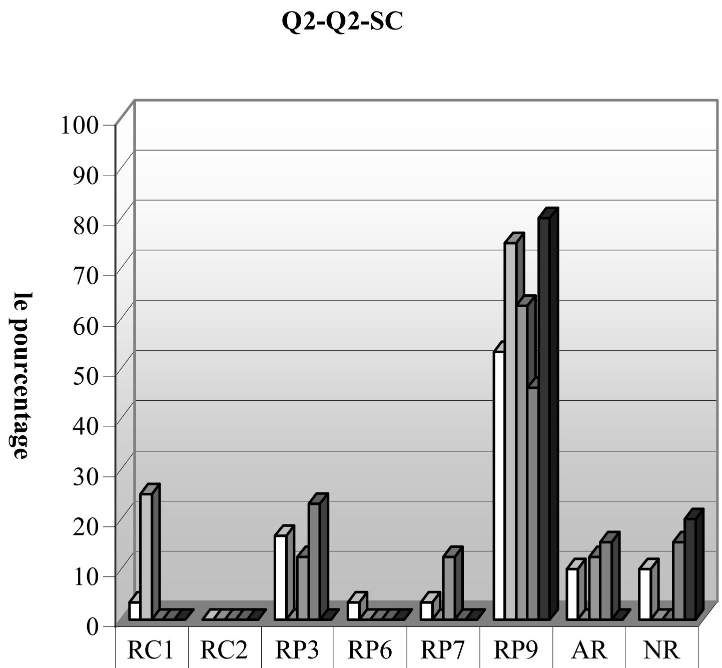
RC1 (Procédure 1) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte, RP3 : erreur de la mission inaccomplie, RP4: l'élève met zéro à chaque côté. Ensuite il obtient l'image de 3, RP5: l'élève n'essai de résoudre la question que dans le cadre algébrique, RP6 : réponses incomplètes, RP7: erreurs de calcul, RP8: l'élève trouve d'abord la fonction f. Ensuite il met zéro dans la fonction f(2x+3)=3x+2 à chaque côté, RP9 : l'élève obtient simplement la fonction f en supprimant l'expression 2x+3. Ensuite il trouve donc l'image de 0 sur la composée des fonctions f et g, RP10: l'élève supprime l'expression 2x+3 pour obtenir la fonction f comme dans la réponse précédente. Mais ensuite il trouve l'inverse de cette fonction qu'il a trouvée, AR : autres réponses, NR : non-réponses

Quant à la classe de terminale tous les élèves fournissent une bonne réponse, il est évident que la question est très familière aux élèves et simple. Les deux procédures sont utilisées : la grande majorité des élèves privilégient la deuxième ayant priorité dans l'enseignement de dérsané (72% contre 28%) cela confirme mes attentes. On peut donc dire que ces élèves sont bien adaptés à l'enseignement de dérsané.

Les résultats par niveau présentent une grande stabilité. Comme en classe il n'y a aucun élève qui déclare qu'il est mauvais, on n'a donc que les deux niveaux. Une très légère différence entre les bons et moyens s'observe par l'utilisation des procédures. Ainsi chez les bons 31% privilégient la première procédure contre 69%, alors qu'elle est utilisée par 33% des moyens contre 67%.

Par ailleurs, le fait qu'en cette classe on ne constate pas les erreurs qui sont présentes dans les deux classes de seconde du même lycée, par exemple des erreurs de calcul, me conduit à poser les questions suivantes « comment ont-ils corrigé ces erreurs ? Est-il suffisant de dire dans les classes suivantes ? ».

3.2.2 Lycée Super



	RC1	RC2	RP3	RP6	RP7	RP9	AR	NR
SC	3	0	17	3	3	53	10	10
BON	25	0	0	0	0	75	0	0
MOY	0	0	13	0	13	63	13	0
MAU	0	0	23	0	0	46	15	15
DER	0	0	0	0	0	80	0	20

les réponses

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte, RP3 : erreur de la mission inaccomplie, RP4: l'élève met zéro à chaque côté. Ensuite il obtient l'image de 3, RP5: l'élève n'essai de résoudre la question que dans le cadre algébrique, RP6 : réponses incomplètes, RP7: erreurs de calcul, RP8: l'élève trouve d'abord la fonction f. Ensuite il met zéro dans la fonction f(2x+3)=3x+2 à chaque côté, RP9 : l'élève obtient simplement la fonction f en supprimant l'expression 2x+3. Ensuite il trouve donc l'image de 0 sur la composée des fonctions f et g, RP10: l'élève supprime l'expression 2x+3 pour obtenir la fonction f comme dans la réponse précédente. Mais ensuite il trouve l'inverse de cette fonction qu'il a trouvée, AR : autres réponses, NR : non-réponses

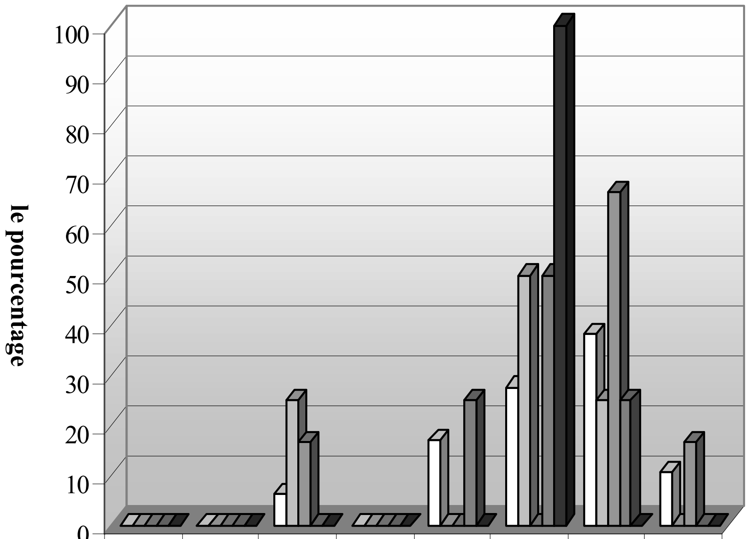
Remarquons qu'en classe C le taux de réussite à cette question descend sensiblement jusqu'à 3,3%, il n'y a aucun élève qui fournit une bonne réponse en utilisant la procédure P2. La plus moitié des élèves suppriment simplement l'expression 2x+3 ou le transforment en x ensuite ils trouvent l'image de 0 sur cette fonction obtenue. Je pense que ces élèves n'arrivent pas à accepter, dans la forme f(x), qu'une expression à deux ou trois membres peut être à la place de x. Par ailleurs, l'erreur consistant à supposer que la composée n'est pas déjà effectuée est commise par 17% des élèves. Le pourcentage des élèves qui donnent des réponses incomplètes et ceux qui commettent des erreurs de calcul sont d'environ 3%. La question n'est pas abordée par 10% des élèves. Ce taux est valable pour les autres réponses.

Les bonnes réponses ne viennent que de la part des bons élèves : un quart d'entre eux fournissent une bonne réponse à partir de la procédure P1, le pourcentage d'erreur consistant à enlever simplement l'expression 2x+3 est aussi plus élevée chez eux (75% contre 63% les moyens et 46% les mauvais).

En revanche, il n'y a aucun bon qui commet l'erreur de « mission inaccomplie » tandis qu'elle est commise par 13% des moyens et 23% des mauvais.

3.2.3 Lycée Normal

Q2-Q2-SE



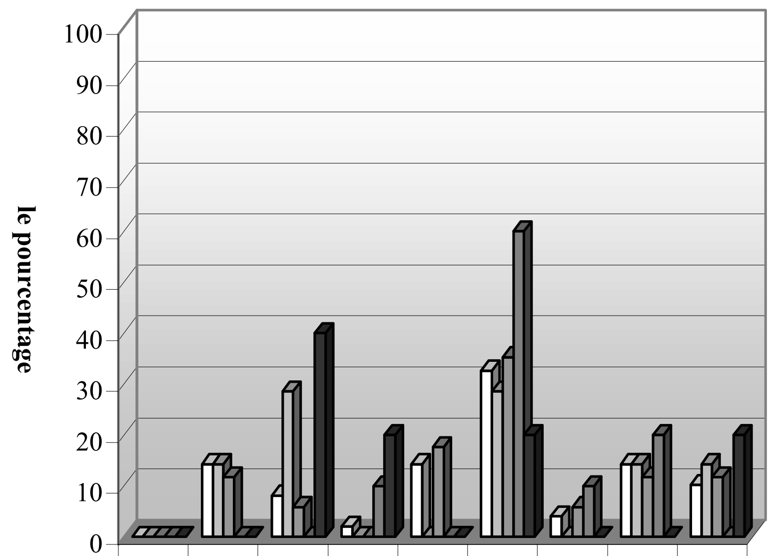
	RC1	RC2	RP3	RP4	RP5	RP10	AR	NR
SE	0	0	6	0	17	28	38	11
BON	0	0	25	0	0	50	25	0
MOY	0	0	17	0	0	0	67	17
MAU	0	0	0	0	25	50	25	0
DER	0	0	0	0	0	100	0	0

les réponses

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte, RP3 : erreur de la mission inaccomplie, RP4: l'élève met zéro à chaque côté. Ensuite il obtient l'image de 3, RP5: l'élève n'essai de résoudre la question que dans le cadre algébrique, RP6 : réponses incomplètes, RP7: erreurs de calcul, RP8: l'élève trouve d'abord la fonction f. Ensuite il met zéro dans la fonction f(2x+3)=3x+2 à chaque côté, RP9 : l'élève obtient simplement la fonction f en supprimant l'expression 2x+3. Ensuite il trouve donc l'image de 0 sur la composée des fonctions f et g, RP10: l'élève supprime l'expression 2x+3 pour obtenir la fonction f comme dans la réponse précédente. Mais ensuite il trouve l'inverse de cette fonction qu'il a trouvée, AR : autres réponses, NR : non-réponses

En classe E, il n'y aucun élève qui donne la bonne réponse. 28% des élèves obtiennent la fonction f en enlevant simplement l'expression 2x+3. Ensuite ils trouvent son inverse et l'image de 0. Une bonne partie des élèves ne peuvent pas passer du cadre algébrique au cadre fonctionnel (17%). Alors que 6,4% des élèves ne peuvent pas la composition des fonctions déjà effectuée. Donc ils commettent l'erreur dite « la mission inaccomplie ».
Le taux de non-réponses (11%) et celui d'autres réponses (38%) signifient que la question n'est pas a priori considérée si difficile par la plupart des élèves.
Quant aux résultats par niveau, un quart des bons élèves font l'erreur de mission inaccomplie. Alors qu'elle est commise par 17% des moyens et totalement absente chez les mauvais. Seuls 25% des mauvais ne peuvent pas passer du cadre algébrique au cadre fonctionnel. L'erreur de la réponse 10 est faite par la moitié des bons et mauvais, tandis qu'elle n'apparaît pas chez les moyens.

Q2-Q2-SF



	RC1	RC2	RP3	RP4	RP6	RP7	RP10	AR	NR
SF	0	14	8	2	14	33	4	14	10
BON	0	14	29	0	0	29	0	14	14
MOY	0	12	6	0	18	35	6	12	12
MAU	0	0	0	10	0	60	10	20	0
DER	0	0	40	20	0	20	0	0	20

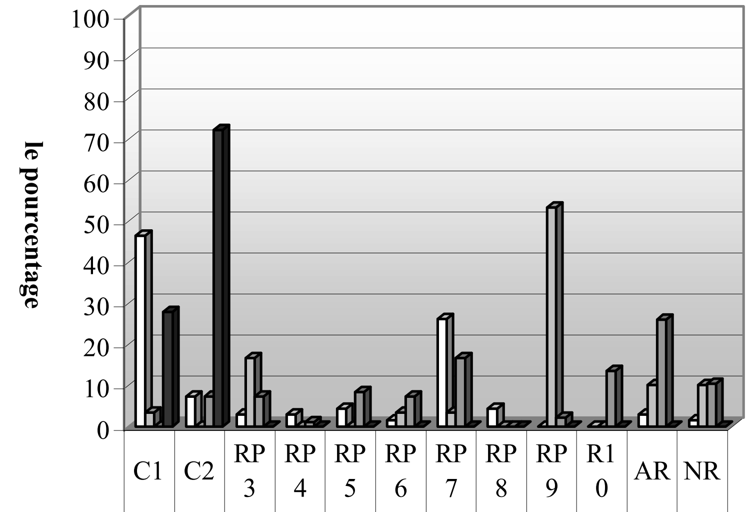
les réponses

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte, RP3 : erreur de la mission inaccomplie, RP4: l'élève met zéro à chaque côté. Ensuite il obtient l'image de 3, RP5: l'élève n'essai de résoudre la question que dans le cadre algébrique, RP6 : réponses incomplètes, RP7: erreurs de calcul, RP8: l'élève trouve d'abord la fonction f. Ensuite il met zéro dans la fonction f(2x+3)=3x+2 à chaque côté, RP9 : l'élève obtient simplement la fonction f en supprimant l'expression 2x+3. Ensuite il trouve donc l'image de 0 sur la composée des fonctions f et g, RP10: l'élève supprime l'expression 2x+3 pour obtenir la fonction f comme dans la réponse précédente. Mais ensuite il trouve l'inverse de cette fonction qu'il a trouvée, AR : autres réponses, NR : non-réponses

Le tableau ci-dessus montre que 14% des élèves peuvent correctement résoudre la question en utilisant la procédure P2, les erreurs les plus fréquentes sont celles de calcul qui sont commises par 33% des élèves. Par ailleurs, pour 8,2% il s'agit d'une mission inaccomplie. La résolution de la question est incomplète chez 14% des élèves. L'erreur consistant à mettre zéro à chaque côté et celle qui consiste à enlever simplement 2x+3 pour obtenir la fonction f ne sont pas très fréquentes (respectivement 2%, 4%). 10% des élèves ne donnent pas de réponse tandis que le pourcentage d'autres réponses est de 14%.

Les résultats par niveau ne sont pas très homogènes ainsi 14% des bons fournissent une bonne réponse en privilégiant la procédure P2 contre 12% des moyens et un pourcentage nul chez les mauvais. L'erreur de « mission inaccomplie » est plus fréquente chez les bons (29% contre 6% les moyens et absente les mauvais). Il y a seulement 10% des mauvais qui commettent l'erreur qui consiste à mettre zéro à chaque côté, les réponses incomplètes ne s'observent que chez 18% des moyens. Le pourcentage des erreurs de calcul change relativement au niveau des élèves : plus de la moitié des mauvais font ces erreurs. Ce taux descend à 35% chez les moyens et 29% les bons. Comme je l'ai déjà dit, cela affirme que les erreurs venant du collège posent encore des problèmes dans l'enseignement actuel pour ces élèves. Je me demande ici comment le professeur actuel peut corriger ces erreurs héritées de l'enseignement précédent dans une classe ayant plus de cinquante élèves ?

3.2.4 Résultats des élèves par lycée

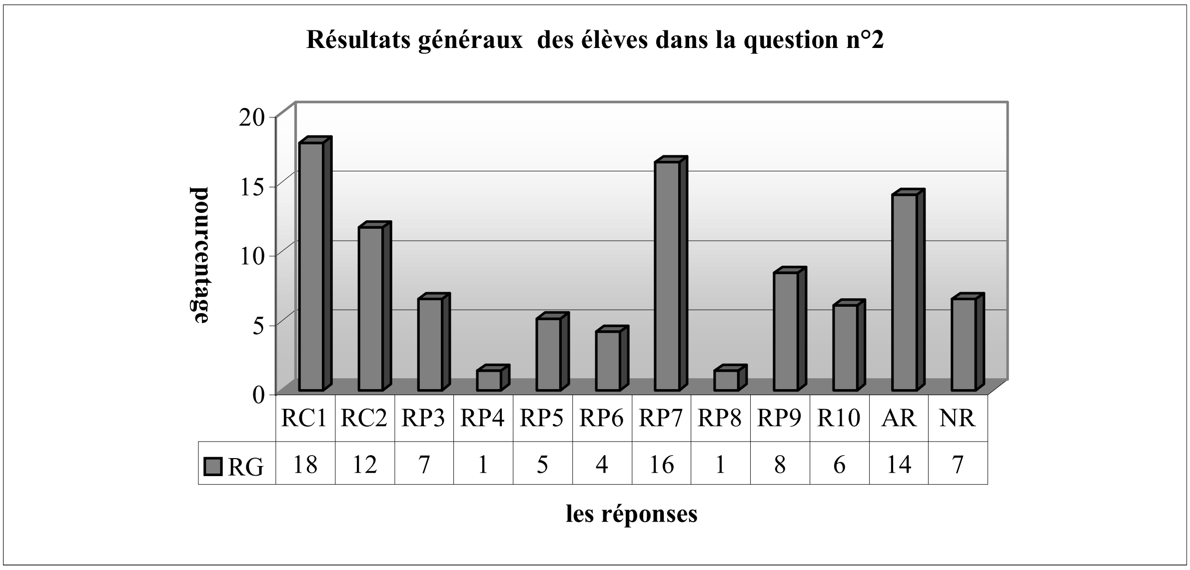


	C1	C2	RP 3	RP 4	RP 5	RP 6	RP 7	RP 8	RP 9	R1 0	AR	NR
LA	46	7	3	3	4	1	26	4	0	0	3	1
LS	3	0	17	0	0	3	3	0	53	0	10	10
LN	0	7	7	1	8	7	17	0	2	14	26	10
T	28	72	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte, RP3 : erreur de la mission inaccomplie, RP4: l'élève met zéro à chaque côté. Ensuite il obtient l'image de 3, RP5: l'élève n' essai de résoudre la question que dans le cadre algébrique, RP6 : réponses incomplètes, RP7: erreurs de calcul, RP8: l'élève trouve d'abord la fonction f. Ensuite il met zéro dans la fonction f(2x+3)=3x+2 à chaque côté, RP9 : l'élève obtient simplement la fonction f en supprimant l'expression 2x+3. Ensuite il trouve donc l'image de 0 sur la composée des fonctions f et g, RP10: l'élève supprime l'expression 2x+3 pour obtenir la fonction f comme dans la réponse précédente. Mais ensuite il trouve l'inverse de cette fonction qu'il a trouvée, AR : autres réponses, NR : non-réponses

Si on regarde les résultats généraux, on remarque que le lycée Anatolien se distingue sensiblement des autres par le taux de réussite plus élevé (54% contre 3% le lycée Super et 7% normal). Cette opposition que l'on constate aussi par les taux de non-réponses et d'autres réponses en faveur du lycée Anatolien. Donc cela peut être interprété dans le fait que la question est plus familière aux élèves de ce lycée. Par ailleurs, les erreurs célébrées dans les réponses RP3, RP6 et RP7 sont présentes dans tous les lycées ainsi l'erreur de « mission inaccomplie » est plus fréquente dans le lycée Super (17% contre 3% dans le lycée et 7% normal). Par contre le taux d'erreurs de calcul est plus élevé dans le lycée Anatolien (26% contre 3% dans le lycée Super et 17% normal). Comme il n'y a pas beaucoup d'élèves du lycée Super qui traitent la question dans une démarche correcte, il est normal que le taux d'erreurs de calcule soit moins élevé. Donc on peut dire que les erreurs à l'origine du collège ne permettent pas de trouver la bonne réponse à une grande partie des élèves de seconde. Le fait que ce type d'erreurs ne se présentent pas chez les élèves de terminale signifie qu'elles sont corrigées dans les classes suivantes. Les élèves qui n'arrivent pas à terminer la résolution de la question sont plus nombreux dans le lycée Normal (7% contre 1,4% dans le lycée Anatolien et 3% super). Plus de la moitié des élèves du lycée Super enlèvent simplement l'expression 2x+3 pour obtenir la fonction f alors que cette erreur est totalement absente dans le lycée Anatolien et un très faible pourcentage dans le lycée Normal (2%). 8,3% des élèves du lycée Normal ne peuvent pas utiliser les deux cadres ensemble. Ce taux descend à moitié dans le lycée Anatolien et nul le lycée Normal.
Quant à la classe de terminale, le fait que la procédure P2 est majoritairement utilisée par les élèves affirme que ces derniers sont bien adaptés à l'enseignement de dérsané.

3.2.5 Résultats généraux des élèves



RC1 (Procédure 1) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte, RP3 : erreur de la mission inaccomplie, RP4: l'élève met zéro à chaque côté. Ensuite il obtient l'image de 3, RP5: l'élève n'essai de résoudre la question que dans le cadre algébrique, RP6 : réponses incomplètes, RP7: erreurs de calcul, RP8: l'élève trouve d'abord la fonction f. Ensuite il met zéro dans la fonction f(2x+3)=3x+2 à chaque côté, RP9 : l'élève obtient simplement la fonction f en supprimant l'expression 2x+3. Ensuite il trouve donc l'image de 0 sur la composée des fonctions f et g, RP10: l'élève supprime l'expression 2x+3 pour obtenir la fonction f comme dans la réponse précédente. Mais ensuite il trouve l'inverse de cette fonction qu'il a trouvée, AR : autres réponses, NR : non-réponses

Ce tableau montre que 30% des élèves traitent correctement la question. La plupart des élèves qui répondent correctement à la question suivent la procédure 1 en utilisant la méthode $\mathbf{M}_{xfy}$ (18%), 7% n'abordent pas la question et 14% deviennent perplexes face à la question et donnent d'autres réponses. Les erreurs les plus fréquentes sont les erreurs de calcul avec un taux de 16% tandis que l'erreur de la « mission inaccomplie » est commise par 7% des élèves. L'erreur consistant à mettre zéro à la place de x dans chaque terme et celle qui consiste à trouver la fonction f et à mettre zéro à la place de x dans la composée (implicite) sont les erreurs les plus marginales. Ainsi il y a seulement 1% des élèves qui commettent ces erreurs. Par ailleurs, le taux des élèves qui obtiennent simplement la fonction f en supprimant l'expression *2x+3* et ensuite calculent l'image demandée par la composée (implicite) est de 8% et 6% des élèves ne commettent que la première partie de cette erreur.
5% des élèves ne peuvent pas utiliser deux cadres (cadre algébrique et cadre fonctionnel) ensemble et ils n'essaient de résoudre la question seulement dans le cadre algébrique, tandis que le taux des élèves qui n'arrivent pas à terminer la résolution de la question et donnent des réponses incomplètes est de 4%.

3.2.6 Conclusion

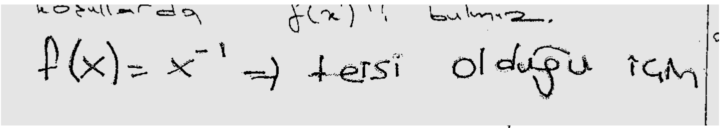
Le taux de réussite à cette question n'est pas satisfaisant mais il est plus élevé que celui à la question n°5 du premier questionnaire dans laquelle il s'agit de travailler sur une composée normale (30% contre 21%). De plus dans les deux questions, le taux de non-réponses et celui d'autres réponses ne sont pas très élevés. Cela signifie que les élèves sont plus habitués à ce type de décompositions (implicites). Les erreurs de calcul, lors du calcul de l'image demandée sont plus fréquentes. Si l'on considère comme justes les réponses des élèves qui commettent ces erreurs, le taux de réussite atteint à 46%. Cela confirme aussi notre hypothèse précédente. Comme nous l'avons prédit dans l'analyse a priori, l'erreur de « mission inaccomplie » est l'une des erreurs les plus fréquentes.
Le fait que dans le lycée Anatolien (79% de réussite avec des erreurs de calcul contre 6% dans le lycée Super et 24% dans le lycée Normal) et la classe de terminale (100%) le taux soient plus élevés confirme à nos attentes et montre très bien l'effet positif sur la réussite au concours d'un enseignement très proche du concours (ou du dérsané).

Par ailleurs, dans la classe de terminale le taux des élèves qui fournissent une réponse correcte en utilisant la recette $\mathbf{R_a}$ est plus élevé que dans les classes de seconde du lycée Anatolien (72% contre 7%). Cela peut être interprété comme un indice du fait que ces élèves sont plus adaptés à l'enseignement du dérsané et savent remplacer des procédures par d'autres plus courtes et qu'ils ont minimalisé le risque d'erreurs (comme des erreurs de calcul) en résolvant beaucoup de questions.

3.3 Question n°3

Cette question où l'on attend presque les mêmes réactions des élèves pour la question précédente montre très bien l'une des particularités des questions du concours. Il est très facile de rencontrer dans des annales du concours plusieurs questions de ce type dont la résolution semble d'abord aux élèves complexe ou longue. Mais elles permettent paradoxalement des résolutions plus pratiques. Alors je pensais que la procédure P3 serait réservée à un très peu nombre des bons élèves. De plus j'attendais aussi que le taux de réussite à cette question soit moins élevé qu'en question précédente à cause de l'apparition des fonctions rationnelles.
Voici les réponses catégorisées à partir des réponses des élèves :

RC1 (Procédure 4) : réponse correcte.
L'élève peut mentalement saisir la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$.

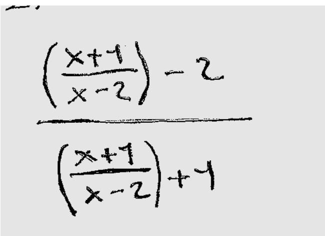

koşullarda f(x)'i bulunuz.
$f(x)=x^{-1} \Rightarrow$ tersi olduğu için

comme il s'agit de l'inverse, donc $f(x)=x^{-1}$ *…………**(T10)**,(T2)*
RC2 (Procédure 2): réponse correcte.
L'élève fournit une bonne réponse en utilisant la procédure P2. Autrement dit, il utilise la recette $\boldsymbol{R_a}$.

$f(x)=\dfrac{\frac{2x+1}{x-1}-2}{\frac{2x+1}{x-1}+1}$, $f(x)=\dfrac{2x+1-2x+2}{2x+1+x-1}$, $f(x)=\dfrac{3}{3x}$ *…….(SB18),(SB32)*

RC3 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$.
L'élève trouve la bonne réponse à partir de la procédure P1.
RP4 (Procédure 5) : erreur de mission inaccomplie.
L'élève suppose que la composition des fonctions n'est pas déjà effectuée.

$f(x)=\dfrac{\frac{x+1}{x-2}-\frac{2}{1}}{\frac{x+1}{x-2}+\frac{1}{1}}=\dfrac{\frac{x+1}{x-2}-\frac{2x-2}{x-2}}{\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-2}{x-2}}=\dfrac{x-1}{x-2}$, *f(x)=1……(SA16)*

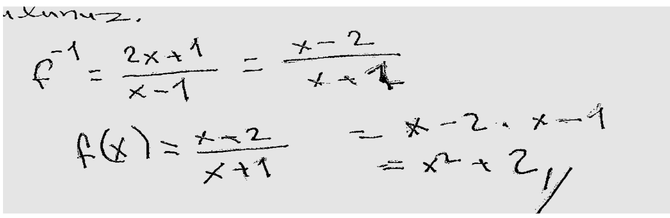

$$\frac{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)-2}{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+1}$$

(SA17)

$f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{\frac{x+\cancel{1}}{\cancel{x}-2}-2}{\frac{x+\cancel{1}}{\cancel{x}-2}+1}=\dfrac{-2}{1}$ *…………..(SC25)*

RP5: l'élève ne peut pas utiliser les deux cadres : cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble.

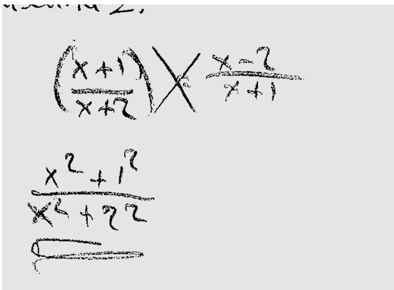
$f(\frac{x+1-1}{x-2+2})=\frac{x-2-1}{x+1+2}$, $f(\frac{x}{x})=\frac{x-3}{x+3}$ *……(SB30),(SB21),(SB17)*


bulunuz.
$f^{-1}=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{x-2}{x+1}$
$f(x)=\frac{x-2}{x+1}=x-2 \cdot x-1$
$=x^2+2$

(SC3)

$\frac{x+1}{x-2}=\frac{x-2}{x+1}$, *2x+2=2x-4,   =-6……….(SE2),(SE5)*

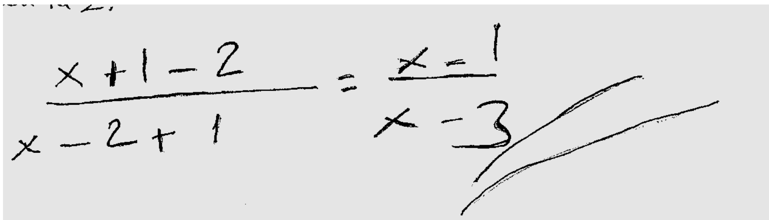
f$(\frac{x+1}{x-2})=\frac{x-2}{x-1}$, $\frac{x+1}{x-2}\cdot\frac{x-1}{x-2}=\frac{1}{2}$ ………*(SE44)*



(SE47)

f(x)=$\frac{x-2}{x+1}$, *f(x)=*$\frac{x-2}{x+1}$, *f(x)=x-2.x-1,   f(x)=2x-3………(SC7),(SC6)*

RP6: l'élève met le numérateur du premier terme à celui du deuxième terme et la même chose pour les dénominateurs.



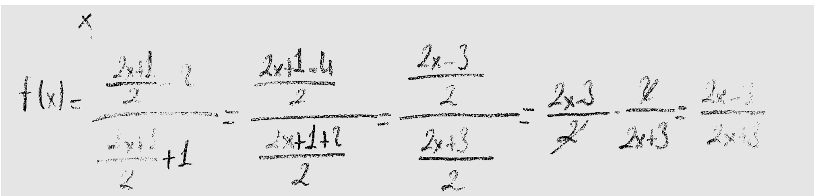
(SC13)

RP7: erreurs relatives au fait de trouver l'inverse de la fonction $\frac{x+1}{x-2}$

$$\frac{(\frac{2x-1}{x}+1)}{(\frac{2x-1}{x}-2)}=\frac{(\frac{2x-1}{x}-2)}{(\frac{2x-1}{x}+1)}$$ ……*(SA23)*

$$f^{-1}(x)=\frac{\frac{-2x+1}{x+1}-2}{\frac{-2x+1}{x+1}+1}=\frac{\frac{-2x+1-2x-2}{x+1}}{\frac{-2x+1+x+1}{x+1}}=\frac{4x-1}{x+2}$$ ……….*(SA40)*

$$f(x)=\frac{\frac{2x-1}{x+1}-2}{\frac{2x-1}{x+1}+1}=\frac{\frac{2x-1+2x+2}{x+1}}{\frac{2x-1+x+1}{x+1}}=\frac{\frac{2x-1+2(x+1)}{x+1}}{2x-1}=\frac{2x-1+2}{1}\cdot\frac{1}{2x-1}$$, *f(x)=1……….(SA44)*



(SB28)

RP8 : réponses incomplètes.

$f^{-1}(\frac{2x+1}{x-1})$,   *f(x)=*$\frac{\frac{2x+1}{x-1}-2}{\frac{2x+1}{x-1}+1}=$ ………*(SA5)*

f$(\frac{x-2}{x+1})$, $\frac{y}{1}=\frac{x-2}{x+1}$, *y(x+1)=x-1, y.x+y=x-2, =yx………(SE10)*

RP9 : erreurs de calcul.

$y=\frac{x+1}{x-2} \Rightarrow yx\text{-}2y=x+1 \Rightarrow yx\text{-}x=2y+1,\quad x=\frac{2y+1}{y-1},\ f(x)=\frac{\frac{2x+1}{x-1}-2}{\frac{2x+1}{x-1}+1}=\frac{3}{x-1}\cdot\frac{x-1}{3x}=\frac{1}{2}$ …….*(T11)*

$\frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow f(x)=\frac{\frac{2x+1}{x-1}-\frac{2x-2}{x-1}}{\frac{2x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x-1}}=$ ……………. $=\frac{-1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{3x}=\frac{-1}{3x}$ ……….*(SA29)*

$f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x-1},\ f(x)=\frac{\frac{2x+1}{x-1}-\frac{2}{1}}{\frac{2x+1}{x-1}+\frac{1}{1}}=\frac{\frac{2\cancel{x}-1-2\cancel{x}-2}{x-1}}{\frac{2x+\cancel{1}+x-\cancel{1}}{x-1}},\quad f(x)=\frac{-3}{x-1}\cdot\frac{x-1}{3x} \Rightarrow f(x)=\frac{-3}{3x}=\frac{-1}{x}$ ………..*(SC1)*

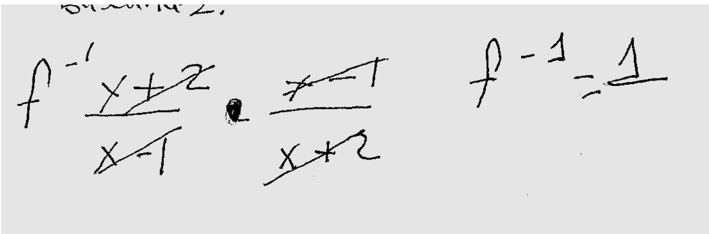
Autres réponses:

$\frac{x+1}{x-2}=x,\quad x^2\text{-}2x=x+1,\quad \frac{x^2-1}{3}=\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}},\quad x=\frac{x^2-1}{3},\ f(x)=\frac{\frac{x^2-1}{3}-2}{\frac{x^2-1}{3}+1}=$ …….. $=\frac{x^2-7}{x^2+2}$ ……*(SA25)*

$f(\frac{x+1}{x-2})=\frac{x-2}{x+1},\ f(\frac{2+1}{2-1})=(\frac{x-2}{x+2})=(\frac{3}{1})=\frac{0}{1}=3$ …………*(SB19)*

$f(\frac{3-1}{3-2})=\frac{3-2}{3+1}=\frac{2}{1}=\frac{1}{4},\ f(x)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ………*(SC21),(SC22)*

$f(\frac{x+1}{x-2})=\frac{x-2}{x+1}=\frac{1-2}{x+x}=\frac{1}{x^2}$ ……….*(SC18)*



(SC2)

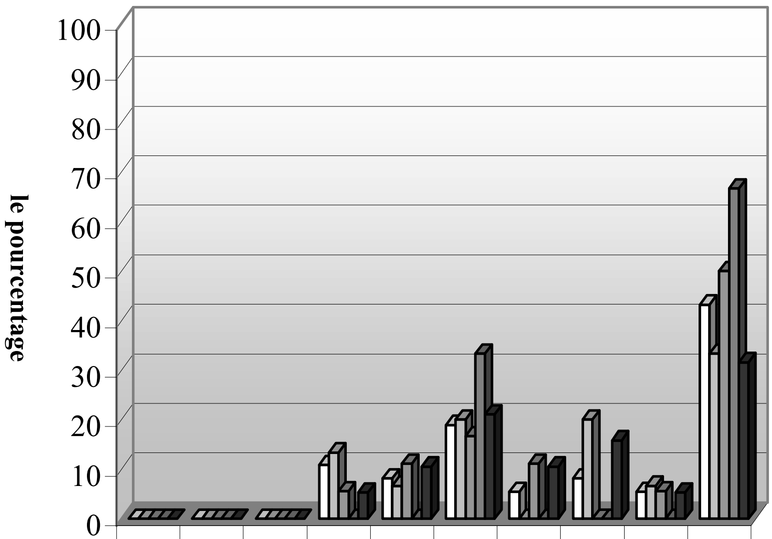
$f(x)=\frac{x-2}{x+1}=\frac{(\frac{x-2}{x+1})-2}{(\frac{x+1}{x-2})+1}=\frac{1}{2}$ ……….*(SC12),(SC20),(SC23)*

Non-réponses:

Maintenant les tableaux résumant les résultants des élèves suivant les lycées;

3.3.1 Lycée Anatolien

Q2-Q3-SA



	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	RP7	RP8	RP9	AR	NR
SA	0	0	0	11	8	19	5	8	5	43
BON	0	0	0	13	7	20	0	20	7	33
MOY	0	0	0	6	11	17	11	0	6	50
MAU	0	0	0	0	0	33	0	0	0	67
DER	0	0	0	5	11	21	11	16	5	32

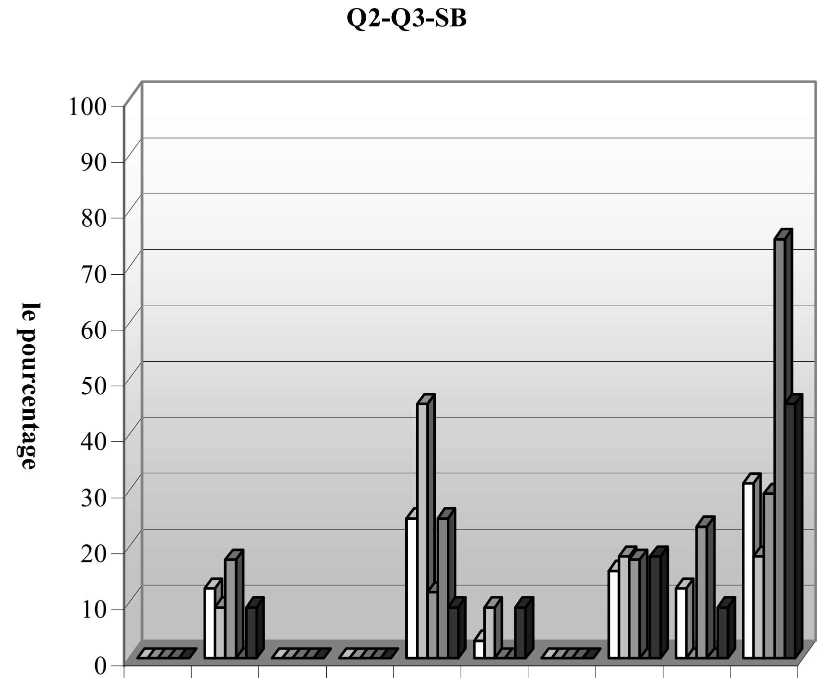
les réponses

RC1 (Procédure 4) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte avec la recette R_a, RC3 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xfy}, RP4 (Procédure 5) : erreur de mission inaccomplie, RP5: l'élève ne peut pas utiliser les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP6: l'élève met le numérateur du premier terme à celui du deuxième terme et la même chose pour les dénominateurs, RP7: erreurs relatives au fait de trouver l'inverse de la fonction (implicite), RP8 : réponses incomplètes, RP9 : erreurs de calcul, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'en classe A, aucun élève ne donne la bonne réponse, près de la moitié des élèves n'abordent pas la question. Il n'est pas difficile de dire que la question est assez complexe pour les élèves. De plus on peut aussi penser que dès le début l'un des objectifs des spécialistes du concours a été réalisé en faisant perdre courage à une bonne partie des élèves face à la question.

Par ailleurs, les erreurs les plus fréquentes sont celles relatives au mal-traitement de l'inverse de la fonction implicite ($\frac{x+1}{x-2}$) avec un taux de 19%. L'erreur de « mission inaccomplie » s'observe chez 11% des élèves, 8,1% essaient de ne résoudre la question que dans le cadre algébrique sans mettre en cause le cadre fonctionnel et le même pourcentage est valable pour les élèves qui font des erreurs de calcul. La résolution de la question est incomplète chez 5,4% des élèves.

En ce qui concerne les résultats par niveau des élèves, on observe que les erreurs de calcul ne sont réservées qu'aux bons élèves (20%) cela signifie qu'une grande partie des bons n'ont pas pu fournir une réponse correcte à cause de l'inattention ou des insuffisances de l'enseignement précédent tandis qu'ils se sont approchés si à la bonne réponse. Par ailleurs, les réponses incomplètes ne s'observent que chez 11% des moyens. Les erreurs provoquées par le mauvais traitement de l'inverse de la fonction ($\frac{x+1}{x-2}$) sont présentes chez tous les niveaux ainsi 33% des mauvais commettent ces erreurs contre 20% des bons et 17% des moyens. L'erreur de « mission inaccomplie » est plus fréquemment commise par les bons (13% contre 6% des moyens), par contre le nombre des élèves qui ne peuvent pas utiliser les deux cadres ensembles plus nombreux chez les moyens (11% contre 7% des bons). Ces deux erreurs sont totalement absentes chez les mauvais. Le taux de non-réponses par niveau n'est pas très étonnant ainsi plus de la moitié des mauvais ne donnent pas de réponse contre la moitié des moyens et un tiers des bons.



	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	RP7	RP8	RP9	AR	NR
SB	0	13	0	0	25	3	0	16	13	31
BON	0	9	0	0	45	9	0	18	0	18
MOY	0	18	0	0	12	0	0	18	24	29
MAU	0	0	0	0	25	0	0	0	0	75
DER	0	9	0	0	9	9	0	18	9	45

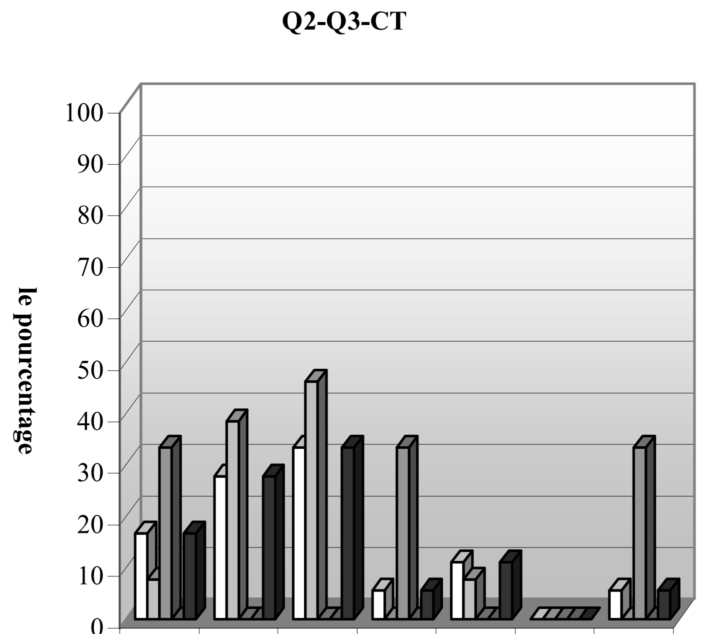
les réponses

RC1 (Procédure 4) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte avec la recette R_a, RC3 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xfy}, RP4 (Procédure 5) : erreur de mission inaccomplie, RP5: l'élève ne peut pas utiliser les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP6: l'élève met le numérateur du premier terme à celui du deuxième terme et la même chose pour les dénominateurs, RP7: erreurs relatives au fait de trouver l'inverse de la fonction (implicite), RP8 : réponses incomplètes, RP9 : erreurs de calcul, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, en classe B, le taux de réussite à cette question atteint 13%, lesquels utilisent la procédure P2 lors de la résolution de la question et le taux de non-réponses garde aussi son importance dans cette classe (31%). Par ailleurs, l'erreur la plus fréquente qui consiste à ne pas utiliser les deux cadres est commise par un quart des élèves, les erreurs de calcul s'observent chez 16% des élèves. Il s'agit d'un pourcentage identique pour les réponses incomplètes et celles provoquées par le mauvais traitement de l'inverse de la fonction implicite ($\frac{x+1}{x-2}$).

Si on regarde les résultats des élèves par niveau, on observe que le taux de réussite n'est que de 9% chez les bons. Il est très intéressant que ce taux soit doublé chez les moyens et il n'y a aucune réponse correcte de la part des mauvais.

Les erreurs consistant à résoudre la question seulement dans le cadre algébrique sont faites par près de la moitié des bons contre un quart des mauvais et 12% des moyens. Par ailleurs, une légère différence entre les bons et moyens s'observe par le taux d'erreurs de calcul. Ce type d'erreurs ne se présente pas chez les mauvais. Il y a seulement 9% des bons qui font des erreurs lorsqu'ils trouvent l'inverse de la fonction implicite.
Quant aux résultats des élèves qui suivent les dérsanés, la question n'est pas traitée par 45% d'entre eux et il y a seulement 9% qui peuvent fournir une bonne réponse.



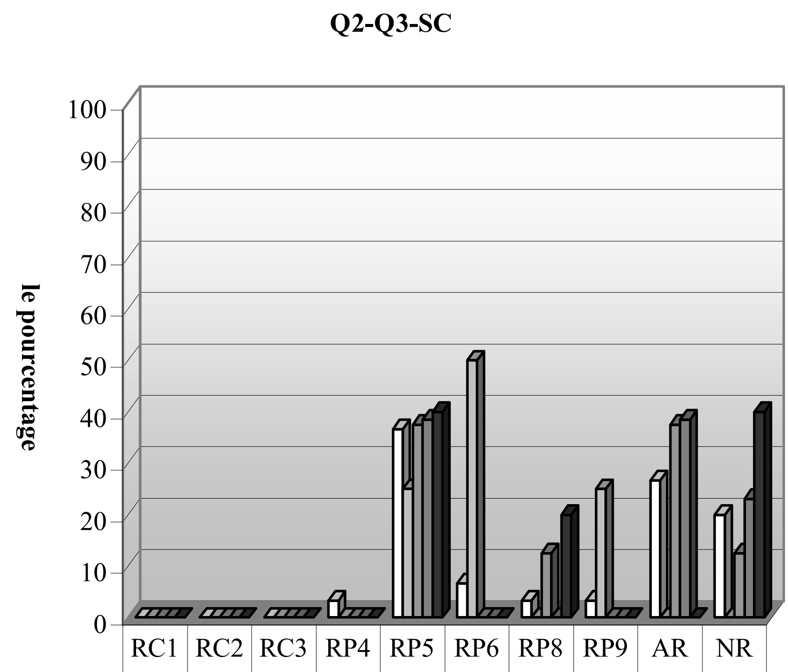
	RC1	RC2	RC3	RP4	RP9	AR	NR
T	17	28	33	6	11	0	6
BON	8	38	46	0	8	0	0
MOY	33	0	0	33	0	0	33
MAU	0	0	0	0	0	0	0
DER	17	28	33	6	11	0	6

les réponses

RC1 (Procédure 4) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte avec la recette R_a, RC3 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xfy}, RP4 (Procédure 5) : erreur de mission inaccomplie, RP5: l'élève ne peut pas utiliser les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP6: l'élève met le numérateur du premier terme à celui du deuxième terme et la même chose pour les dénominateurs, RP7: erreurs relatives au fait de trouver l'inverse de la fonction (implicite), RP8 : réponses incomplètes, RP9 : erreurs de calcul, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Remarquons qu'en classe de terminale la grande majorité des élèves fournissent une bonne réponse, ce qui indique une chute de réussite par rapport aux questions précédentes. Comme je l'ai déjà prévu, la procédure P3 ne peut être saisie que par 17% des élèves alors que 33% privilégient la procédure P1 et 28% la procédure P2. L'erreur de « mission inaccomplie » s'observe cependant chez 6% des élèves, 11% font des erreurs de calcul tandis que la question n'est pas abordée par 6% des élèves.

3.3.2 Lycée Super



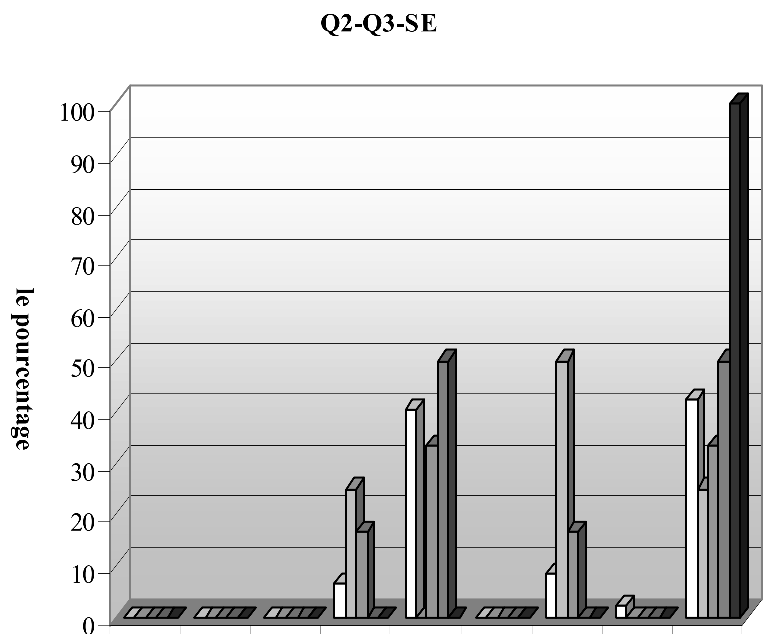
	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	RP6	RP8	RP9	AR	NR
SC	0	0	0	3	37	7	3	3	27	20
BON	0	0	0	0	25	50	0	25	0	0
MOY	0	0	0	0	38	0	13	0	38	13
MAU	0	0	0	0	38	0	0	0	38	23
DER	0	0	0	0	40	0	20	0	0	40

les réponses

RC1 (Procédure 4) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte avec la recette R_a, RC3 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xfy}, RP4 (Procédure 5) : erreur de mission inaccomplie, RP5: l'élève ne peut pas utiliser les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP6: l'élève met le numérateur du premier terme à celui du deuxième terme et la même chose pour les dénominateurs, RP7: erreurs relatives au fait de trouver l'inverse de la fonction (implicite), RP8 : réponses incomplètes, RP9 : erreurs de calcul, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Selon le tableau ci-dessus, en classe il n'y a aucun élève qui donne la bonne réponse, la plupart des élèves ne peuvent pas utiliser les deux cadres ensemble (37%), 7% des élèves mettent le numérateur du premier membre à celui du deuxième terme et la même chose pour le dénominateur, pour 3% il s'agit ici d'une « mission inaccomplie » et le même taux est valable pour les erreurs de calcul et les réponses incomplètes. Par ailleurs, une bonne partie des élèves n'abordent pas la question tandis que le pourcentage d'autres réponses atteint 27% dans cette classe.
En ce qui concerne les résultats des élèves par niveau, une légère différence entre les moyens et mauvais se constate par le taux des élèves qui traitent algébriquement la question (respectivement 37,5% contre 38,5% et un quart des bons), l'erreur qui consiste à mettre le numérateur au numérateur et le dénominateur au dénominateur et celles de calcul ne sont réservées qu'aux bons élèves : la première est commise par la moitié et la deuxième un quart d'eux. On constate cependant que le taux d'autres réponses est très élevé chez les moyens et mauvais, respectivement 37,5% contre 38,5% tandis qu'il s'agit d'un pourcentage nul.

3.3.3 Lycée Normal



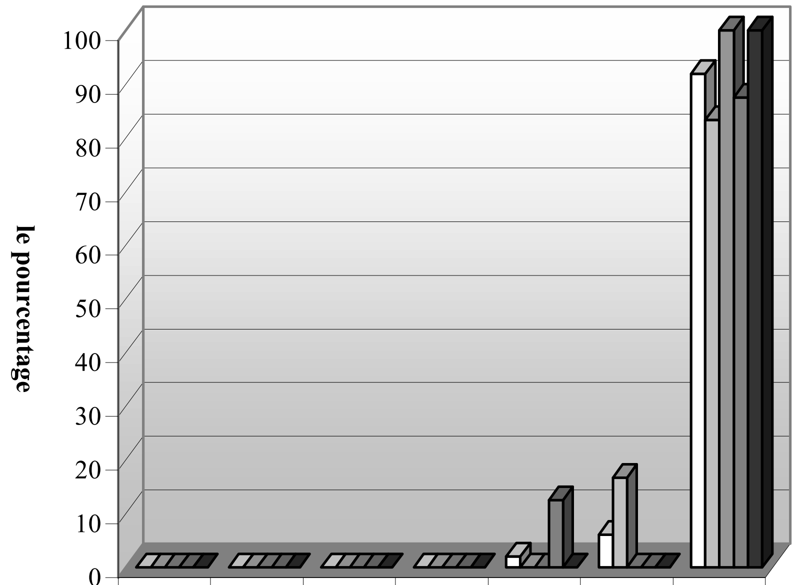
	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	RP6	RP8	AR	NR
SE	0	0	0	6	40	0	9	2	43
BON	0	0	0	25	0	0	50	0	25
MOY	0	0	0	17	33	0	17	0	33
MAU	0	0	0	0	50	0	0	0	50
DER	0	0	0	0	0	0	0	0	100

RC1 (Procédure 4) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte avec la recette R_a, RC3 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xfy}, RP4 (Procédure 5) : erreur de mission inaccomplie, RP5: l'élève ne peut pas utiliser les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP6: l'élève met le numérateur du premier terme à celui du deuxième terme et la même chose pour les dénominateurs, RP7: erreurs relatives au fait de trouver l'inverse de la fonction (implicite), RP8 : réponses incomplètes, RP9 : erreurs de calcul, AR :autres réponses, NR :non-réponses

En classe de seconde E, il n'y a aussi aucune réponse correcte. De plus, près de la moitié des élèves ne traitent pas la question. Le taux des élèves qui essaient de résoudre la question seulement dans le cadre algébrique atteint 43% chez ces élèves. 8,5% ne peuvent pas aboutir la question. Alors que l'erreur de mission inaccomplie est commise par 6,4% des élèves.

Si on prend en compte les résultats des élèves par niveau, on voit que un quart des bons élèves commettent l'erreur de mission inaccomplie contre 17% des moyens et cette erreur ne se présente pas chez les mauvais. Par ailleurs, l'erreur consistant à ne pas utiliser les deux cadres est faite par la moitié des mauvis contre un tiers des moyens et elle est totalement absente chez les bons. La plupart des bons ne peuvent pas aboutir la question (50%). Ce taux descend à 17% chez les moyens et un pourcentage nul chez les mauvais.

Q2-Q3-SF



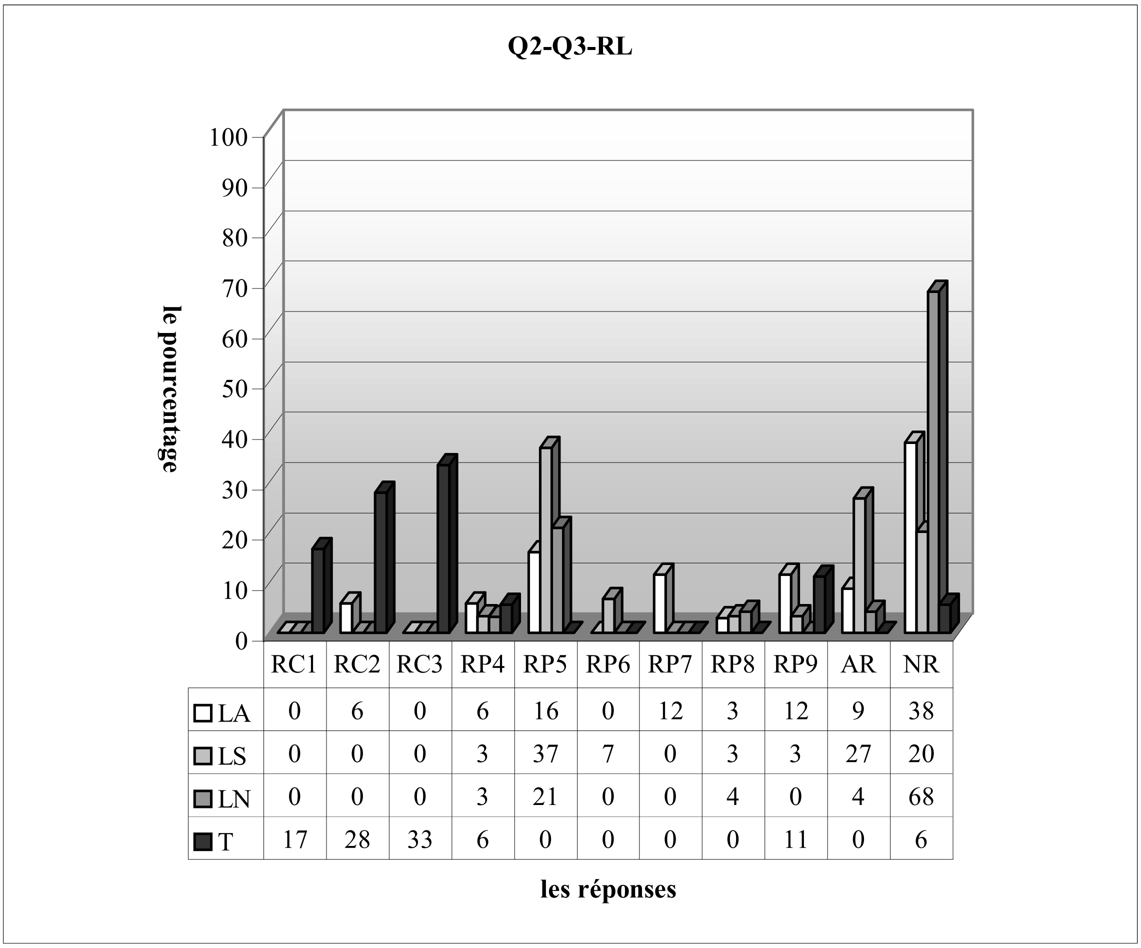
	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	AR	NR
SF	0	0	0	0	2	6	92
BON	0	0	0	0	0	17	83
MOY	0	0	0	0	0	0	100
MAU	0	0	0	0	13	0	88
DER	0	0	0	0	0	0	100

les réponses

RC1 (Procédure 4) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte avec la recette R_a, RC3 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xfy}, RP4 (Procédure 5) : erreur de mission inaccomplie, RP5: l'élève ne peut pas utiliser les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP6: l'élève met le numérateur du premier terme à celui du deuxième terme et la même chose pour les dénominateurs, RP7: erreurs relatives au fait de trouver l'inverse de la fonction (implicite), RP8 : réponses incomplètes, RP9 : erreurs de calcul, AR :autres réponses, NR :non-réponses

En ce qui concerne la classe de seconde F, la question n'est abordée que par 8% des élèves, 2% d'entre eux font des erreurs consistant à ne pas utiliser les deux cadres ensembles et 6% des réponses ne méritent d'être classées que dans la catégorie d'autres réponses. On peut donc dire que la question est trop complexe et n'est pas familière aux élèves.

3.3.4 Résultats des élèves par lycée



	RC1	RC2	RC3	RP4	RP5	RP6	RP7	RP8	RP9	AR	NR
LA	0	6	0	6	16	0	12	3	12	9	38
LS	0	0	0	3	37	7	0	3	3	27	20
LN	0	0	0	3	21	0	0	4	0	4	68
T	17	28	33	6	0	0	0	0	11	0	6

RC1 (Procédure 4) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte avec la recette R_a, RC3 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xfy}, RP4 (Procédure 5) : erreur de mission inaccomplie, RP5: l'élève ne peut pas utiliser les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP6: l'élève met le numérateur du premier terme à celui du deuxième terme et la même chose pour les dénominateurs, RP7: erreurs relatives au fait de trouver l'inverse de la fonction (implicite), RP8 : réponses incomplètes, RP9 : erreurs de calcul, AR :autres réponses, NR :non-réponses

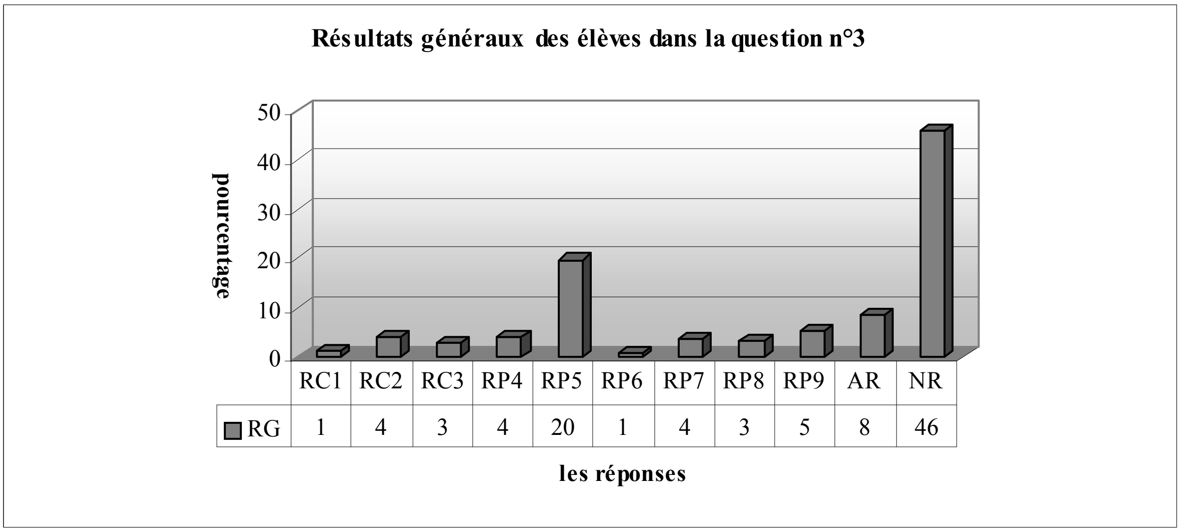
Selon le tableau ci-dessus, constatons qu'il n'y a aucune réponse correcte dans le lycée Super et normal alors que seuls 6% des élèves fournissent une bonne réponse dans le lycée Anatolien. En ce qui concerne les non-réponses, elles sont nombreuses dans tous les lycées par exemple le lycée Normal précède sensiblement les autres avec un taux de 68%. Ensuite le lycée Anatolien avec 38% et le lycée Super 20%. Donc on peut dire que la question est trop complexe pour tous les lycées. De plus on constate que l'appariation des fonctions rationnelles fait chuter fortement le taux de réussite à cette question par rapport à la précédente (46% contre 6% dans le lycée Anatolien, 3% contre 0% le lycée Super, 7% contre 0% le lycée Normal et 100% contre 78% la classe de terminale).

Il est tout à fait intéressant que l'apparition ou l'augmentation de certaines erreurs se constatent dans les classes : par exemple tandis que les erreurs qui consistent à ne pas pouvoir utiliser les deux cadres (algébrique et fonctionnel) ensemble ne sont pas présentes chez les lycéens super dans la question précédente, elles atteignent, ici, 37%.On constate aussi une augmentation de 11% de ces erreurs dans le lycée Anatolien. L'erreur la plus fréquente est identique dans les lycées : c'est l'erreur consistant à ne pas utiliser les deux cadres ensemble qui est commise par 37% des élèves du lycée Super contre 21% du lycée Normal et 16% du lycée Anatolien.

Par ailleurs, une très légère différence entre le lycée Normal et super s'observe par le taux d'erreur de la « mission inaccomplie » (3,1% contre 3,3%). Ce type d'erreurs atteint 5,8% chez les anatoliens.

12% des élèves de ce dernier font des erreurs lors du traitement de l'inverse de la fonction $\frac{x+1}{x-2}$ contre un pourcentage nul dans les deux autres.
L'erreur consistant à mettre le numérateur au numérateur et le dénominateur au dénominateur reste une erreur réservée uniquement au lycée Super (7%). Le nombre des élèves qui ne peuvent pas aboutir la question ne change pas beaucoup suivant les lycées ainsi 2,8% des élèves du lycée Anatolien donnent des réponses incomplètes contre 3,3% des élèves du lycée Super et 4,2% du lycée Normal.
Les erreurs de calcul ne permettent pas à 12% des élèves du lycée Anatolien et à 3% du lycée Super de trouver la bonne réponse. Comme il n'y a pas beaucoup d'élèves qui traitent la question dans le lycée Normal, on n'observe pas ces erreurs.
En ce qui concerne la classe de terminale, 23% des élèves ont échoué c'est étonnant. Car la réussite n'est jamais descendue à ce taux pareil jusqu'à maintenant dans cette classe. Si on regarde les réponses incorrectes, on observe qu'il y a une non-réponse, ce qui signifie le découragement, deux erreurs de calcul qui confirment la difficulté de l'évitement des erreurs de calcul dans la résolution de la question et une erreur de « mission inaccomplie », cela signifie que la complexité de la question provoque des mal investissement même chez les bons élèves.
Quant aux procédures utilisées, la procédure P3 n'est privilégiée que par 17% des élèves ce qui confirme mes attentes. Une légère différence entre la procédure s'appuyant sur la recette $\mathbf{R_a}$ et sur la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ s'observe par le taux des élèves qui les utilisent ainsi 28% des élèves privilégient la procédure de la recette $\mathbf{R_a}$ contre 33% ce qui est contraire à mes hypothèses.

3.3.5 Résultats généraux des élèves



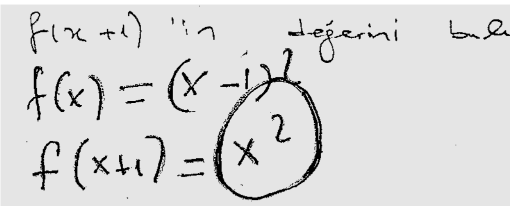
RC1 (Procédure 4) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte avec la recette R_a, RC3 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xfy}, RP4 (Procédure 5) : erreur de mission inaccomplie, RP5: l'élève ne peut pas utiliser les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP6: l'élève met le numérateur du premier terme à celui du deuxième terme et la même chose pour les dénominateurs, RP7: erreurs relatives au fait de trouver l'inverse de la fonction (implicite), RP8 : réponses incomplètes, RP9 : erreurs de calcul, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, il y a seulement 8% des élèves qui fournissent la bonne réponse, 4% d'entre eux utilisent la recette $\mathbf{R_a}$, 3% la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Le taux des élèves qui remarquent, sans faire des calculs, qu'il s'agit d'une fonction inverse n'est que de 1%. Par ailleurs, la question n'est pas abordée par près de la moitié des élèves. Les erreurs les plus fréquentes consistent à ne pas utiliser les deux cadres algébrique et fonctionnel, ensemble et elles sont commises par 20% des élèves. On constate le même taux pour l'erreur de « mission inaccomplie » et les erreurs qui portent sur le fait de trouver l'inverse de la fonction (implicite). Ainsi 4% des élèves commettent ces erreurs, 5% des élèves commettent des erreurs de calcul dans une démarche correcte alors que le taux de réponses incomplètes est de 3%. Un très petit nombre des élèves échouent en mettant le numérateur du premier terme à celui du deuxième terme et la même chose pour les dénominateurs.

3.3.6 Conclusion
Le fait qu'un très petit nombre des élèves répondent correctement à la question et que par contre le taux de non-réponses soit très élevé indique que la question est très complexe pour les élèves et surtout pour les élèves de seconde (aucune bonne réponse dans les lycées super et normal et un très petit nombre dans le lycée Anatolien). Si on compare le taux de réussite à cette question avec celui à la question précédente, on constate la validité de notre hypothèse : l'apparition des fonctions rationnelles fait chuter le taux de réussite par rapport à la question précédente (8% contre 30%). Par ailleurs, comme nous l'avons déjà indiqué dans notre analyse a priori, il y a seulement 1% des élèves (trois élèves de terminale) qui peuvent remarquer la fonction inverse et trouver la bonne réponse en utilisant la procédure P4. Il faut souligner que le questionnaire s'est déroulé dans la classe de terminale avant l'enseignement des fonctions au dérsané c'est pourquoi nous nous demandons si ce taux change après l'enseignement. Mais cela ne nous empêche pas cependant de dire que ce type de procédures est réservé à un très petit nombre des élèves.
Par ailleurs, l'apparition ou l'augmentation des erreurs consistant à ne pas utiliser deux cadres se constatent dans les classes de seconde. Bien qu'elles ne soient pas présentes chez les lycéens super dans la question précédente, elles sont assez fréquentes dans cette question. Il y a aussi une augmentation de taux de ce type d'erreurs dans le lycée Anatolien. Ce qui signifie peut-être que plus la question devient complexe, plus les erreurs qui ne sont pas déjà apparues commencent à s'observer.

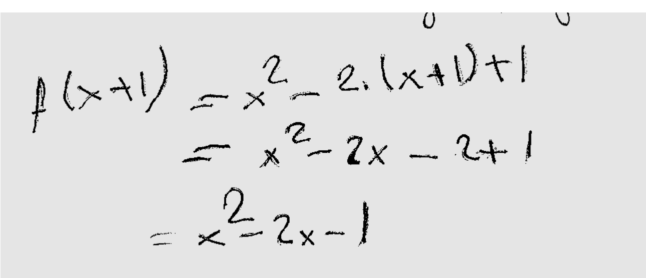
3.4 Question n°4
Comme dans la question précédente, les élèves sont face à choisir la technique plus adéquate au concours pour résoudre la question. Dans cette question j'attendais que la plupart des élèves aient tendance à utiliser la première procédure banale qui ne permet pas d'éviter le risque d'erreurs et de gagner du temps.
Je pensais aussi que la deuxième procédure serait réservée au peu nombre des bons élèves.

Maintenant je vais décrire les réponses catégorisées avec les exemples significatifs :
RC1 (Procédure 2) : réponse correcte.
L'élève trouve la bonne réponse en utilisant la procédure P2.



(T2)

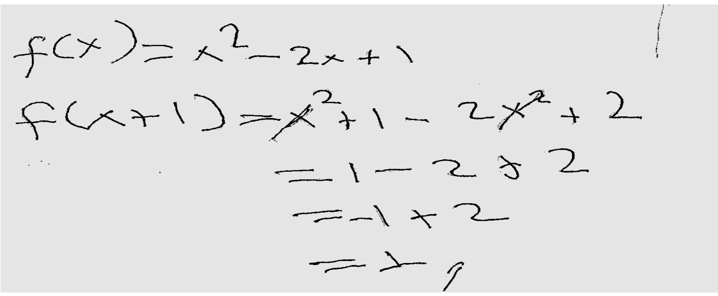
RC2 (Procédure P1): réponse correcte.
L'élève fournit une bonne réponse à partir de la procédure P1.
$f(x+1)=x^2+2x+1-2x-2+1=x^2$ ………(SA28),(SA29)
RP3 : erreurs liées à l'identité remarquable ($(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$) ou le manque des connaissances de cette dernière.
$f(x+1)=(x+1)-2(x+1)+1=x+1-2x+2+1=x+4$ ……….(SA16)
$f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)+1$, $f(x+1)=x^2+1-2x-2+1=x^2-2x$ ………(SA13)
$f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)+1=x^2+2-2x+2+1=x^2-2x+1$ ……….(SA40)



(SB31)

$(x+1)^2-2(x+1)+1$, $x^2+1-2x-2+1=x^2+1-2x-1=x^2-2x$ ………….(SB29)

$f(x+1)=x+1^2-2(x+1)+1=1.x-2x+1+1=x+2=2x$………(SF43)
$f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)+1$, $=(x+1)^2-2x+2+2$, $(x+1)^2-2x+3$………..(SF18)

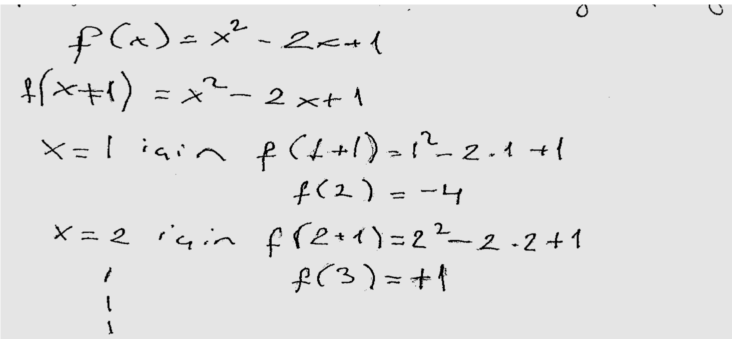


(SC18)

$f(x)=(x+1)^2-2(x+1)+1$, $=x^2+1^2-2x+2+1$, $=x^2+1-2x+3$, $=3x^2-2$………(SC14)
$(x+1)^2-2(x+1)+1$, $2x+2-2x+2+1$, $=4+1$, $=5$………(SE43),(SE28)
$f(x)=x+1^2-2x+1+1=x+1-2x+2=x+1$………(SC11)
$f(x+1)=x+1-2(x+1)+1$, $f(x+1)=x+1-2x+2+1$, $f(x+1)=x+4$………..(SA16)
$f(x+1)=x+1-2x+1+1$, $=x+1-2x+1+1$, $= -x+3$…….(SC7)

RP4: l'élève donne un valeur numérique à la fonction f ou f(x+1).

Pour $x=1$, $f(1)=1^2-2.1+1$, $f(1)=1.2+1$, $f(1)=0$
$f(1+1)=f(2)$, $f(2)=2^2-2.2+1$, $f(2)=4-4+1$, $f(2)=1$………(SA31)



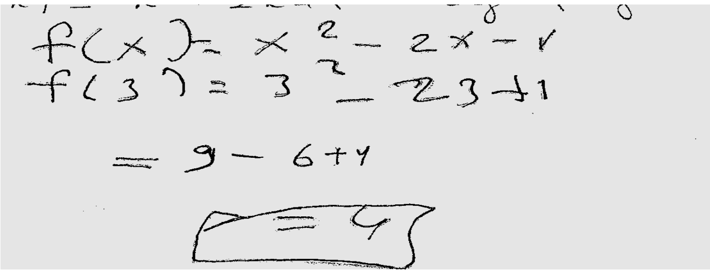
(SF12)

on donne 3 à x, $f(x)=x^2-2x+1$, $f(3)=9-6+1$, $f(3)=4$

$f(3+1)=4.2.4+1$, $f(4)=16-8+1$, $=8+1=9$, donc l'équation : $f(x+1)=x^2-2x+6$………(SF4)

Autres réponses :

$((x+1)-2)$, $f(x+1)=(x+1)-2$, $=-2$………..(SA33)



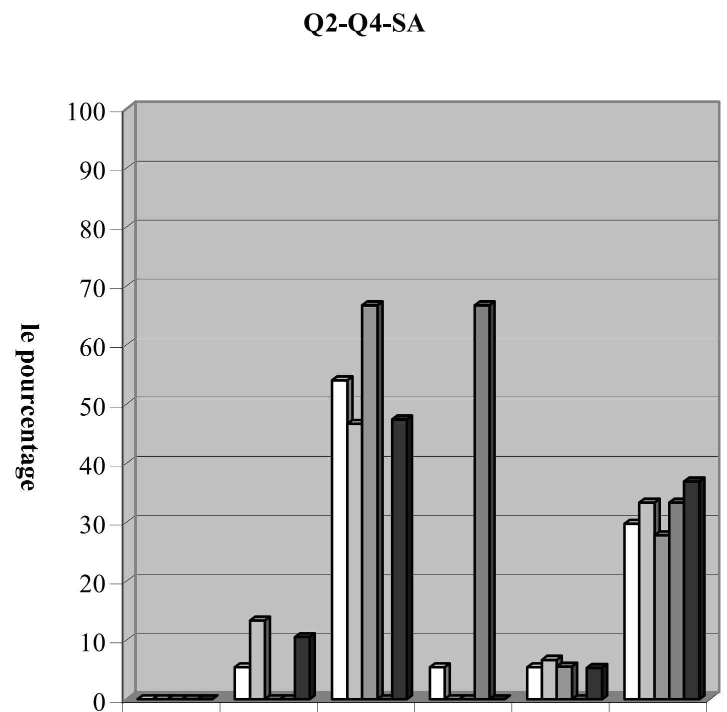
(SA2)

$(x+2)(x-2)=x^2-x-x+1$, $(x-1)(x+1)=x^2-x-x+1$…………(SB17)
$f(x+1)=x^2-2x$………..(SB6),(SB9)
$f(x)=x^2-2x+1$, 2^2-2x+1, $4-2x+1$, $f(x+1)=2x+1$………(SC21)
$f(x)=x^2-2x+1$, $f(x+1)$, $x^2=2x-1$, $x^2=2x+$, x^2-2-1, $\frac{3}{2}$………(SE19)
$f(x)=x^2-2x+1$, $f(x)=3x^2+1$, $f(x)=3+1$, $f(x)=3$………(SE44)

f(x)=x²-2x+1, f(x+1), f(x)=x²-2x=2²+1, f(x+1)=f(1)………(SF28)
f(x+1)=x²+1-3x+1+1………(SF42)

Non-réponses:
Les résultats par lycée sont les suivants:

3.4.1 Lycée Anatolien



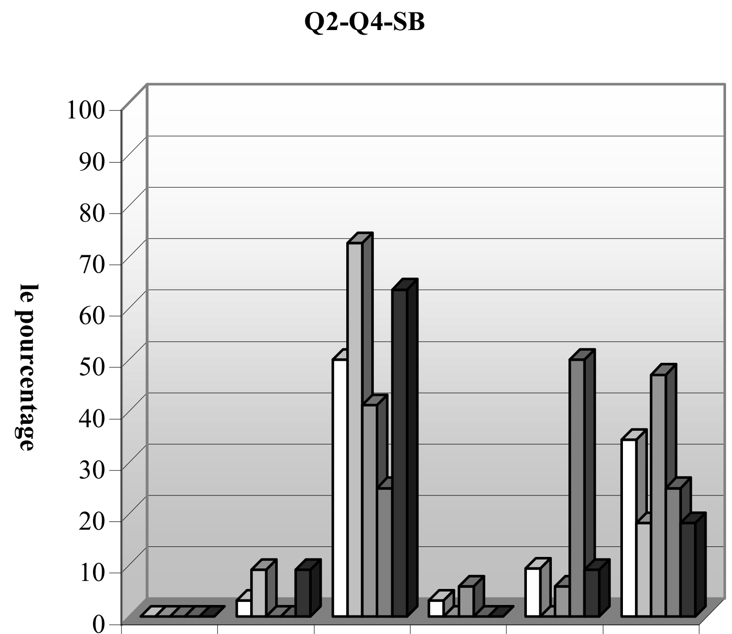
	RC1	RC2	RP3	RP4	AR	NR
SA	0	5	54	5	5	30
BON	0	13	47	0	7	33
MOY	0	0	67	0	6	28
MAU	0	0	0	67	0	33
DER	0	11	47	0	5	37

les réponses

RC1 (Procédure 2) : réponse correcte, RC2 (Procédure P1): réponse correcte, RP3 : erreurs liées à l'identité remarquable, RP4: l'élève donne une valeur numérique à la fonction f ou f(x+1), AR :autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'en classe un peu d'élèves fournissent une bonne réponse (5,4%), il n'y a aucun élève qui donne une réponse correcte en utilisant la procédure P1 et plus de la moitié des élèves font des erreurs relatives à l'identité remarquable. Il est regrettable que ces élèves n'aient échoué qu'à cause de ne pas utiliser l'une des connaissances déjà acquises, pas la fonction. Ce qui signifie aussi que ces élèves ont des difficultés venant du collège. Le pourcentage des élèves qui donnent des valeurs numériques à x est de 5,4%. Ce taux est valable pour les autres réponses. Par ailleurs la question n'est pas abordée par un tiers des élèves. Si on tient compte du taux de réussite et des non-réponses, on peut dire que la question est complexe et décourageante.
Les résultats par niveau ne sont pas très homogènes ainsi les bonnes réponses ne viennent que de la part des bons (13%), les erreurs relatives à l'identité remarquable sont commises par deux tiers des moyens contre 47% des bons. Ce type d'erreurs n'est pas présent chez les mauvais. Par ailleurs, l'erreur qui consiste à donner des valeurs numériques à la fonction f est uniquement réservée aux

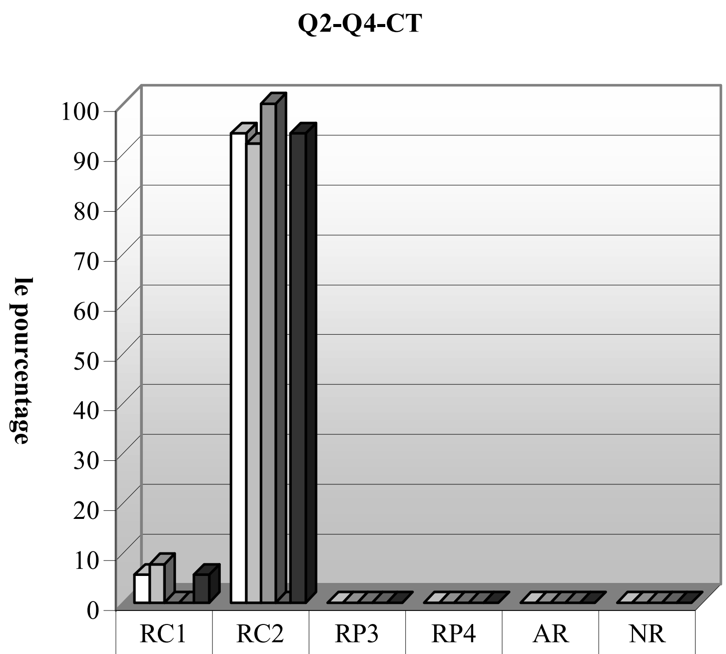
mauvais et elle est commise par 67% d'entre eux. Le taux de non-réponses est très élevé chez tous les élèves tandis qu'il s'agit d'un même pourcentage chez les bons et mauvais (33%). Ce taux descend un petit peu chez les moyens (28%).
Les résultats des élèves fréquentés des dérsanés se ressemblent beaucoup à ceux des bons. C'est dû au fait que la plupart des élèves qui suivent les cours du dérsané sont aussi bons.



	RC1	RC2	RP3	RP4	AR	NR
SB	0	3	50	3	9	34
BON	0	9	73	0	0	18
MOY	0	0	41	6	6	47
MAU	0	0	25	0	50	25
DER	0	9	64	0	9	18

RC1 (Procédure 2) : réponse correcte, RC2 (Procédure P1): réponse correcte, RP3 : erreurs liées à l'identité remarquable, RP4: l'élève donne une valeur numérique à la fonction f ou f(x+1), AR :autres réponses, NR :non-réponses

Quant à la classe B, un très faible pourcentage des élèves donnent la bonne réponse (3%) et plus du tiers des élèves ne donnent pas de réponse. Cela permet de dire que la question est complexe et peu familière aux élèves. La moitié des élèves font des erreurs relatives à l'identité remarquable alors que l'erreur consistant à donner des valeurs numériques à x est commise par 3% des élèves.
Si on regarde les résultats par niveau, on constate qu'il y a seulement 9% des bons élèves qui fournissent une réponse correcte. Les erreurs liées à l'identité remarquable sont plus fréquentes chez les bons ainsi 73% des bons commettent ces erreurs contre 41% des moyens et un quart des mauvais. Par ailleurs, on ne constate l'erreur consistant à donner des valeurs numériques à x que chez les moyens avec un taux de 6%. Les mauvais se démarquent des autres par le taux plus élevé d'autres réponses (50% contre 6% chez les moyens et un pourcentage nul chez les bons). Alors on peut dire que la question n'est pas considérée si difficile par ces élèves. Près de la moitié des moyens ne donnent pas de réponse à cette question. Ce taux descend à 25% chez les mauvais et 18% chez les bons.



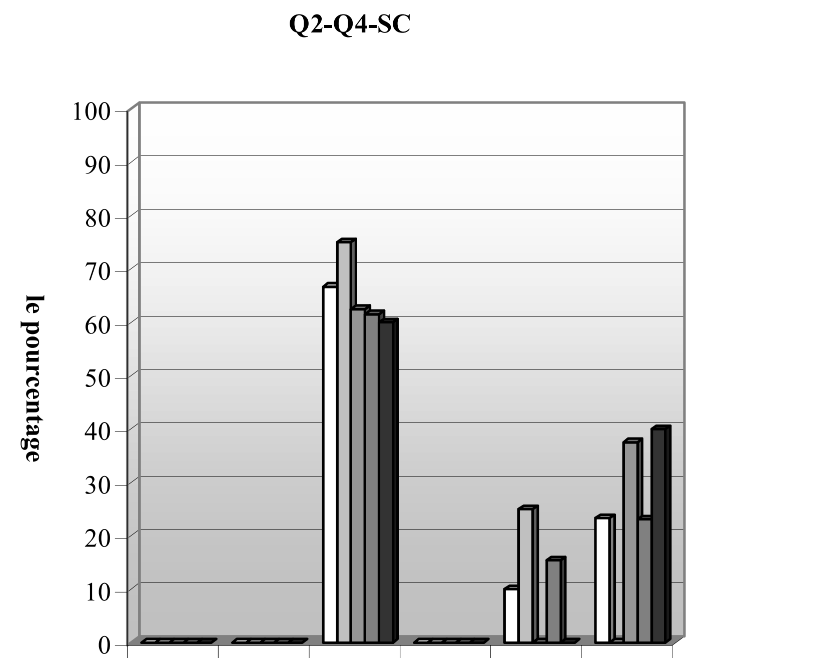
	RC1	RC2	RP3	RP4	AR	NR
T	6	94	0	0	0	0
BON	8	92	0	0	0	0
MOY	0	100	0	0	0	0
MAU	0	0	0	0	0	0
DER	6	94	0	0	0	0

les réponses

RC1 (Procédure 2) : réponse correcte, RC2 (Procédure P1): réponse correcte, RP3 : erreurs liées à l'identité remarquable, RP4: l'élève donne une valeur numérique à la fonction f ou f(x+1), AR :autres réponses, NR :non-réponses

En ce qui concerne la classe de terminale, tous les élèves fournissent une bonne réponse. Conformément à mes attentes un seul élève privilégie la procédure P1 ce qui annonce une chute du taux des élèves qui favorisent la procédure plus pratique par rapport aux questions précédentes (6% contre 17% dans la question n°3 et 72% la question n°2).

3.4.2 Lycée Super



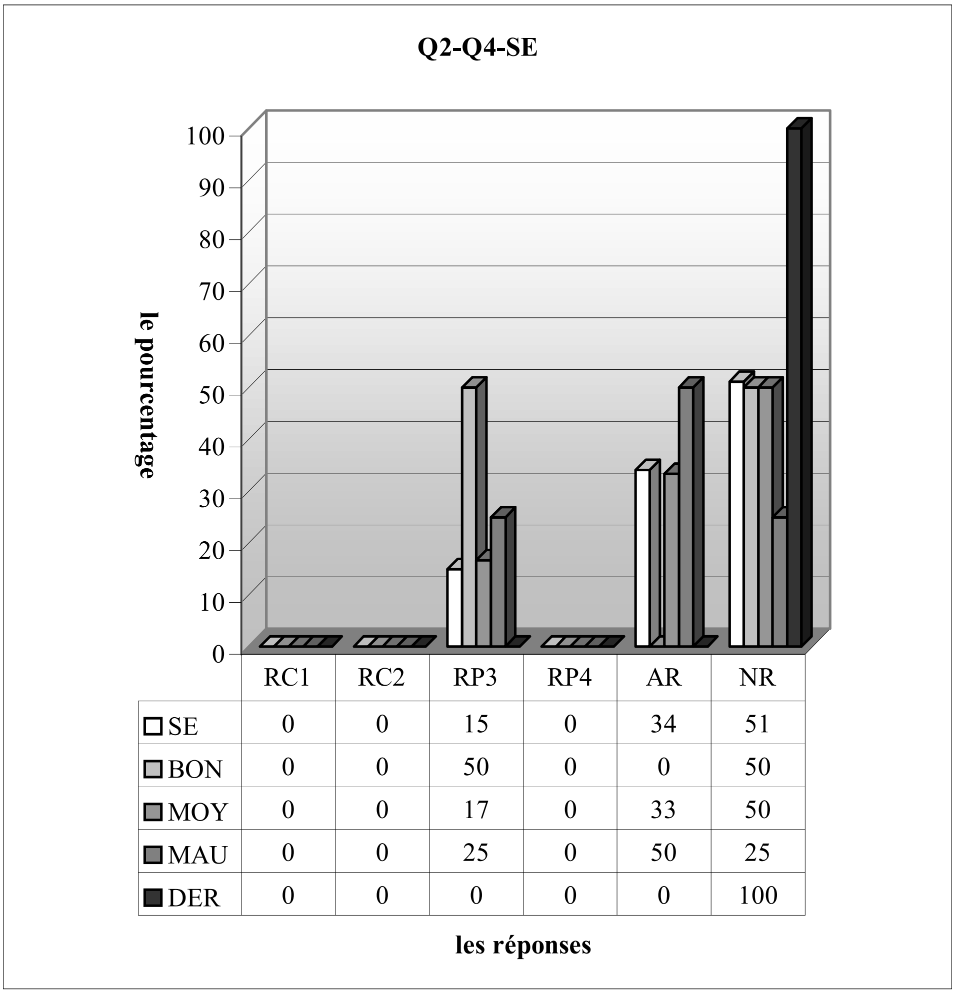
	RC1	RC2	RP3	RP4	AR	NR
SC	0	0	67	0	10	23
BON	0	0	75	0	25	0
MOY	0	0	63	0	0	38
MAU	0	0	62	0	15	23
DER	0	0	60	0	0	40

les réponses

RC1 (Procédure 2) : réponse correcte, RC2 (Procédure P1): réponse correcte, RP3 : erreurs liées à l'identité remarquable, RP4: l'élève donne une valeur numérique à la fonction f ou f(x+1), AR :autres réponses, NR :non-réponses

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, il n'y a aucun élève qui fournit une réponse en classe. Il est cependant très intéressant de constater que le pourcentage des erreurs liées à l'identité remarquable atteint 67% chez les élèves de cette classe ceci signifie que la grande majorité des élèves ne réussissent pas à mobiliser les connaissances déjà acquises. De plus on peut aussi dire que ces élèves sont venus au lycée avec beaucoup de lacunes du collège. Par ailleurs, 23% ne donnent pas de réponse tandis que le pourcentage d'autres réponses est de 10%.
Comme les résultats des élèves par niveau ne présentent pas une grande diversité, il n'est donc pas nécessaire d'en parler.

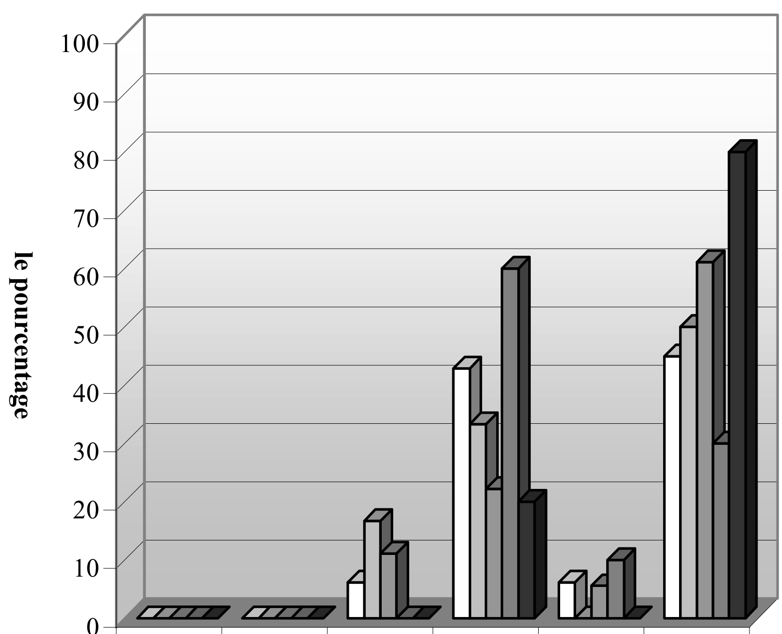
3.4.3 Lycée Normal



	RC1	RC2	RP3	RP4	AR	NR
SE	0	0	15	0	34	51
BON	0	0	50	0	0	50
MOY	0	0	17	0	33	50
MAU	0	0	25	0	50	25
DER	0	0	0	0	0	100

RC1 (Procédure 2) : réponse correcte, RC2 (Procédure P1): réponse correcte, RP3 : erreurs liées à l'identité remarquable, RP4: l'élève donne une valeur numérique à la fonction f ou f(x+1), AR :autres réponses, NR :non-réponses

Remarquons aussi qu'en classe il n'y a aucune réponse correcte, plus de la moitié des élèves reste taciturne face à la question et le taux d'autres réponses est de 34%. Il est évident que la question est trop difficile pour ces élèves. Comme les élèves qui traitent la question ne sont pas nombreux, le pourcentage des erreurs correspondant à l'identité remarquable atteint donc seulement 15%.
En ce qui concerne les résultats par niveau, la moitié des bons font des erreurs relatives à l'identité remarquable contre un quart des mauvais et 17% des moyens. La question n'est pas abordée par la moitié des bons et moyens. Ce taux descend à 25% chez les mauvais. En regardant les taux d'autres réponses on peut dire que les mauvais sont plus déconcertés face à la question ainsi la moitié des mauvais répondent autrement à la question contre 34% des moyens et un pourcentage nul chez les bons.



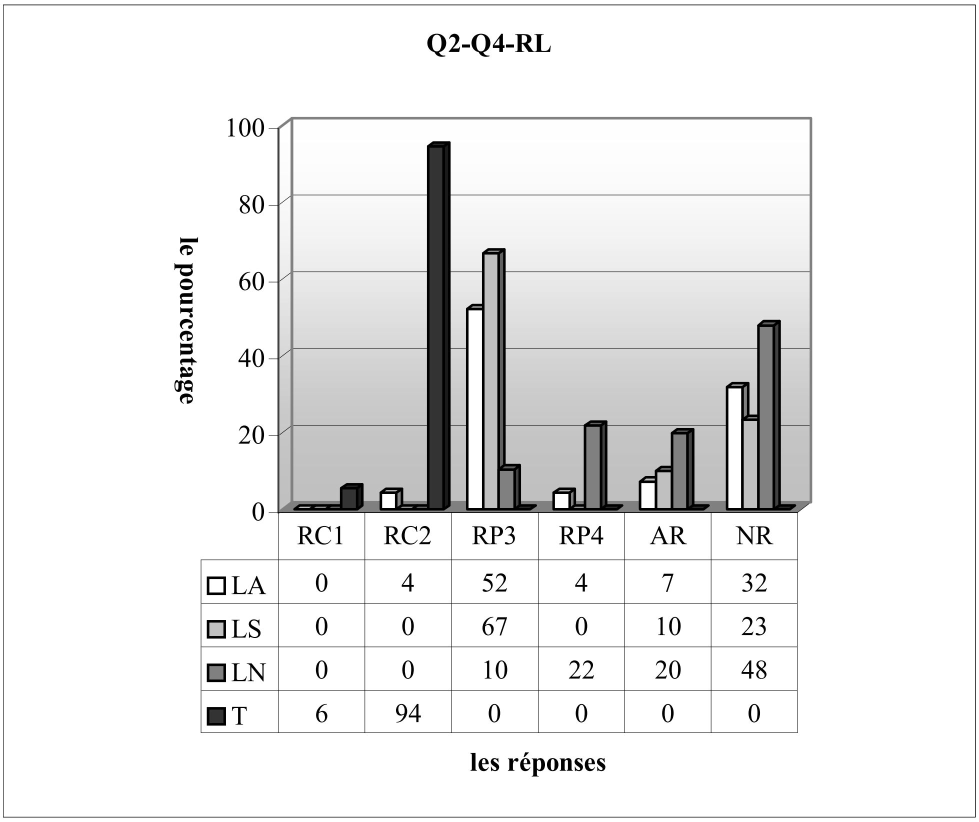
	RC1	RC2	RP3	RP4	AR	NR
SF	0	0	6	43	6	45
BON	0	0	17	33	0	50
MOY	0	0	11	22	6	61
MAU	0	0	0	60	10	30
DER	0	0	0	20	0	80

RC1 (Procédure 2) : réponse correcte, RC2 (Procédure P1): réponse correcte, RP3 : erreurs liées à l'identité remarquable, RP4: l'élève donne une valeur numérique à la fonction f ou f(x+1), AR :autres réponses, NR :non-réponses

Dans la classe de seconde F, aucun élève ne fournit une bonne réponse. De plus une grande partie des élèves n'abordent pas la question. L'erreur la plus fréquente est celle qui consiste à donner des valeurs numériques à x (43%). Par ailleurs, on observe que les erreurs portant sur l'identité remarquable perdent leur importance dans cette classe et il y a seulement 6% des élèves qui les commettent. Ce taux est aussi valable pour les autres réponses.

Les erreurs liées à l'identité remarquable sont plus fréquentes chez les bons ainsi elles sont faites par 17% des bons contre 11% des moyens. Ces erreurs sont absentes chez les mauvais. Par ailleurs, la grande majorité des mauvais commettent les erreurs consistant à donner des valeurs numériques à x contre 33% des bons et 22% des moyens.

3.4.4 Résultats des élèves par lycée

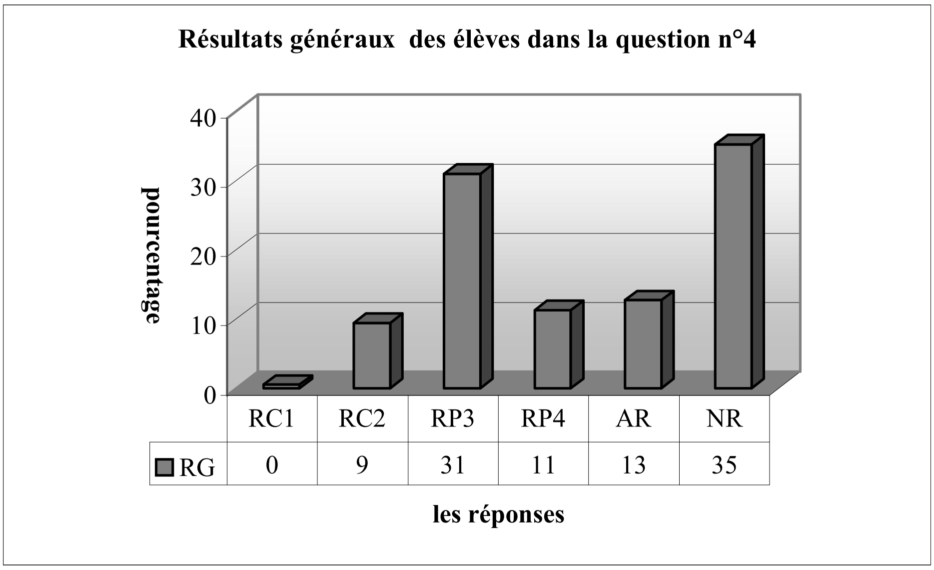


	RC1	RC2	RP3	RP4	AR	NR
LA	0	4	52	4	7	32
LS	0	0	67	0	10	23
LN	0	0	10	22	20	48
T	6	94	0	0	0	0

RC1 (Procédure 2) : réponse correcte, RC2 (Procédure P1): réponse correcte, RP3 : erreurs liées à l'identité remarquable, RP4: l'élève donne une valeur numérique à la fonction f ou f(x+1), AR :autres réponses, NR :non-réponses

Les résultats des élèves par lycée traduisent une grande stabilité, si l'on excepte un peu d'élèves du lycée Anatolien (4%), par rapport au taux de réussite à cette question. De plus le nombre des non-réponses est assez élevé dans tous les lycées (32% dans le lycée Anatolien, 23% le lycée Super et 48% le lycée Normal). Alors on peut dire que la question est complexe et peu familière aux élèves.
Par ailleurs, les erreurs liées à l'identité remarquable sont majoritairement commises par les élèves du lycée Anatolien et super (respectivement 52% et 67%). Comme la plupart n'abordent pas la question, le taux de ces erreurs n'atteint que 10% chez les élèves du lycée Normal. Donc il convient de dire que le manque d'une des connaissances déjà acquises fait un barrage aux élèves dans la résolution de la question. Le lycée Normal se démarque des autres par le taux plus élevé d'erreurs consistant à donner des valeurs numériques à la fonction (ou à x) ainsi 22% des élèves du lycée Normal commettent ces erreurs contre 4% des lycéens anatolien et un pourcentage nul pour les lycéens super.

3.4.5 Résultats généraux des élèves



RC1 (Procédure 2) : réponse correcte, RC2 (Procédure P1): réponse correcte, RP3 : erreurs liées à l'identité remarquable, RP4: l'élève donne une valeur numérique à la fonction f ou f(x+1), AR :autres réponses, NR :non-réponses

A part un élève de terminale, il n'y a aucun élève qui fournit une réponse correcte en factorisant la fonction. Il y a seulement 9% des élèves qui donnent la bonne réponse en suivant la procédure P1. Le taux de non-réponses à cette question est aussi très élevé : 35% des élèves ne traitent pas la question de plus il y en a 13% qui donnent d'autres réponses. Les erreurs relatives à l'identité remarquable sont plus fréquentes et commises par 31% des élèves tandis que 11% commettent l'erreur qui consiste à donner des valeurs numériques à la fonction.

3.4.6 Conclusion

Le très faible pourcentage de réponses correctes et le fort pourcentage de non-réponses indique que la question est complexe et peu familière aux élèves. De plus le fait qu'il y ait un seul élève de terminale qui utilise la procédure P2 montre que ce type de procédures est réservé à un très petit nombre des bons élèves. Le fait que le taux des erreurs portant sur l'identité remarquable soit très élevé et que la plupart des élèves n'arrivent pas à aborder la question à cause du manque des connaissances liées à cette identité remarquable (RP4+AR+NR, 59%) nous amène à conclure que les élèves (surtout les élèves de seconde) ont des difficultés (ou des lacunes) liées à leur enseignement précédent. Comme nous l'avons déjà vu lors de l'analyse des questionnaires proposés aux enseignants (cf. le chapitre IV), ceci est aussi confirmé par la grande majorité des enseignants qui disent que la plupart des erreurs des élèves sont liées à leurs connaissances antérieures.

3.5 Question n°5

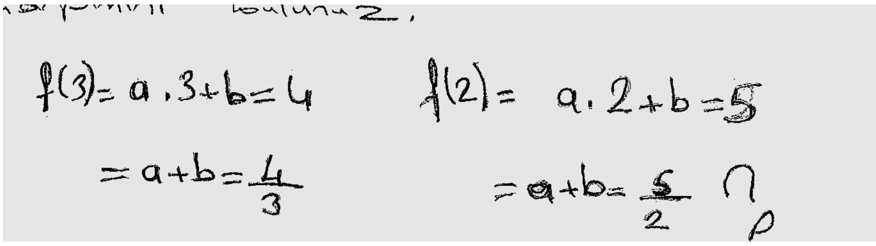
Cette question s'approche de la question précédente dans le sens où l'on demande aux élèves de faire appel aux connaissances déjà acquises. J'attendais donc que la plupart des élèves aient de grosses difficultés à résoudre le système linaire d'équations à deux variables.
Maintenant je fais la description des réponses catégorisées à partir des produits des élèves :

RC1 (Procédure P3) : réponse correcte.
L'élève fournit une bonne réponse en privilégiant la procédure P3. J'ai ici compté les élèves qui n'ont pas trouvé la produit de a et b.
RC2 (Procédure 1) : réponse correcte.
L'élève trouve la bonne réponse à partir de la procédure P1.
RP3 : l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction affine. Et il s'arrête là.

$f(x)=ax+b,\ \ y=ax+b,\ \ ax=y-b,\ \ x=\dfrac{y-b}{a}$ ………*(SE29)*

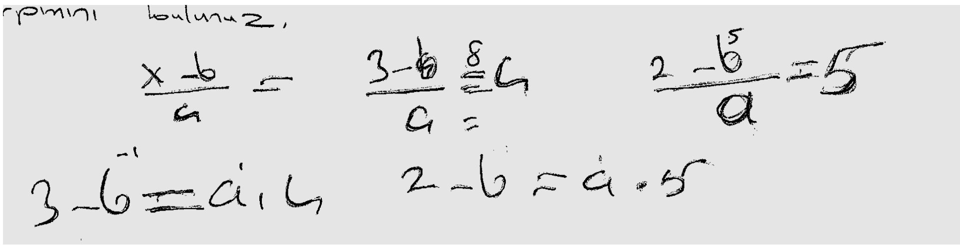
$f_x=ax+b,\ \ y=ax+b,\ \ ax=y-b,\ \ x=\dfrac{y-b}{a},\ \ f(x)=y,\ \ f(y)=x,\ \ f^{-1}y=-b$ ……….*(SE33)*

RP4 : l'élève néglige la fonction inverse.



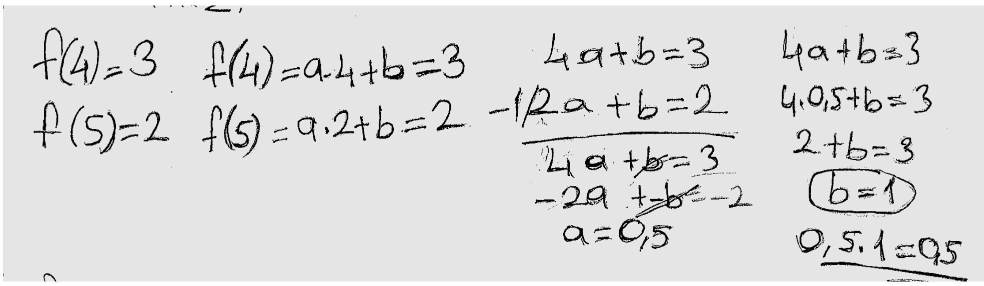
***(SC12)**,(SC20)*

RP5: il manque à l'élève la reconnaissance de la résolution du système linaire d'équations.
f(x)=a.4+b, f(4)=4.a+b, f(4)=
f(x)=a.5+b, f(5)=5.a+b, f(5)=5.a+b, 4a+b.5a+b=, 20a+2b…………(SC5),(SC7)



(SB20)

RP6: l'élève fait des erreurs lors de la résolution du système linaire d'équations.



(SA24)

f(x)=ax+b, $f^{-1}(3)=4$*,* $f^{-1}(2)=5$*,*
-4a+b=3
5a+b=2
-4a- $\cancel{b}$ *=-3*
5a+ $\cancel{b}$ *=2, a=1, 4.1+b=3, 4+b=3, b=3-4, b=-1, a.b=1.(-1)=-1……………(SA30)*

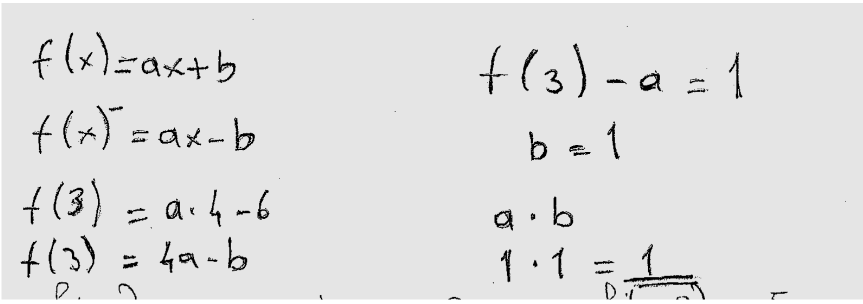
a+b=3
5 a+b=2
4a-b=-3
5a+4=2
a=1 $4a+b=3,\ 4.1+b=3,\ -4+b=3,\ b=7$…………….(SA21)

$f^{-1}(\underbrace{ax+b}_{3})=x,$ $f^{-1}(\underbrace{ax+b}_{2})=x$

ax+b=3, 4a+b=3,
ax+2=2, 5x+2=2, 5x=2-2, 5x=0, x=0
4x+b=3, 0+b=3, b=3, a.0+3=3, a=0, a.b=0.3=0………..(SA25)

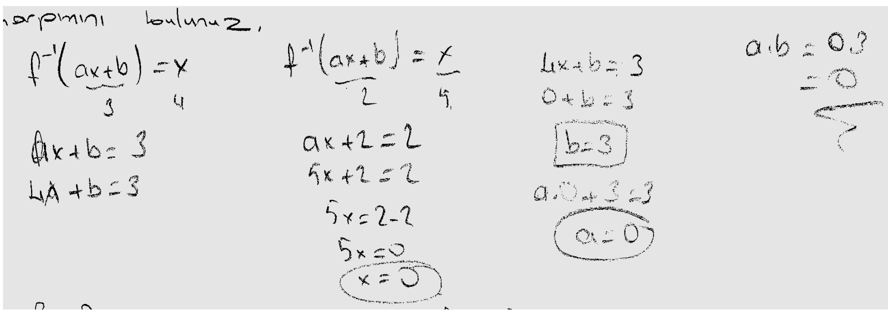
RP7: l' élève trouve l'inverse de la fonction affine en rendant le signe + en signe –dans l'expression ax+b. Ensuite il continue à résoudre algébriquement la question.

f(x)=ax +b, $f(x)^{-1}$*=ax-b, f(3)=4.a-b, f(3)=4a-b, f(3)=4a, =a=1, b=1, a.b=1.1=1*…..(SF6)



(SF2)

Autres réponses:



(SA25)

$f^{-1}(x)=\dfrac{x+b}{-a}=\dfrac{x-b}{a}$, $f^{-1}(2)=\dfrac{x-b}{a}=\dfrac{5-b}{a}$, $f^{-1}(3)=\dfrac{3-b}{a}$ ………..(SB1)

$f^{-1}(3)=4$ $f^{-1}(4)=3$, $f^{-1}(2)=5$ $f^{-1}(5)=2$, (a.b)=(5.4)=20………(SC22)

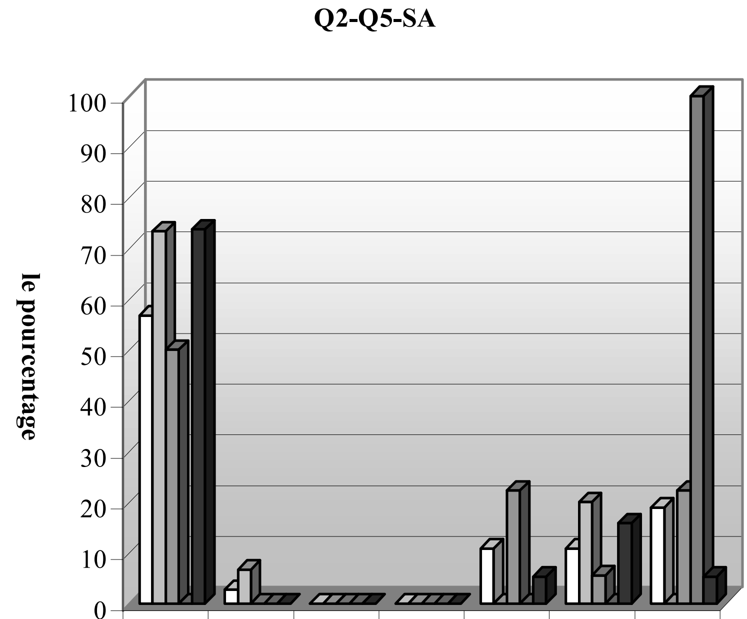
a.4+b=a.4+b=4.5=20, f=a.5+ $\cancel{b}$ *=a.5+* $\cancel{b}$ *=4.5=20*……….(SC18)

$f_2=2x+6$ $f'(3)=4$ $f'(2)=5$, 2.4+5, 20+5, 25………(SE12)

Non-réponses :

Voyons maintenant les résultats des élèves en compagnie des tableaux :

3.5.1 Lycée Anatolien

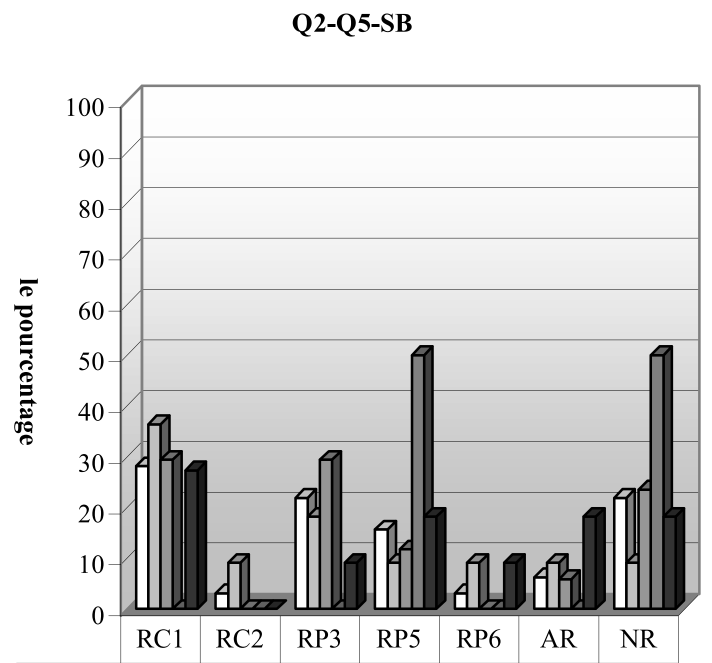


	RC1	RC2	RP3	RP4	RP6	AR	NR
SA	57	3	0	0	11	11	19
BON	73	7	0	0	0	20	0
MOY	50	0	0	0	22	6	22
MAU	0	0	0	0	0	0	100
DER	74	0	0	0	5	16	5

les réponses

RC1 (Procédure P3) : réponse correcte, RC2 (Procédure 1) : réponse correcte, RP3 : l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction affine. Et il s'arrête là, RP4 : l'élève néglige la fonction inverse, RP5: il manque à l'élève la reconnaissance de la résolution du système linaire d'équations, RP6: l'élève fait des erreurs lors de la résolution du système linaire d'équations, RP7: l' élève trouve l'inverse de la fonction affine en rendant le signe + en signe –dans l'expression ax+b. Ensuite il continue à résoudre algébriquement la question, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'en classe presque 60% des élèves fournissent une bonne réponse et il y a seulement 3% d'entre eux qui privilégient la procédure P1. Cependant une bonne partie des élèves n'abordent pas la question (19%) et le pourcentage d'autres réponses atteint 11%. Il est donc évident que la question n'est pas très loin d'être routinière aux élèves. Les erreurs liées à la résolution du système linaire d'équation sont commises par 11% des élèves.
Les résultats des élèves ne sont pas très étonnants suivant le niveau ainsi le taux de réussite atteint 80% chez les bons contre la moitié des moyens et un pourcentage nul chez les mauvais, il y a seulement 7% des bons qui fournissent une réponse correcte à partir de la procédure P1. Les erreurs relatives à la résolution du système linaire sont uniquement réservées aux moyens et 22% d'entre eux commettent ces erreurs. Par ailleurs, un même pourcentage des moyens ne donnent pas de réponse. Il est très intéressant de remarquer que ce taux monte à 100% chez les mauvais et descend à 0% chez les bons. Le pourcentage d'autres réponses est plus élevé chez les bons (20% contre 6% des moyens et un pourcentage nul chez les mauvais).



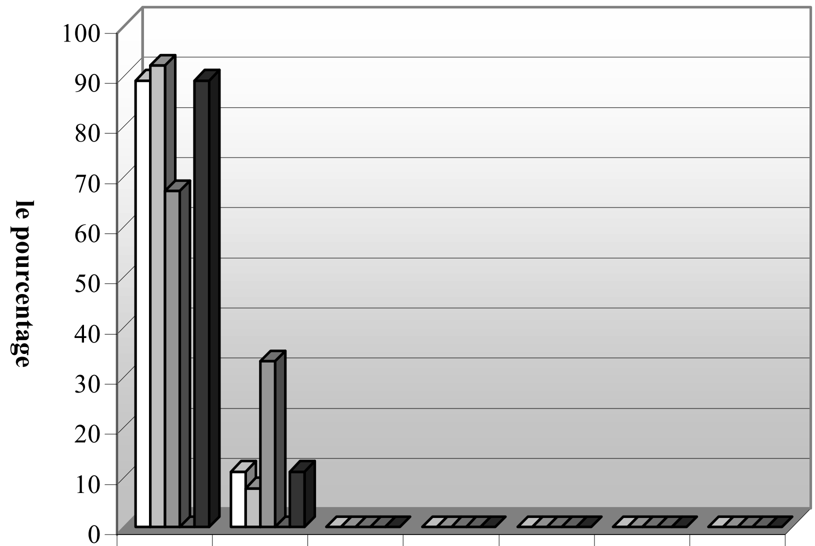
	RC1	RC2	RP3	RP5	RP6	AR	NR
SB	28	3	22	16	3	6	22
BON	36	9	18	9	9	9	9
MOY	29	0	29	12	0	6	24
MAU	0	0	0	50	0	0	50
DER	27	0	9	18	9	18	18

les réponses

RC1 (Procédure P3) : réponse correcte, RC2 (Procédure 1) : réponse correcte, RP3 : l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction affine. Et il s'arrête là, RP4 : l'élève néglige la fonction inverse, RP5: il manque à l'élève la reconnaissance de la résolution du système linaire d'équations, RP6: l'élève fait des erreurs lors de la résolution du système linaire d'équations, RP7: l' élève trouve l'inverse de la fonction affine en rendant le signe + en signe –dans l'expression ax+b. Ensuite il continue à résoudre algébriquement la question, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Remarquons qu'en classe de seconde B le taux de réussite est de 31%, ce qui annonce une grande chute de la réussite par rapport à la classe précédente ayant plus d'élèves fréquentés les dérsanés (60% contre 31%). La procédure P1 est aussi la procédure la moins préférée (3% contre 28%). Par ailleurs, le taux des élèves qui ne trouvent que l'inverse de la fonction affine est de 22% alors que 16% ne peuvent pas du tout faire fonctionner les connaissances liées à résoudre le système linaire d'équations. Un très peu nombre des élèves font des erreurs lors de la résolution de ce dernier (3%). La question n'est pas abordée par 22% des élèves tandis que le taux d'autres réponses est de 6%.
Comme le montre bien le tableau ci-dessus, le taux de réussite est d'environ 45% chez les bons et 29% les moyens et aucune réponse correcte de la part des mauvais. Il y a seulement 9% des bons qui fournissent une bonne réponse en utilisant la procédure P1. Par ailleurs, il est normal que les erreurs liées à la résolution du système linaire d'équations ne sont présentes que chez les bons avec un taux de 9%. Le nombre des élèves qui n'arrivent pas du tout à faire fonctionner les connaissances correspondant à la résolution du système linaire est plus important chez les mauvais ainsi la moitié d'entre eux font ces erreurs contre 12% des moyens et 9% des bons.
Près du tiers des moyens ne trouvent que l'inverse de la fonction affine contre 18% des bons. Ce type de réponses est totalement absentes chez les mauvais.

Q2-Q5-CT



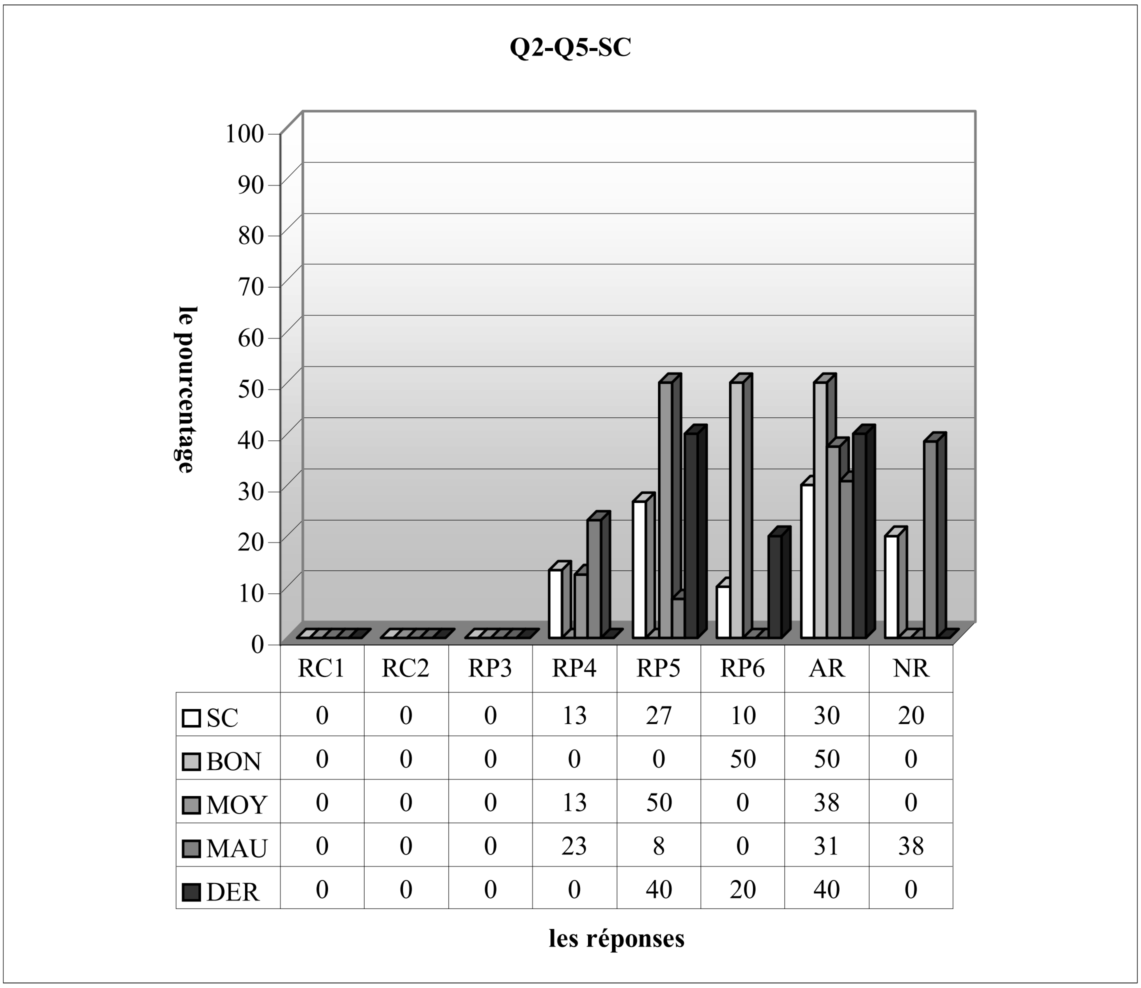
	RC1	RC2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
T	89	11	0	0	0	0	0
BON	92	8	0	0	0	0	0
MOY	67	33	0	0	0	0	0
MAU	0	0	0	0	0	0	0
DER	89	11	0	0	0	0	0

les réponses

RC1 (Procédure P3) : réponse correcte, RC2 (Procédure 1) : réponse correcte, RP3 : l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction affine. Et il s'arrête là, RP4 : l'élève néglige la fonction inverse, RP5: il manque à l'élève la reconnaissance de la résolution du système linaire d'équations, RP6: l'élève fait des erreurs lors de la résolution du système linaire d'équations, RP7: l' élève trouve l'inverse de la fonction affine en rendant le signe + en signe –dans l'expression ax+b. Ensuite il continue à résoudre algébriquement la question, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Quant à la classe de terminale, on constate que chaque élève fournit une bonne réponse, la plupart d'entre eux favorisent la procédure P3 (89%) ce qui indique que l'enjeu de l'enseignement de dérsané est majoritairement réalisé dans cette question.
Si on regarde les résultats par niveau, on remarque que le pourcentage des élèves qui privilégient la procédure P3 est plus élevé chez les bons ainsi 92% d'entre eux utilisent cette procédure contre 67% des moyens. On peut donc dire que les bons élèves peuvent plus facilement adaptés à l'enseignement de dérsané (aux techniques plus pratiques).

3.5.2 Lycée Super

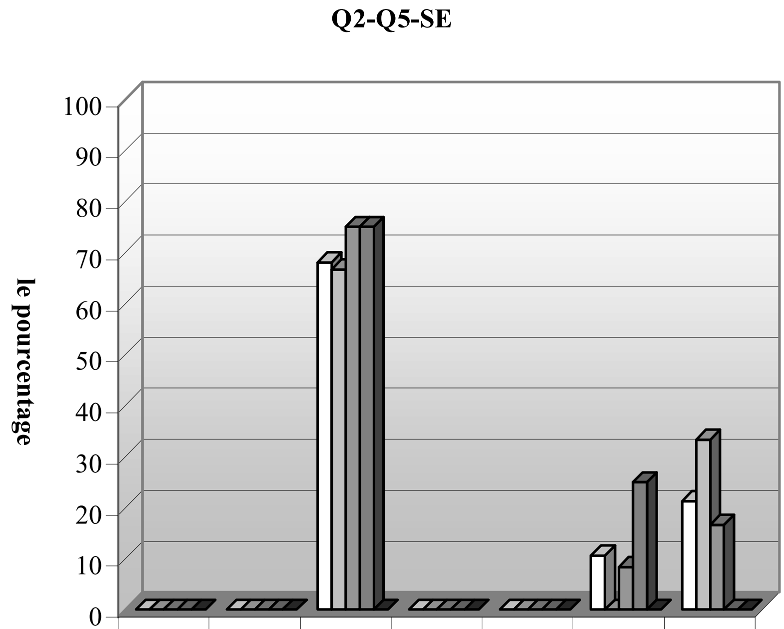


	RC1	RC2	RP3	RP4	RP5	RP6	AR	NR
SC	0	0	0	13	27	10	30	20
BON	0	0	0	0	0	50	50	0
MOY	0	0	0	13	50	0	38	0
MAU	0	0	0	23	8	0	31	38
DER	0	0	0	0	40	20	40	0

RC1 (Procédure P3) : réponse correcte, RC2 (Procédure 1) : réponse correcte, RP3 : l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction affine. Et il s'arrête là, RP4 : l'élève néglige la fonction inverse, RP5: il manque à l'élève la reconnaissance de la résolution du système linaire d'équations, RP6: l'élève fait des erreurs lors de la résolution du système linaire d'équations, RP7: l' élève trouve l'inverse de la fonction affine en rendant le signe + en signe –dans l'expression ax+b. Ensuite il continue à résoudre algébriquement la question, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Selon le tableau ci-dessus, tous les élèves ont échoué, 27% des élèves ne peuvent pas mettre en fonctionnement les connaissances liées à la résolution du système linaire alors que les erreurs lors de la résolution de ce dernier sont commises par 10% des élèves. 13% font l'erreur qui consiste à négliger l'inverse de la fonction.
Le pourcentage nul de réussite à cette question, le pourcentage fort de non-réponses (20%) et d'autres réponses (30%) montre que la question est trop complexe et très peu familière aux élèves.
Si on regroupe les réponses 5 et 6, le taux des erreurs qui portant sur la résolution du système linaire atteint 37% chez ces élèves. Une bonne partie des élèves ont donc échoué dans cette question à cause de l'une des connaissances déjà acquises.
Quant aux résultats par niveau, il n'est pas étonnant que les erreurs liées à la résolution du système linaire sont uniquement réservées aux bons élèves : la moitié d'entre eux commettent ces erreurs. Le nombre des élèves qui ne peuvent pas reconnaître la résolution du système linaire d'équations est plus élevé chez les moyens (50% contre 23% des mauvais). Ce type d'erreurs n'apparaît pas chez les bons.
Par ailleurs, on observe que le taux d'autres réponses est plus élevé chez les bons ainsi la moitié de ces derniers sont perplexe face à la question contre 38% des moyens et 31% des mauvais. Ce qui signifie que la question n'est pas a priori considérée si difficile par ces élèves.
Tandis que chaque élève répondent à la question chez les bons et moyens, elle n'est pas abordée par 38% des mauvais.

3.5.3 Lycée Normal

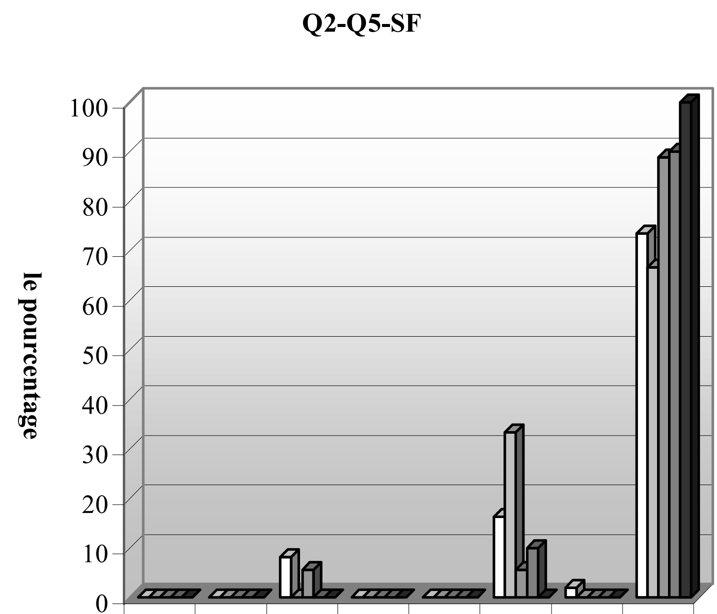


	RC1	RC2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SE	0	0	68	0	0	11	21
BON	0	0	67	0	0	0	33
MOY	0	0	75	0	0	8	17
MAU	0	0	75	0	0	25	0
DER	0	0	0	0	0	0	0

les réponses

RC1 (Procédure P3) : réponse correcte, RC2 (Procédure 1) : réponse correcte, RP3 : l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction affine. Et il s'arrête là, RP4 : l'élève néglige la fonction inverse, RP5: il manque à l'élève la reconnaissance de la résolution du système linaire d'équations, RP6: l'élève fait des erreurs lors de la résolution du système linaire d'équations, RP7: l' élève trouve l'inverse de la fonction affine en rendant le signe + en signe –dans l'expression ax+b. Ensuite il continue à résoudre algébriquement la question, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Comme dans le lycée précédent on ne rencontre ,ici, aucun élève qui fournit une réponse correcte, la plupart des élèves trouvent l'inverse de la fonction affine (68%), ensuite il s'arrête là. Le taux des élèves qui ne donnent pas de réponse est de 21% alors que 11% des réponses peuvent juste être catégorisées comme autres réponses.
Par ailleurs, les trois quarts des moyens et mauvais ne donnent que l'inverse de la fonction contre 67% des bons. Le taux de non-réponses est plus élevé chez les bons ainsi 33% d'entre eux ne donnent pas de réponse contre 17% des moyens et un pourcentage nul chez les mauvais.



	RC1	RC2	RP3	RP4	RP5	RP7	AR	NR
SF	0	0	8	0	0	16	2	73
BON	0	0	0	0	0	33	0	67
MOY	0	0	6	0	0	6	0	89
MAU	0	0	0	0	0	10	0	90
DER	0	0	0	0	0	0	0	100

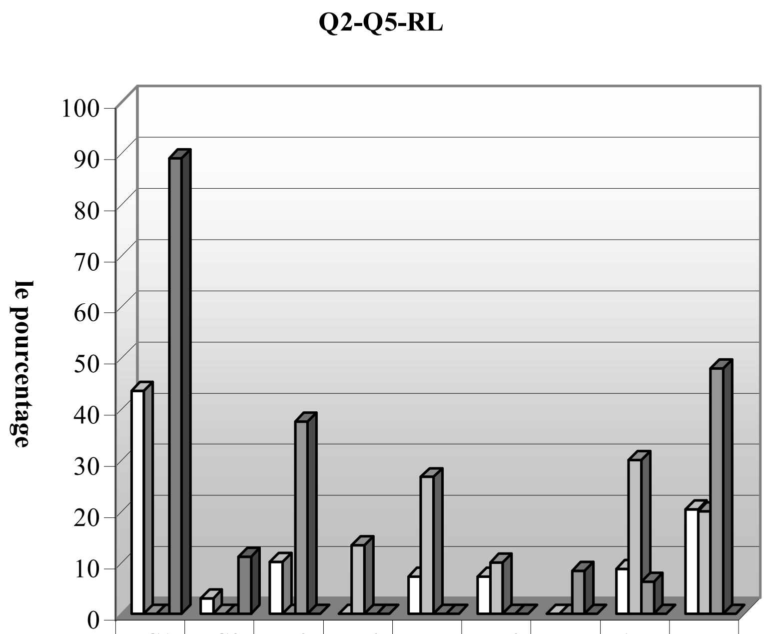
les réponses

RC1 (Procédure P3) : réponse correcte, RC2 (Procédure 1) : réponse correcte, RP3 : l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction affine. Et il s'arrête là, RP4 : l'élève néglige la fonction inverse, RP5: il manque à l'élève la reconnaissance de la résolution du système linaire d'équations, RP6: l'élève fait des erreurs lors de la résolution du système linaire d'équations, RP7: l' élève trouve l'inverse de la fonction affine en rendant le signe + en signe –dans l'expression ax+b. Ensuite il continue à résoudre algébriquement la question, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'en classe la grande majorité des élèves ne donnent pas de réponse (74%), 16% des élèves trouvent cependant l'inverse de la fonction affine en rendant le signe + en signe - alors que 8% trouvent seulement l'inverse de la fonction affine. Enfin on peut dire que la question est trop difficile pour ces élèves c'est pourquoi ils ne peuvent même pas arriver à la première étape de la résolution de la question.

Quant aux résultats par niveau, il n'est pas surprenant que les élèves qui traitent la question soit plus nombreux chez les bons : tous ces élèves essaient de trouver l'inverse de la fonction affine en rendant le signe + en signe - tandis que 10% des mauvais font la même chose. Ce taux atteint 6% chez les moyens. Par ailleurs, il y a seulement 6% des moyens qui ne trouvent que l'inverse de la fonction affine.

3.5.4 Résultats des élèves par lycée



	RC1	RC2	RP3	RP4	RP5	RP6	RP7	AR	NR
LA	43	3	10	0	7	7	0	9	20
LS	0	0	0	13	27	10	0	30	20
LN	0	0	38	0	0	0	8	6	48
T	89	11	0	0	0	0	0	0	0

les réponses

RC1 (Procédure P3) : réponse correcte, RC2 (Procédure 1) : réponse correcte, RP3 : l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction affine. Et il s'arrête là, RP4 : l'élève néglige la fonction inverse, RP5: il manque à l'élève la reconnaissance de la résolution du système linaire d'équations, RP6: l'élève fait des erreurs lors de la résolution du système linaire d'équations, RP7: l' élève trouve l'inverse de la fonction affine en rendant le signe + en signe –dans l'expression ax+b. Ensuite il continue à résoudre algébriquement la question, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'une grande différence entre le lycée Anatolien et les deux autres s'esquisse autour du taux de réussite ainsi près de la moitié des élèves du lycée Anatolien fournissent une bonne réponse tandis qu'il n'y a aucune réponse correcte de la part des élèves du lycée Super et normal.

Au niveau des non-réponses, on observe presque le même pourcentage dans les lycées anatolien et super (20% contre 20,2%). Ce taux est environ doublé chez les lycéens normal. On peut dire que la question est trop complexe et très peu familière à ces derniers.

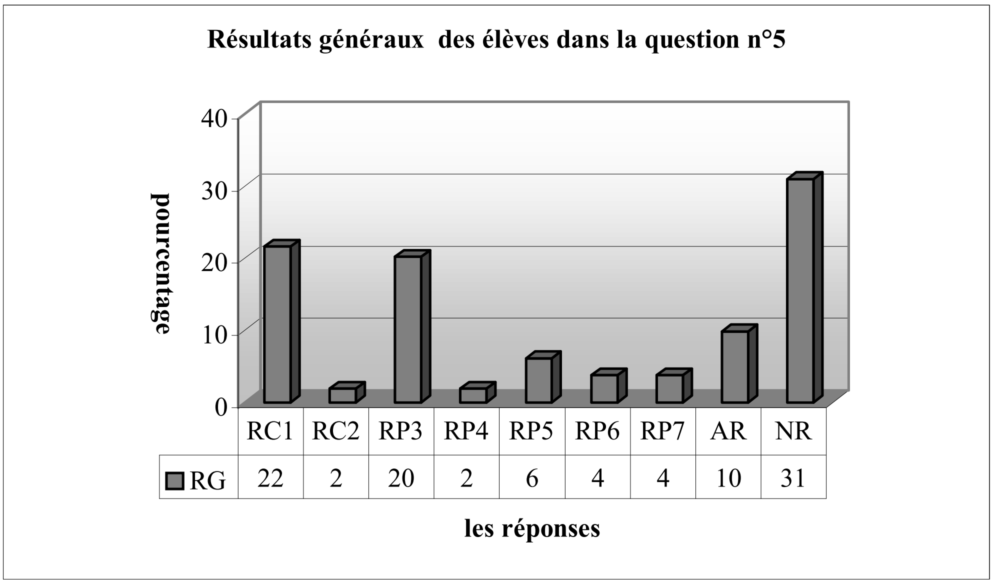
D'une part, la réussite modeste à cette question du lycée Anatolien et l'échec définitif des autres semblent traduire les effets positifs de l'enseignement du dérsané, d'autre part les élèves du lycée Anatolien n'ont pas davantage de difficultés venant du collège que ceux des autres.

De plus le fait que la réussite s'élève en faveur de la classe A ayant plus d'élèves fréquentés les dérsanés dans le lycée Anatolien renforce aussi le premier point de vue.

Quant à l'erreur la plus fréquente (ou la réponse), chez les lycées anatolien et normal l'erreur consistant à ne trouver que l'inverse de la fonction affine est majoritairement commise. Ainsi 38% des élèves du lycée Normal font cette erreur contre 10% des anatoliens. Elle est totalement absente chez les lycéens super. Alors que 27% des élèves du lycée Super donnent des réponses incomplètes où ils sont arrivés jusqu' à la résolution du système linaire d'équations contre 7% des élèves anatoliens et un pourcentage nul chez les lycéens normal.

Le pourcentage des élèves qui font des erreurs lors de la résolution du système linaire est respectivement de 7% et 10% dans les lycées anatolien et super. Comme il n'y a pas beaucoup d'élèves qui traitent la question dans le lycée Normal, ce type d'erreurs est absent.
Remarquons qu'il s'agit d'une légère différence entre le lycée Anatolien et normal pour le pourcentage d'autres réponses (7% contre 6%). Ce taux monte à 30% chez les lycéens super. On peut donc dire que la question n'est pas a priori considérée si difficile par ces derniers.

3.5.5 Résultats généraux des élèves



RC1 (Procédure P3) : réponse correcte, RC2 (Procédure 1) : réponse correcte, RP3 : l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction affine. Et il s'arrête là, RP4 : l'élève néglige la fonction inverse, RP5: il manque à l'élève la reconnaissance de la résolution du système linaire d'équations, RP6: l'élève fait des erreurs lors de la résolution du système linaire d'équations, RP7: l' élève trouve l'inverse de la fonction affine en rendant le signe + en signe –dans l'expression ax+b. Ensuite il continue à résoudre algébriquement la question, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Ce tableau montre que le taux de réussite à cette question est de seulement 24%. Près du tiers des élèves ne donnent pas de réponse tandis que le taux d'autres réponses est de 10%. En ce qui concerne les erreurs commises par les élèves, il y a 20% des élèves qui ne trouvent que l'inverse de la fonction affine mais ils n'arrivent pas cependant à passer par delà. A cause du manque des connaissances liées à la résolution du système linéaire d'équations, 6% des élèves n'arrivent pas à résoudre la question alors que 4% font des erreurs lors de la résolution du système linéaire d'équations. Par ailleurs, le taux des élèves qui trouvent l'inverse de la fonction affine en transformant le signe + en signe –dans l'expression ax+b est de 4%. L'erreur la moins fréquente est celle qui consiste à enlever simplement l'inverse de la fonction (RP4) avec un taux de 2%.

3.5.6 Conclusion

Comme dans la plupart des questions de ce questionnaire le taux de non-réponses est très élevé et celui de réussite n'est pas très satisfaisant. Il faut donc souligner que la question est difficile et peu familière aux élèves. Une bonne partie des élèves échouent à cause du manque des connaissances ou des erreurs liées à la résolution du système linéaire d'équations (RP3+RP5+RP6, 30%). Cela indique encore une fois que le grand problème est de ne pas pouvoir mettre en fonctionnement des connaissances antérieures.
Le fait que dans les lycées super et normal il n'y a aucun élève qui donne la bonne réponse et que près de la moitié des élèves anatolien et la totalité des élèves de terminale fournissent une réponse correcte montre que la question est plus familière aux élèves du lycée Anatolien, que l'enseignement très proche du concours (ou l'enseignement du dérsané) est très important pour la préparation au concours et qu'en d'autres termes le seul enseignement du lycée est très loin de préparer des élèves à ce concours.

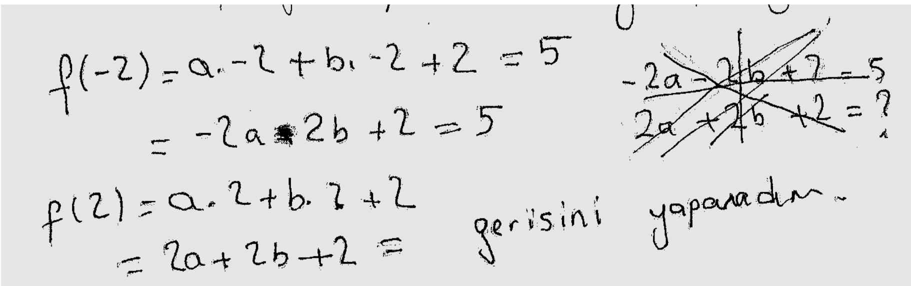
3.6 Question n°6

A niveau les élèves sont face à une question qui n'est pas isolée. On leur demande de mobiliser à la fois des connaissances portant sur la notion de fonction et celles qui concernent la résolution d'équations.
Par ailleurs, cette question était bien destinée à vérifier si les élèves saisissaient le rapport entre l'image de 2 et –2. Je pensais cependant que saisir ce rapport serait plutôt réservée à un peu nombre des élèves.

Voici la présentation des réponses catégorisées :
RC : réponse correcte.
RP1 : réponses incomplètes.
L'élève met 2 et –2 dans la fonction f. Ensuite il s'arrête là.

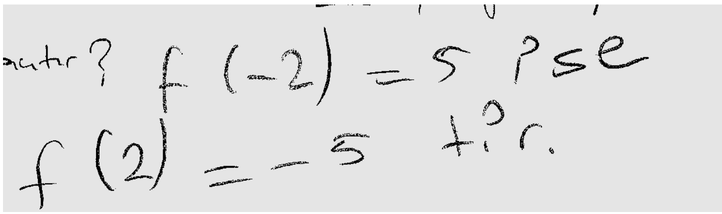
f(-2)=a-2+b-2+2, -2a+-2b+2=5, -2a+-2b=3, $\frac{-2(a+b)}{-2}=\frac{-3}{2}$, a+b= $\frac{-3}{2}$,

f(2)=2a+2b+2, 2a+2b+2=0, 2a+2b=-2, $\frac{2}{2}(a+b)=\frac{-2}{2}$ *………(SA43)*


f(-2) = a.-2 + b.-2 + 2 = 5
= -2a * 2b + 2 = 5
f(2) = a.2 + b.2 + 2
= 2a + 2b + 2 =
gerisini yapamadım.
~~-2a - 2b + 2 = 5~~
~~2a + 2b + 2 = ?~~

...je n'ai pas pu faire le reste (SB30)

RP2 : l'élève pense que si l'image de –2 sur la fonction f est de 5, celui de 2 doit donc être de –5.


f (-2) = 5 ise
f (2) = -5 tir.

***(SC28)**,(SC29)*

f(2)=-5……..(SF42)
f(x)=ax+bx+2, f(-2)=5 donc f(2)=-5, 5x+5x+2, -12x……..(SC21)
RP3: l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction f.

y=ax+b, y=x(a+b)+2, y-2=x(a+b), $x=\frac{y-2}{a+b}$ *………(SE29)*

RP4 : erreurs de calcul.

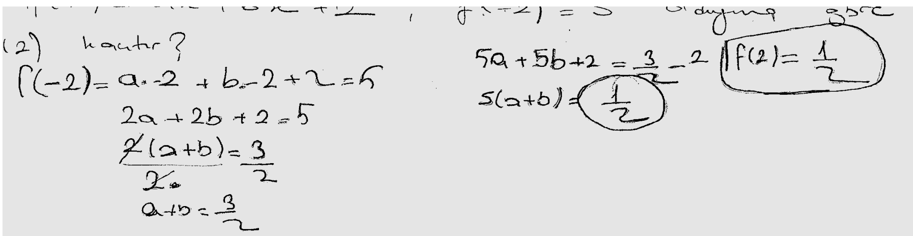
f(-2)=a-2+b-2+2=5, =-2a+-2b=3, =-2(a+b)=3, a+b= $\frac{-3}{2}$, *f(2)=2.* $\frac{-3}{2}$ *+2,*

f(2)=14………(SB15)

f(-2)=-2a+-2b+2=5, -2a+-2b=3, $\frac{-\cancel{2}(a+b)}{-\cancel{2}}=\frac{3}{-2}$, *a+b=* $\frac{-2}{3}$, *f(2)=2a+2b+2=,*

f(2)=2………(SA19)

RP5: l'élève trouve d'abord f(-2)=5. Ensuite f(5)=-2.

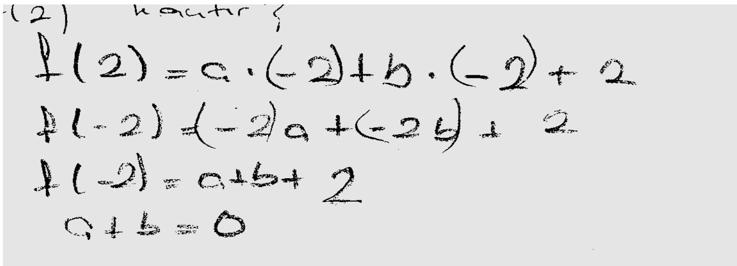

(2) kaçtır?
f(-2) = a.-2 + b.-2 + 2 = 5
2a + 2b + 2 = 5
$\frac{\cancel{2}(a+b)}{\cancel{2}} = \frac{3}{2}$
a+b = 3/2
5a + 5b + 2 = 3/2 - 2
5(a+b) = 1/2
$\boxed{f(2) = \frac{1}{2}}$

(SA41)

f(5)=5a+5b+2=2, -5a+5b=0, f(-2)=-2a+-2b+2, =2a+(-2b)=3,
f(5)=2…………….(SA40),(SA36)
f(5)=a(-2)+b(-2)+2…………(SB12)
f(-2)=5   a.2+b.2+2, f(5)=2   f(x)=2a+b+4…………..(SB40)

RP6: erreurs algébriques.

L'élève fait des erreurs algébriques dans son traitement. C'est-à-dire qu'il ne respecte pas de propriétés algébriques.

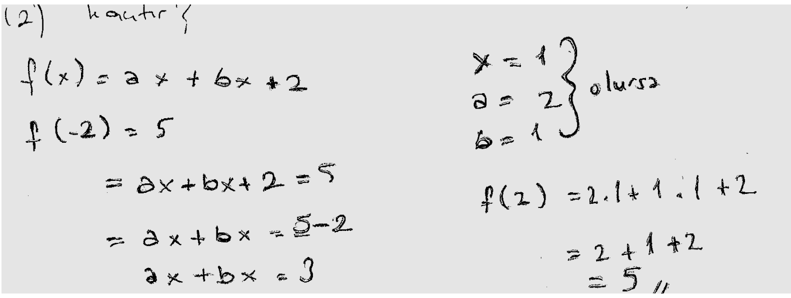

(2) kaatır ;
f(2) = a·(-2)+b·(-2)+ 2
f(-2) (-2a+(-2b) + 2
f(-2) = a+b+ 2
a+b = 0

(SF8)

f(-2)=a-2+b-2+2, f(-2)= 2a+2b+2, f(-2)=a+b+2, a+b=0………..(SF9)
f(2)=a.2+b.2+2=2a+2b+2, =4a.b+2, =4ab………….(SF41)
f(x)=ax+bx+2, a-2+b-2 + 2 =5,   a+b=5+2,   a+b=7, f(-2)=5…………(SC12),(SC20)
f(-2)=5, ax+bx+2, -2a+-2b+2, 4ab+2, f(2)=6ab………(SC2)

Autres réponses:

f(-2)=a(-2)+b(-2)+2=5, f(-2)=ab+4+2=5, ab+6=5, ab=6-5......(SA17)
f(-2)=a-2+b-2+2,   5=-2a+-2b+2, 2a+-2b+2, -4b=4   b=-1, -4a=4   a=1,
f(-2)=1.2+1.2+2, =2+2+2= 6………(SB6)


(2) kaatır ;
f(x) = ax + bx + 2
f(-2) = 5
= ax+bx+2 = 5
= ax + bx = 5-2
ax + bx = 3
x = 1
a = 2
b = 1
olursa
f(2) = 2.1+1.1+2
= 2+1+2
= 5

***(SC9)**,(SC40)*

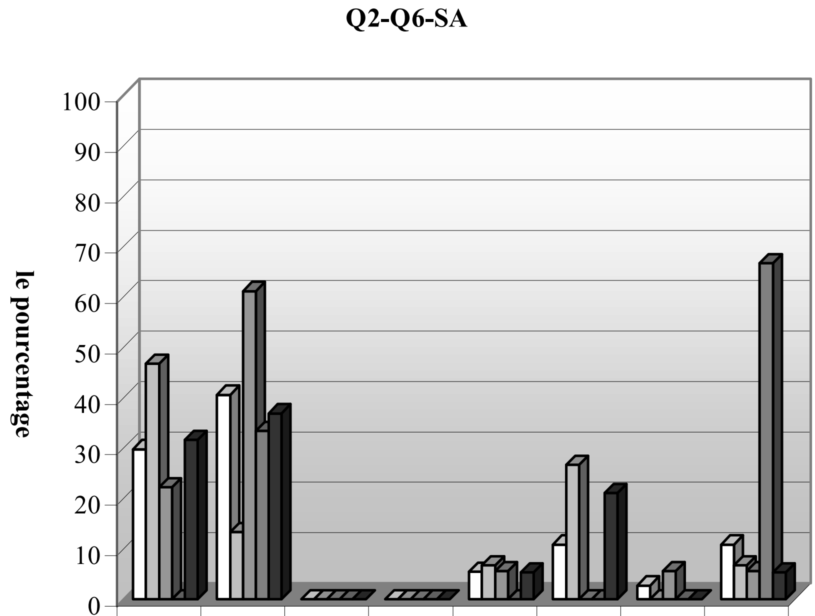
$\frac{5}{2+1}=\frac{5}{2x1-2}=\frac{10}{2x+1-3}$, $\frac{7}{3}$ *………(SE19),(SE12)*

f(x)=a+b+2,   =1+2+1,   =3…………(SF32)

Non-réponses:

Les résultats par lycée sont les suites ;

3.6.1 Lycée Anatolien



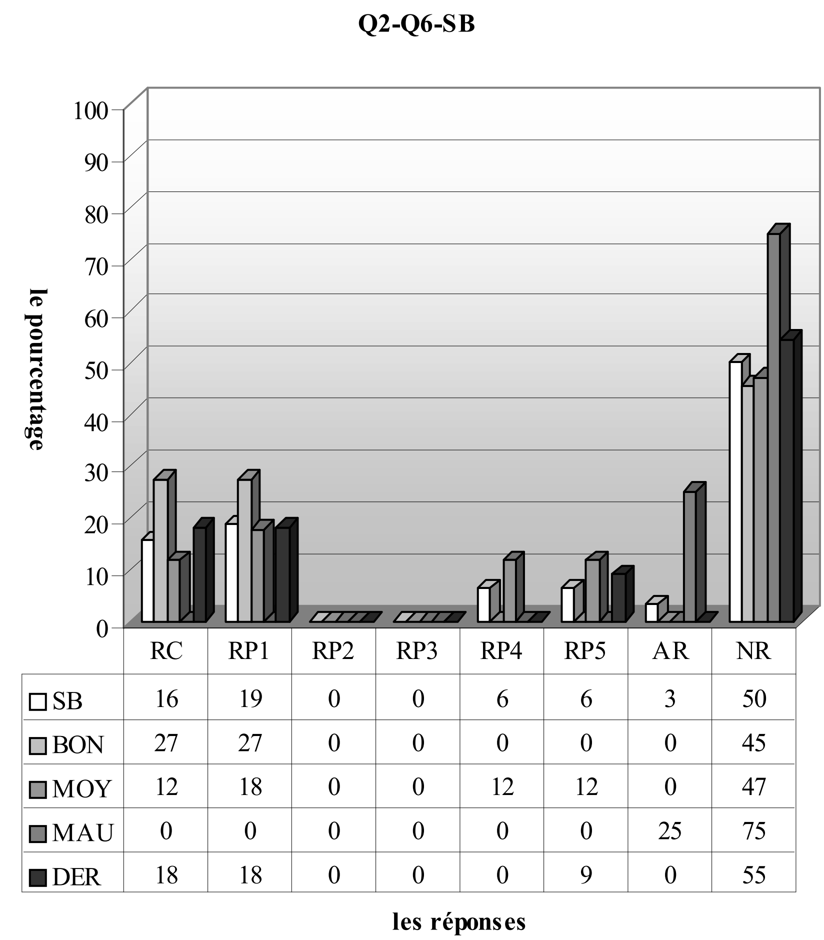
	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SA	30	41	0	0	5	11	3	11
BON	47	13	0	0	7	27	0	7
MOY	22	61	0	0	6	0	6	6
MAU	0	33	0	0	0	0	0	67
DER	32	37	0	0	5	21	0	5

les réponses

RC : réponse correcte, RP1 : réponses incomplètes, RP2 : l'élève pense que si l'image de –2 sur la fonction f est de 5, celui de 2 doit donc être de –5, RP3: l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction f, RP4 : erreurs de calcul, RP5: l'élève trouve d'abord f(-2)=5. Ensuite f(5)=-2, RP6: erreurs algébriques, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, en classe, 30% des élèves fournissent une réponse correcte. Conformément à mes attentes une bonne partie des élèves ne peuvent pas saisir le rapport entre l'image de 2 et –2 et ils fournissent donc une réponse incomplète (41%). Dans une démarche correcte, 5% des élèves font des erreurs de calcul alors que le pourcentage des élèves qui inventent f(5)=-2 est de 11%. La question n'est cependant pas abordée par 11%.

En ce qui concerne les résultats des élèves par niveau, on constate que le taux de réussite est plus élevé chez les bons ainsi près de la moitié d'entre eux donnent la bonne réponse contre 22% des moyens et aucune réponse correcte de la part des mauvais. Par ailleurs, les réponses incomplètes sont plus nombreuses chez les moyens. Alors 61% d'entre eux donnent ce type de réponses contre 13% des bons et un tiers des mauvais. Une légère différence entre les bons et moyens s'observe par le taux d'erreurs de calcul : ces dernières sont commises par 7% des bons contre 6% des moyens et un pourcentage nul chez les mauvais. L'erreur consistant à trouver d'abord f(-2)=5 ensuite f(5)=-2 n'est présente que chez les bons avec un taux de 27%. Il n'est pas étonnant que le taux de non-réponses soit plus élevé chez les mauvais ainsi les deux tiers d'entre eux ne donnent pas de réponse contre 7% des bons et 6% des moyens.



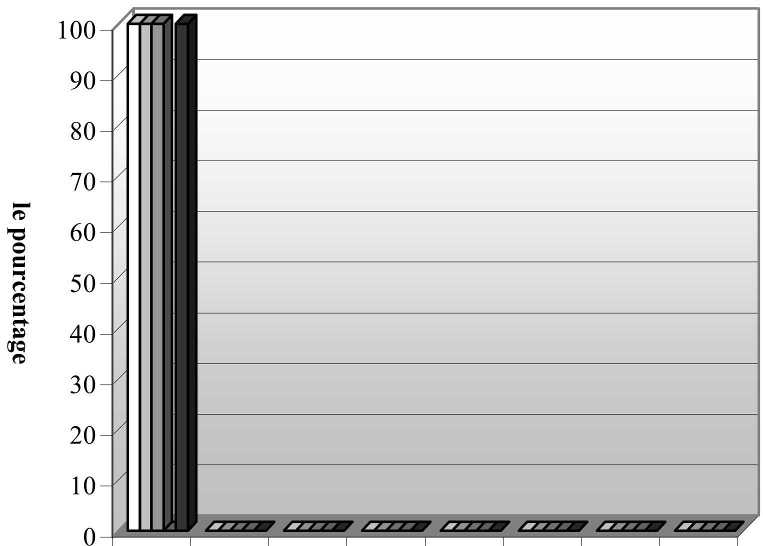
	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SB	16	19	0	0	6	6	3	50
BON	27	27	0	0	0	0	0	45
MOY	12	18	0	0	12	12	0	47
MAU	0	0	0	0	0	0	25	75
DER	18	18	0	0	0	9	0	55

RC : réponse correcte, RP1 : réponses incomplètes, RP2 : l'élève pense que si l'image de –2 sur la fonction f est de 5, celui de 2 doit donc être de –5, RP3: l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction f, RP4 : erreurs de calcul, RP5: l'élève trouve d'abord f(-2)=5. Ensuite f(5)=-2, RP6: erreurs algébriques, AR :autres réponses, NR :non-réponses

En ce qui concerne la deuxième classe de seconde de ce lycée, on remarque que le taux de réussite descend à 16% et la moitié des élèves n'abordent pas la question. Le pourcentage des élèves qui ne peuvent pas interpréter le rapport entre l'image de 2 et –2 est de 19%. Lesquels obtiennent donc des réponses incomplètes. Il s'agit cependant d'un même pourcentage pour les erreurs de calcul et les élèves qui inventent f(5)=-2.

En regardant les résultats des élèves par niveau, on observe que 27% des bons donnent la bonne réponse contre 12% des moyens et aucune réponse correcte chez les mauvais. Les réponses incomplètes sont aussi nombreuses chez les bons ainsi 27% d'entre eux ne peuvent pas terminer la résolution de la question contre 18% des moyens. Par ailleurs, les erreurs de calcul et celles qui consistent à trouver d'abord f(-2)=5 et ensuite f(5)=-2 ne s'observent que chez les moyens avec un même taux (12%).

Q2-Q6-CT



	RC1	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
T	100	0	0	0	0	0	0	0
BON	100	0	0	0	0	0	0	0
MOY	100	0	0	0	0	0	0	0
MAU	0	0	0	0	0	0	0	0
DER	100	0	0	0	0	0	0	0

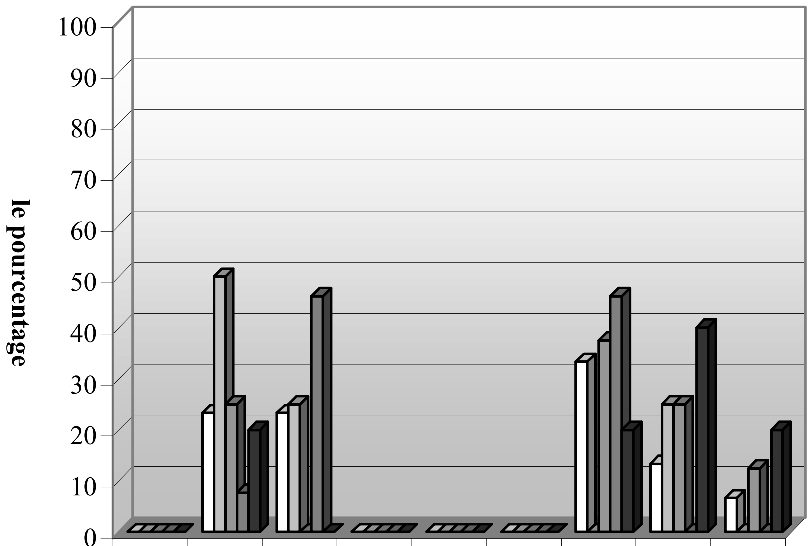
les réponses

RC : réponse correcte, RP1 : réponses incomplètes, RP2 : l'élève pense que si l'image de –2 sur la fonction f est de 5, celui de 2 doit donc être de –5, RP3: l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction f, RP4 : erreurs de calcul, RP5: l'élève trouve d'abord f(-2)=5. Ensuite f(5)=-2, RP6: erreurs algébriques, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, il n'y a aucun élève qui a échoué.

3.6.2 Lycée Super

Q2-Q6-SC



	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	RP6	AR	NR
SC	0	23	23	0	0	0	33	13	7
BON	0	50	25	0	0	0	0	25	0
MOY	0	25	0	0	0	0	38	25	13
MAU	0	8	46	0	0	0	46	0	0
DER	0	20	0	0	0	0	20	40	20

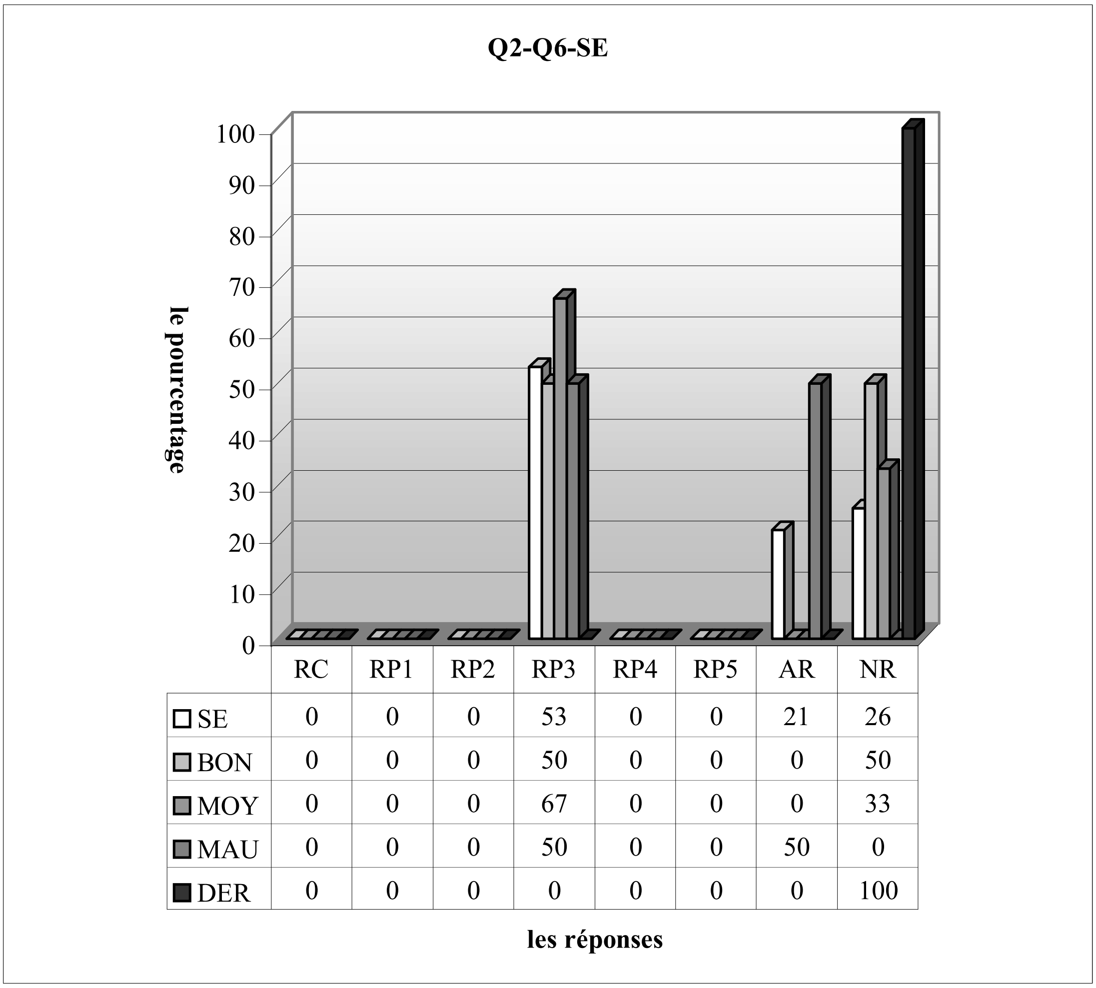
les réponses

RC : réponse correcte, RP1 : réponses incomplètes, RP2 : l'élève pense que si l'image de –2 sur la fonction f est de 5, celui de 2 doit donc être de –5, RP3: l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction f, RP4 : erreurs de calcul, RP5: l'élève trouve d'abord f(-2)=5. Ensuite f(5)=-2, RP6: erreurs algébriques, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'aucun élève ne peut fournir une bonne réponse en classe. Une grande majorité des élèves commettent des erreurs algébriques (33%) ce qui indique que ces élèves ont beaucoup de problèmes concernant l'enseignement précédent. Par ailleurs, une nonne partie des élèves ne peuvent pas saisir le rapport entre l'image de 2 et –2 (23%), ce pourcentage est valable pour les élèves qui pensent que si f(-2)=5 donc f(2)=-5. 7% des élèves ne donnent pas de réponse tandis que le pourcentage d'autres réponses est de 13%.

Comme la réponse RP1 est plus proche de la bonne réponse parmi les résultats de ces élèves, il est tout à fait normal de constater que son taux est plus élevé chez les bons ainsi la moitié de ces derniers donnent des réponses incomplètes contre un quart des moyens et 8% des mauvais. Les élèves qui pensent que si l'image de –2 est de 5 donc celui de 2 doit être de –5 sont plus nombreux chez les mauvais et près de la moitié d'entre eux font cette erreur contre un quart des bons alors qu'elle est totalement absente chez les moyens. Par ailleurs, 46% des mauvais commettent des erreurs algébriques contre 38% des moyens. Ce type d'erreurs n'apparaît pas chez les bons.

3.6.3 Lycée Normal



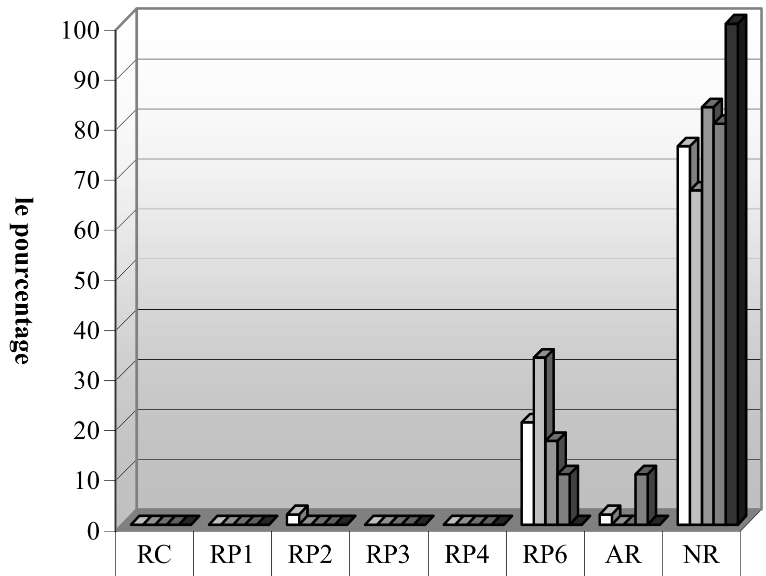
	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SE	0	0	0	53	0	0	21	26
BON	0	0	0	50	0	0	0	50
MOY	0	0	0	67	0	0	0	33
MAU	0	0	0	50	0	0	50	0
DER	0	0	0	0	0	0	0	100

RC : réponse correcte, RP1 : réponses incomplètes, RP2 : l'élève pense que si l'image de –2 sur la fonction f est de 5, celui de 2 doit donc être de –5, RP3: l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction f, RP4 : erreurs de calcul, RP5: l'élève trouve d'abord f(-2)=5. Ensuite f(5)=-2, RP6: erreurs algébriques, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Constatons que plus de la moitié des élèves trouvent l'inverse de la fonction même si ce n'était pas nécessaire de résoudre la question. Il n'y a cependant aucun élève qui peut fournir une réponse correcte. Le pourcentage d'autres réponses et non-réponses atteint respectivement 21% et 26% chez ces élèves. A partir de ces résultats, il convient de dire que la question est très complexe et peu familière aux élèves.

Si on regarde les résultats par niveau, on voit que le taux des élèves qui trouvent l'inverse de la fonction est très élevé chez tous les élèves ainsi 67% des moyens donnent l'inverse de la fonction comme réponse contre la moitié des bons et des mauvais tandis que les autres réponses sont absentes chez les bons et moyens.

Q2-Q6-SF



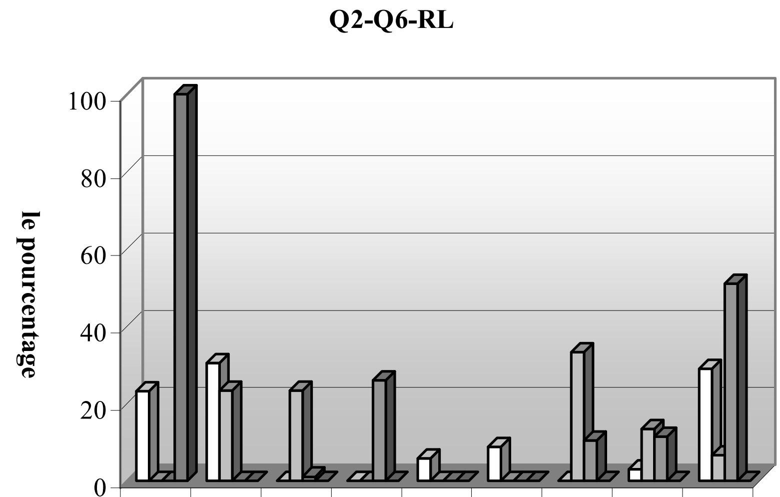
	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP6	AR	NR
SF	0	0	2	0	0	20	2	76
BON	0	0	0	0	0	33	0	67
MOY	0	0	0	0	0	17	0	83
MAU	0	0	0	0	0	10	10	80
DER	0	0	0	0	0	0	0	100

les réponses

RC : réponse correcte, RP1 : réponses incomplètes, RP2 : l'élève pense que si l'image de –2 sur la fonction f est de 5, celui de 2 doit donc être de –5, RP3: l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction f, RP4 : erreurs de calcul, RP5: l'élève trouve d'abord f(-2)=5. Ensuite f(5)=-2, RP6: erreurs algébriques, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Dans la classe de seconde F, il n'y a aucun élève qui donne la bonne réponse comme dans la classe précédente. De plus la question n'est pas abordée par une grande majorité des élèves (76%). Donc elle est très complexe et peu familière aux élèves de cette classe. Les erreurs algébriques sont cependant commises par 20% des élèves alors qu'un faible pourcentage s'observe par l'erreur consistant à considérer que si f(-2)=5 donc f(2)=-5 (2%).

3.6.4 Résultats des élèves par lycée



	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	RP6	AR	NR
LA	23	30	0	0	6	9	0	3	29
LS	0	23	23	0	0	0	33	13	7
LN	0	0	1	26	0	0	10	11	51
T	100	0	0	0	0	0	0	0	0

les réponses

RC : réponse correcte, RP1 : réponses incomplètes, RP2 : l'élève pense que si l'image de –2 sur la fonction f est de 5, celui de 2 doit donc être de –5, RP3: l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction f, RP4 : erreurs de calcul, RP5: l'élève trouve d'abord f(-2)=5. Ensuite f(5)=-2, RP6: erreurs algébriques, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Remarquons que le lycée Anatolien se distingue des autres par le taux plus élevé de réussite à cette question ainsi 23% des élèves du lycée Anatolien fournissent une bonne réponse contre un pourcentage nul dans les deux autres. Par ailleurs, la grande majorité des élèves anatolien ne peuvent pas saisir le rapport entre l'image de 2 et-2 et ils obtiennent des réponses incomplètes (31%). Ce taux descend à 23% chez les lycéens super ce qui confirme mes attentes. Comme il n'y a pas beaucoup d'élèves qui traitent la question dans le lycée Normal, on observe un pourcentage nul.

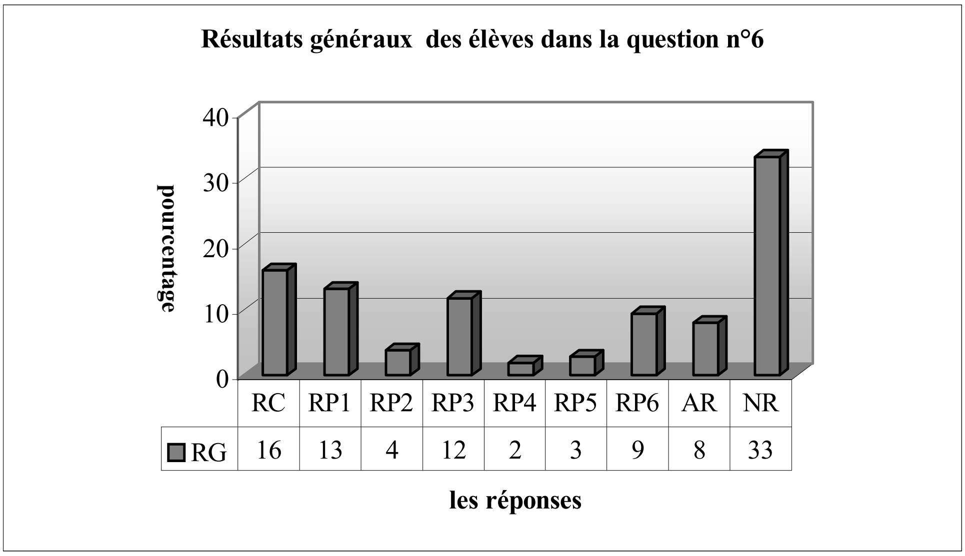
Les erreurs consistant à supposer que si f(-2)=5 donc f(2)=-5 sont commises par 23% des élèves du lycée Super par contre il s'agit d'un très faible pourcentage pour le lycée Normal et un pourcentage nul le lycée Anatolien.

Par ailleurs, les réponses concernant seulement le traitement de l'inverse de la fonction sont uniquement réservées aux élèves du lycée Normal avec un taux de 26%. Presque 6% des élèves du lycée Anatolien font des erreurs de calcul et le pourcentage des élèves qui trouvent d'abord f(-2)=5 ensuite f(5)=-2 est de 9% dans le même lycée. Ce type d'erreurs ne s'observe pas dans les autres. Par contre les erreurs algébriques sont commises par 33% des élèves du lycée Super et 10% des élèves du lycée Normal tandis qu'aucun élève anatolien ne fait ce type d'erreurs.

Une légère différence entre le lycée Normal et super se constate par le taux d'autres réponses ainsi 13% des lycéens super deviennent perplexes face à la question contre 11% des lycéens normal. Cependant il y a seulement 3% d'autres réponses dans le lycée Anatolien.

Le lycée Normal se distingue des autres par le pourcentage important de non-réponses : plus de la moitié des élèves de ce lycée ne donnent pas de réponse contre 29% des anatoliens et 7% des lycéens super.

3.6.5 Résultats généraux des élèves



RC : réponse correcte, RP1 : réponses incomplètes, RP2 : l'élève pense que si l'image de –2 sur la fonction f est de 5, celui de 2 doit donc être de –5, RP3: l'élève ne trouve que l'inverse de la fonction f, RP4 : erreurs de calcul, RP5: l'élève trouve d'abord f(-2)=5. Ensuite f(5)=-2, RP6: erreurs algébriques, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Selon le tableau ci-dessus, le taux des élèves qui fournissent une réponse correcte est de seulement 16%. De plus un tiers des élèves ne donnent pas de réponse. 13% des élèves n'arrivent pas à terminer la résolution de la question et donnent des réponses incomplètes. Il s'agit presque du même pourcentage pour les élèves qui ne trouvent que, même si elle n'est pas en jeu, l'inverse de la fonction f. Par ailleurs, les erreurs algébriques sont commises par 9% des élèves. Les erreurs de calcul sont les erreurs les plus marginales il y a ainsi 2% des élèves qui font ce type d'erreurs. Le taux des élèves qui pensent que si l'image de –2 sur la fonction f est de 5, celui de 2 doit donc être de –5 est de 4% alors que 3% trouvent d'abord f(-2)=5 et ensuite f(5)=-2.

3.5.6 Conclusion

Dans cette question nous sommes à nouveau face aux mêmes résultats. Il s'agit ainsi d'un faible pourcentage de réussite et d'un important pourcentage de non-réponses. Un bon nombre des élèves ne peuvent pas connaître la relation entre l'image de 2 et celui de –2 qui est au cœur de la résolution de la question ils donnent ainsi des réponses incomplètes. Par ailleurs, le fait qu'une bonne partie des élèves trouvent l'inverse de la fonction qui n'est pas en jeu, nous conduit à penser que l'abus de ce sujet soit par les manuels soit par les enseignants amène les élèves à trouver, même si l'on leur le demande pas l'inverse des fonctions.

Comme dans la question précédente, il n'y a aucun élève qui fournit une réponse correcte dans les lycées super et normal. Il s'agit, ici, donc de la même conclusion que dans la question précédente.

3.7 Question n°7

La question était une vérification du fait que la fonction constante ne concerne pas de variable.
A partir des réponses des élèves, j'ai précisé neuf catégories des réponses. Maintenant je les présente en donnant des exemples significatifs :

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte.
L'élève trouve la bonne réponse en privilégiant la procédure P1.
RC2 (Procédure 2): réponse correcte.
L'élève fournit une bonne réponse à partir de la procédure P2.
RP3 : l'élève pense que le coefficient de x doit être de 1. Ensuite il égalise a+2 à 1.

$f(x) = \overset{1}{(a+2)}x + 8$
e, a kaçtır ?
$a+2 = 1$
$a = -1$

(SA42)

RP4 : l'élève essai de ne résoudre la question que dans le cadre algébrique.

Tanım kümesinin her elemanının görüntüsü aynı fonksiyona sabit fonksiyon olarak adlandırılır.
$2x+ax+8 = x$
$2x\ 8 = -2x-ax+x$

Si l'image de chaque élément de l'ensemble de définition par f est identique, f est appelée fonction constante (SC25).
f(x)=(a+2)(x+8)……….(SE18)
x=(x+2)x+8, x=3xx +8x+8+16, x=3xx+8x+8+16, x=3xx+8x+16, x=11xx+16,

2x=16-11, $\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=\frac{5}{2}$*,* $x=\frac{5}{2}$ *……….(SF7)*

RP5 : l'élève égalise la fonction à zéro.

e, a kaçtır ?
$a+2 = 0$ $\qquad x+8 = 0$
$a = -2$ $\qquad x = -8$

(SC6)

xa+2x+8=0, 3x+a+8=0, a=3x-8…………..(SC40),(SC8)
RP6: l'élève essai de trouver l'inverse de la fonction.

y=(a+2)x+8, y-8=(a+2)x, $x=\frac{y-8}{a+2}$ *……….(SE29)*

RP7 : l'élève égalise a+2 à 8.

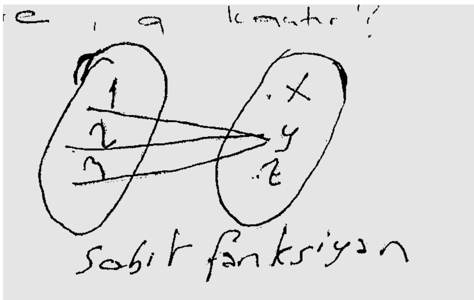
$a+2+8$
$a=8-2$
$a=6$

(SE5)

Autres réponses:

f(x)=(2+2)x+8, $=\frac{4x}{4}+\frac{8}{4}$ *………(SB19)*

a+2x+8, (a+2)x+8=1, a=-9……..(SB20)



la fonction constante………………(SC1)

f(x)=x(a+2)+8, =xa+2x+8, =3x+8…………(SC14)

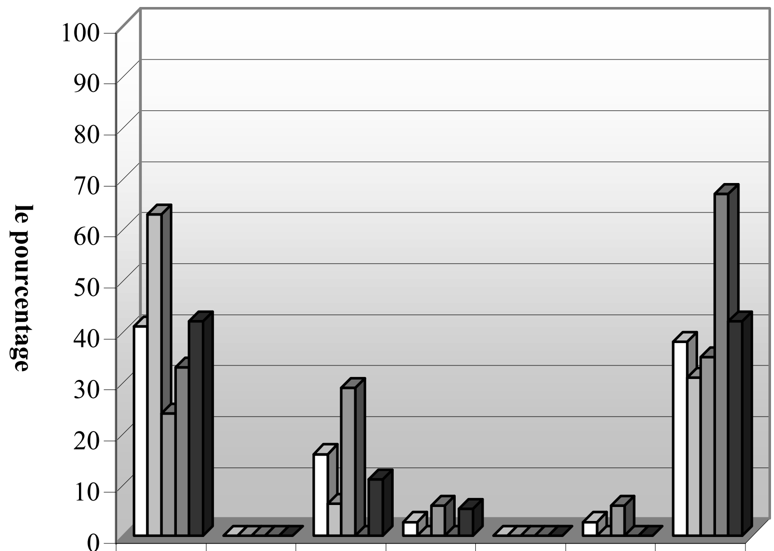
f(x)=(a+2)x+8, y=a+2+8, ya=2-8=10………..(SE38)

Non-réponses :

Maintenant je donne les tableaux concernant un classement des réponses des élèves ;

3.7.1 Lycée Anatolien

Q2-Q7-SA

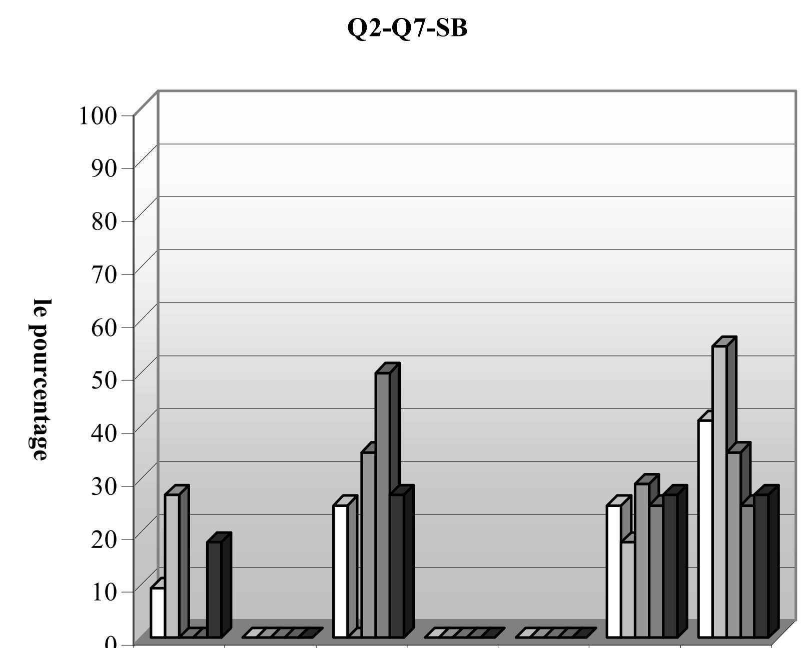


	RC1	RC2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SA	41	0	16	3	0	3	38
BON	63	0	6	0	0	0	31
MOY	24	0	29	6	0	6	35
MAU	33	0	0	0	0	0	67
DER	42	0	11	5	0	0	42

les réponses

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte, RP3 : l'élève pense que le coefficient de x doit être de 1. Ensuite il égalise a+2 à 1, RP4 : l'élève essai de ne résoudre la question que dans le cadre algébrique, RP5 : l'élève égalise la fonction à zéro, RP6: l'élève essai de trouver l'inverse de la fonction, RP7 : l'élève égalise a+2 à 8, AR :autres réponses, NR :non-réponses

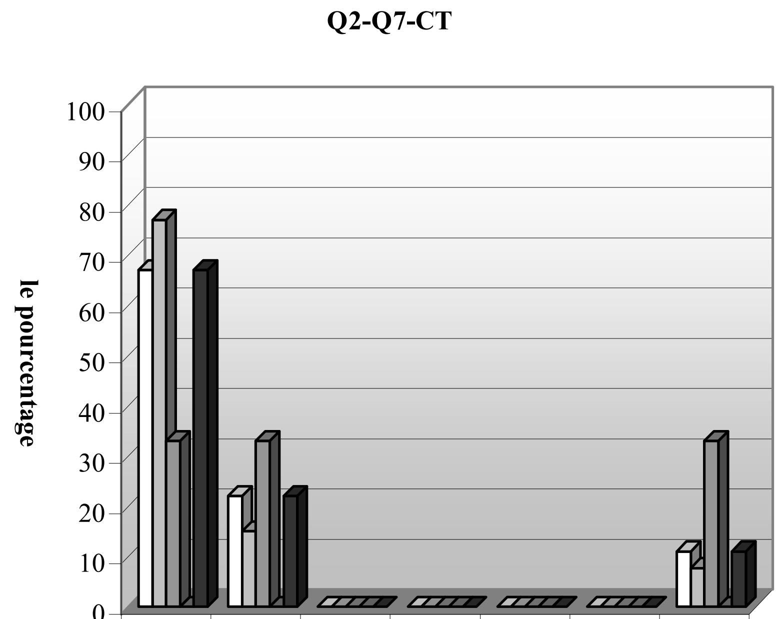
Comme le montre bien le tableau ci-dessus, il est très intéressant d'observer que 38% des élèves n'abordent pas la question dans le cas où le taux de réussite est de 41%. Ce qui signifie que les niveaux des élèves ne sont pas très homogènes. Il n'y a aucune réponse correcte partant de la procédure P2. L'erreur la plus fréquente est celle consistant à égaliser (a+2) à 1 avec un taux de 16%. Je pense que ce type d'erreurs repose sur l'évitement de perdre la variable x dans la fonction. Par ailleurs, un faible pourcentage des élèves essaient de ne résoudre la question que dans le cadre algébrique (3%). Ce pourcentage est valable pour les autres réponses.
Il est très intéressant de constater que le taux de réussite soit plus élevé chez les mauvais que les moyens : près du tiers des mauvais donnent la bonne réponse contre 24% des moyens et ce taux atteint 63% chez les bons élèves. Par ailleurs, une bonne partie des moyens égalise a+2 à 1 au lieu du zéro contre 6% des bons. Cette erreur n'apparaît pas chez les mauvais. Il y a seulement 6% des moyens qui essaient de résoudre la question en restant dans le cadre algébrique. Le taux d'autres réponses change conformément au niveau des élèves ainsi plus de la moitié des mauvais ne répondent pas à la question contre 35% des moyens et 31% des bons.



	RC1	RC2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
SB	9	0	25	0	0	25	41
BON	27	0	0	0	0	18	55
MOY	0	0	35	0	0	29	35
MAU	0	0	50	0	0	25	25
DER	18	0	27	0	0	27	27

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte, RP3 : l'élève pense que le coefficient de x doit être de 1. Ensuite il égalise a+2 à 1, RP4 : l'élève essai de ne résoudre la question que dans le cadre algébrique, RP5 : l'élève égalise la fonction à zéro, RP6: l'élève essai de trouver l'inverse de la fonction, RP7 : l'élève égalise a+2 à 8, AR :autres réponses, NR :non-réponses

En ce qui concerne la classe de seconde B, le taux de réussite descend à 9% par contre celui de non-réponse et d'autres réponses montent respectivement à 41% et 25% par rapport à la classe précédente. Un quart des élèves commettent l'erreur provoquée par l'évitement de la disparition de la variable x. En regardant les résultats des élèves par niveau on observe que les réponses correctes viennent de la part des bons ainsi 27% de ces derniers fournissent donc une réponse correcte. L'erreur qui consiste à égaliser a+2 à zéro est commise par la moitié des mauvais contre 35% des moyens tandis qu'elle est totalement absente chez les bons. Les élèves qui ne donnent pas de réponse sont nombreux chez les bons : plus de la moitié d'entre eux ne répondent pas à la question contre 35% des moyens et un quart des mauvais. On observe cependant que le taux d'autres réponses est plus élevé chez les moyens ainsi la question provoque une déstabilisation chez 29% des moyens contre un quart des mauvais et 18% des bons.



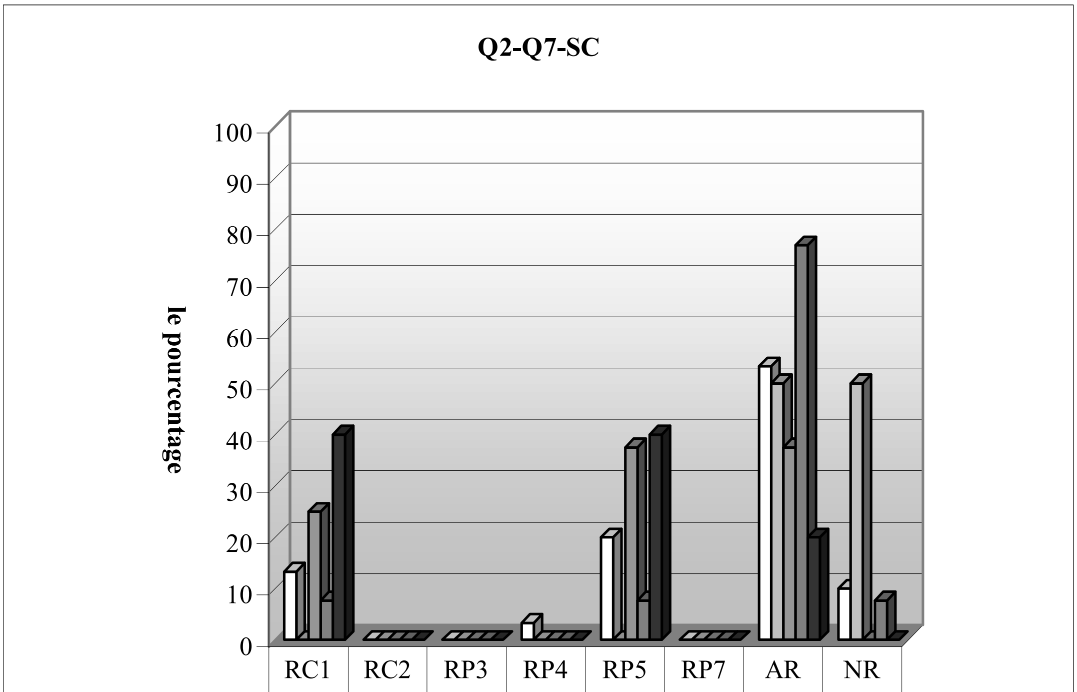
	RC1	RC2	RP3	RP4	RP5	AR	NR
T	67	22	0	0	0	0	11
BON	77	15	0	0	0	0	8
MOY	33	33	0	0	0	0	33
MAU	0	0	0	0	0	0	0
DER	67	22	0	0	0	0	11

les réponses

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte, RP3 : l'élève pense que le coefficient de x doit être de 1. Ensuite il égalise a+2 à 1, RP4 : l'élève essai de ne résoudre la question que dans le cadre algébrique, RP5 : l'élève égalise la fonction à zéro, RP6: l'élève essai de trouver l'inverse de la fonction, RP7 : l'élève égalise a+2 à 8, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'il y a seulement 11% des élèves qui n'abordent pas la question. La grande majorité des élèves fournissent une bonne réponse et 67% d'entre eux favorisent la procédure P1 reposant sur le fait que le coefficient de x doive être de zéro contre 22% qui privilégient la deuxième procédure.
On observe cependant que la procédure P1 est aussi plus préférée chez les bons : plus des trois quarts d'entre eux trouvent la bonne réponse en l'utilisant contre 15%. En ce qui concerne les moyens, les deux procédures sont utilisées par 33% des élèves.

3.7.2 Lycée Super

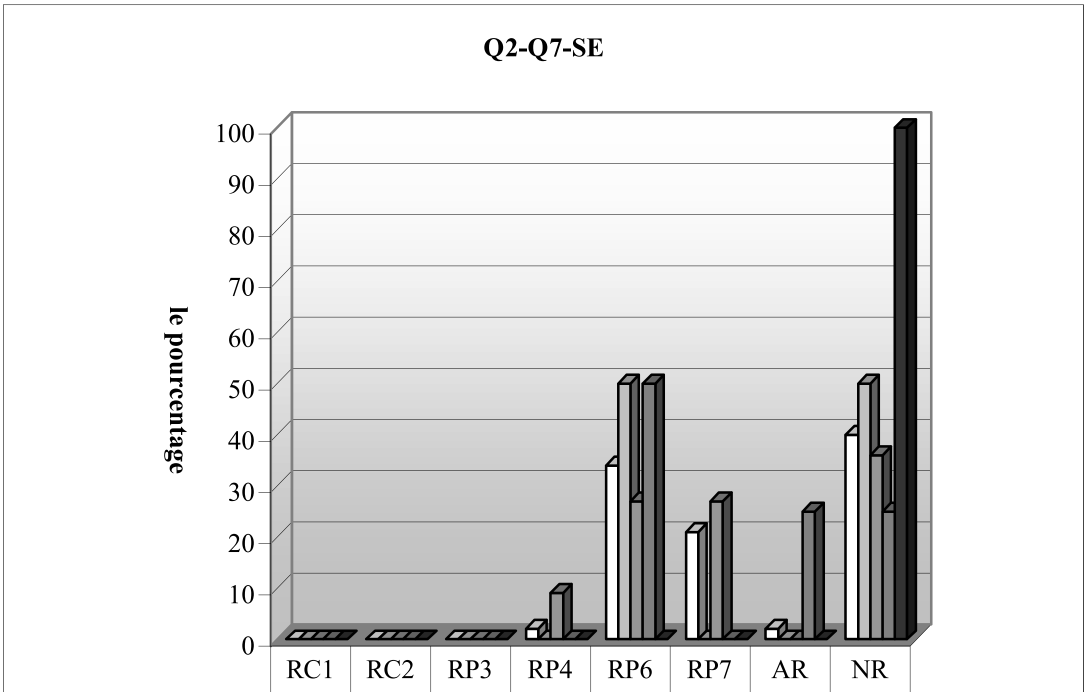


	RC1	RC2	RP3	RP4	RP5	RP7	AR	NR
SC	13	0	0	3	20	0	53	10
BON	0	0	0	0	0	0	50	50
MOY	25	0	0	0	38	0	38	0
MAU	8	0	0	0	8	0	77	8
DER	40	0	0	0	40	0	20	0

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte, RP3 : l'élève pense que le coefficient de x doit être de 1. Ensuite il égalise a+2 à 1, RP4 : l'élève essai de ne résoudre la question que dans le cadre algébrique, RP5 : l'élève égalise la fonction à zéro, RP6: l'élève essai de trouver l'inverse de la fonction, RP7 : l'élève égalise a+2 à 8, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Remarquons que 13% des élèves fournissent une bonne réponse et plus de la moitié des élèves deviennent perplexes face à la question. On peut donc dire que la question n'est pas considérée si difficile par ces élèves. Par ailleurs, une bonne partie égalisent, soit 20%, la fonction f à zéro au lieu du coefficient de x (a+2). Il s'agit d'un faible pourcentage (3,3%) pour les élèves qui n'essaient la question que dans le cadre algébrique tandis que 10% ne donnent pas de réponse.
Quant aux résultats des élèves par niveau, il est très intéressant de constater qu'il n'y a aucune réponse correcte de la part des bons. Une moitié de ces derniers ne donnent pas de réponse tandis que l'autre moitié sont déconcertées face à la question. Ainsi un quart des moyens trouvent la bonne réponse contre 8% des mauvais. L'erreur consistant à égaliser la fonction à zéro au lieu de l'expression a+2 est commise par 38% des moyens contre 8% des mauvais.
Si on regarde les résultats des élèves de dérsané, on observe que le taux de réussite atteint 40% et ce pourcentage est aussi valable pour l'erreur qui consiste à égaliser la fonction f à zéro. Une bonne partie d'entre eux répondent autrement à la question.

3.7.3 Lycée Normal

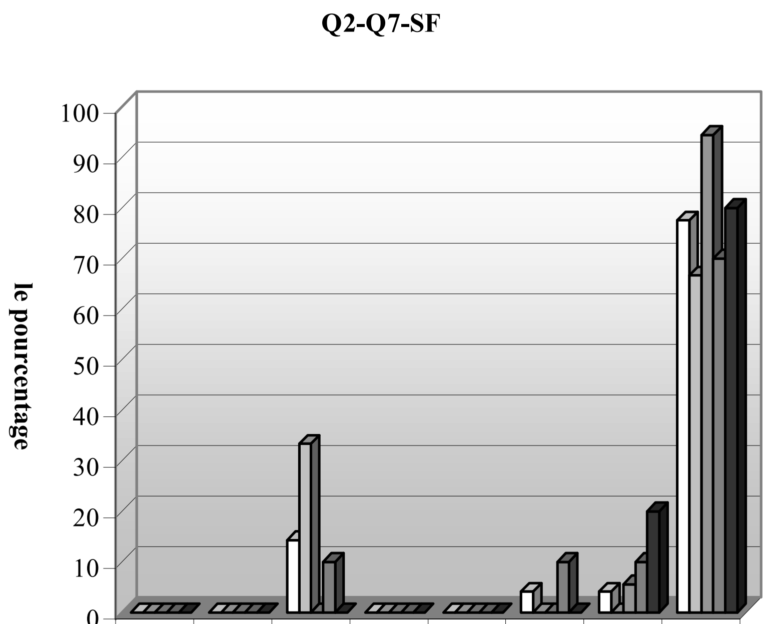


	RC1	RC2	RP3	RP4	RP6	RP7	AR	NR
SE	0	0	0	2	34	21	2	40
BON	0	0	0	0	50	0	0	50
MOY	0	0	0	9	27	27	0	36
MAU	0	0	0	0	50	0	25	25
DER	0	0	0	0	0	0	0	100

les réponses

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte, RP3 : l'élève pense que le coefficient de x doit être de 1. Ensuite il égalise a+2 à 1, RP4 : l'élève essai de ne résoudre la question que dans le cadre algébrique, RP5 : l'élève égalise la fonction à zéro, RP6: l'élève essai de trouver l'inverse de la fonction, RP7 : l'élève égalise a+2 à 8, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, en classe, il n'y a aucun élève qui donne la bonne réponse et le taux de non-réponse est assez élevé (40%) ce qui indique que la question est très difficile pour ces élèves. Par ailleurs, une grande majorité trouvent l'inverse de la fonction (34%) bien qu'elle ne soit pas en jeu. Le pourcentage des élèves qui égalisent l'expression a+2 à 8 est de 21% tandis qu' un très faible pourcentage des élèves essaient de résoudre la question seulement dans le cadre algébrique.
En ce qui concerne les résultats par niveau, il y a seulement 9% des moyens qui commettent l'erreur intitulée « rester en cadre algébrique », la moitié des bons et mauvais trouvent l'inverse de la fonction qu'on ne leur demande pas contre 27% des moyens. L'erreur consistant à égaliser l'expression a+2 à 8 est uniquement réservée aux moyens ainsi plus du quart d'entre eux font cette erreur. Le taux de non-réponses est plus élevé chez les bons : la moitié d'entre eux ne répondent pas à la question contre 36% des moyens et un quart des mauvais.



	RC2	RP3	RP4	RP5	RP6	RP7	AR	NR
SF	0	0	14	0	0	4	4	78
BON	0	0	33	0	0	0	0	67
MOY	0	0	0	0	0	0	6	94
MAU	0	0	10	0	0	10	10	70
DER	0	0	0	0	0	0	20	80

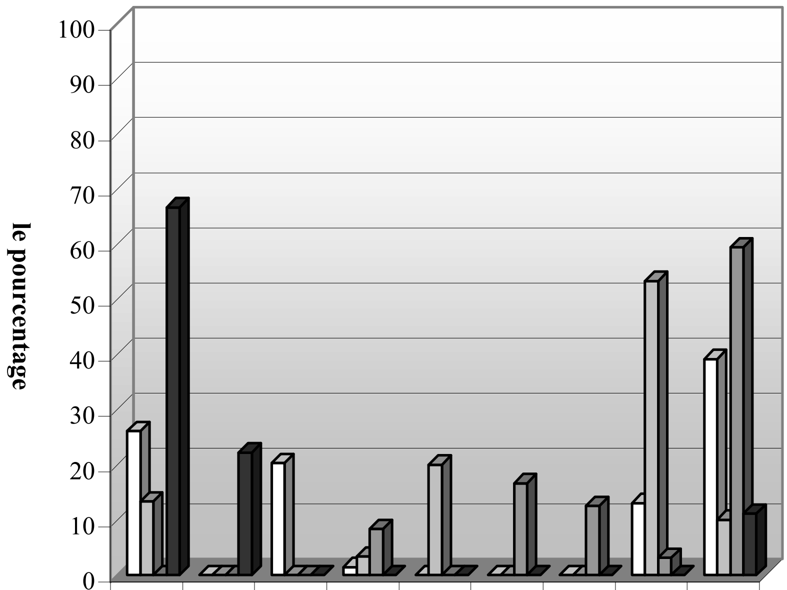
les réponses

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte, RP3 : l'élève pense que le coefficient de x doit être de 1. Ensuite il égalise a+2 à 1, RP4 : l'élève essai de ne résoudre la question que dans le cadre algébrique, RP5 : l'élève égalise la fonction à zéro, RP6: l'élève essai de trouver l'inverse de la fonction, RP7 : l'élève égalise a+2 à 8, AR :autres réponses, NR :non-réponses

En classe de seconde F, plus des trois quarts des élèves ne traitent pas la question et aucun élève ne fournit une réponse correcte. Il n'est pas très difficile de dire que la question n'est pas routinière aux élèves et très complexe. 14% des élèves essaient cependant de ne résoudre la question que dans le cadre algébrique. Le pourcentage des élèves qui égalisent le coefficient de x à zéro est de 4%. Il s'agit du même pourcentage pour les autres réponses.
Quand on regarde les résultats par niveau, il semble que les moyens soient plus déconcertés face à la question ainsi la quasi-totalité d'entre eux ne donnent pas de réponse contre 70% des mauvais et 67% des bons. Les élèves qui essaient de résoudre la question seulement dans le cadre algébrique sont cependant plus nombreux chez ces derniers : un tiers des bons commettent ce type d'erreurs contre 10% des mauvais et un pourcentage nul chez les moyens. L'erreur qui consiste à égaliser le coefficient de x à 8 est uniquement réservée aux mauvais avec un taux de 10%.

3.7.4 Résultats des élèves par lycée

Q2-Q7-RL



	RC1	RC2	RP3	RP4	RP5	RP6	RP7	AR	NR
LA	26	0	20	1	0	0	0	13	39
LS	13	0	0	3	20	0	0	53	10
LN	0	0	0	8	0	17	13	3	59
T	67	22	0	0	0	0	0	0	11

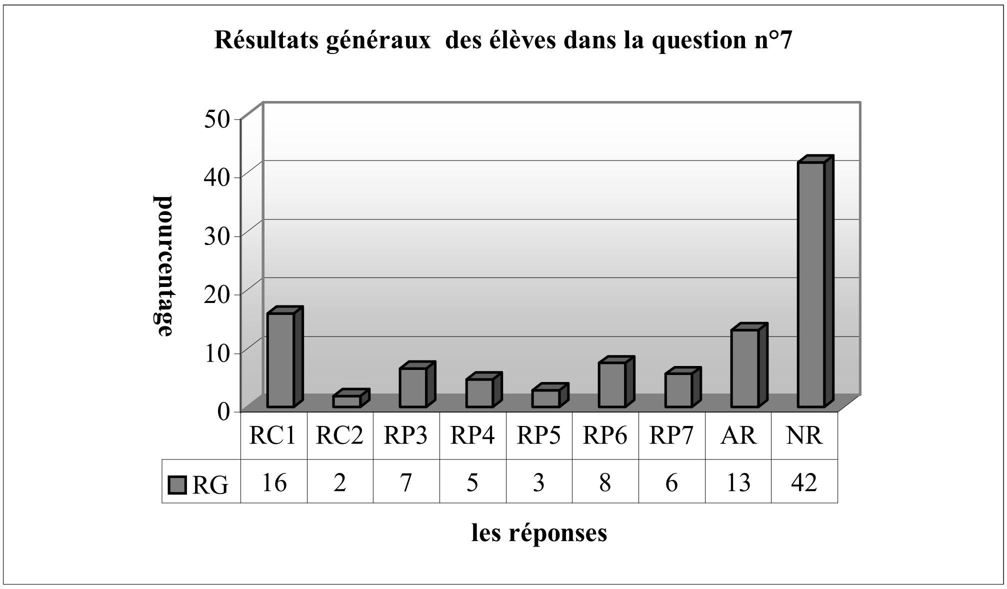
les réponses

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte, RP3 : l'élève pense que le coefficient de x doit être de 1. Ensuite il égalise a+2 à 1, RP4 : l'élève essai de ne résoudre la question que dans le cadre algébrique, RP5 : l'élève égalise la fonction à zéro, RP6: l'élève essai de trouver l'inverse de la fonction, RP7 : l'élève égalise a+2 à 8, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Ce tableau ci –dessus montre que les réponses par lycée présentent une grande diversité ainsi à part 22% des élèves de la classe de terminale qui fournissent une bonne réponse en utilisant la procédure P2, il n'y a aucun élève qui la privilégie dans les autres lycées.
Par ailleurs, 26% des élèves trouvent la bonne réponse dans le lycée Anatolien. Ce pourcentage descend à moitié chez les lycéens super et il n'y a aucune réponse correcte de la part des lycéens normal.
On observe que certaines erreurs sont uniquement réservées à certains lycées : par exemple l'erreur consistant à égaliser le coefficient de x à 1 n'est présente que dans le lycée Anatolien avec un taux de 20%, il y a seulement 20% des élèves du lycée Super qui égalisent la fonction f à zéro. De plus l'erreur qui consiste à trouver l'inverse de la fonction et celle consistant à égaliser le coefficient de x à 8 ne sont observées que dans le lycée Normal ainsi la première est commise par 17% des élèves et la deuxième par 13% des élèves.
En ce qui concerne l'erreur commune, ce sont les erreurs de calcul qui sont respectivement commises par 1,4% des élèves du lycée Anatolien, 3,3% des élèves du lycée Super et 8,3% du lycée Normal.
Le lycée Super se démarre des autres par le taux plus élevé d'autres réponses ainsi plus de la moitié des élèves de ce lycée répondent autrement à la question contre 13% des lycéens anatolien et 31% des lycéens normal. On peut donc dire que la question n'est pas considérée si difficile par ces élèves.
Quant aux taux de non-réponses, plus de la moitié des élèves du lycée Normal ne donnent pas de réponse. Ce taux perd son importance dans le lycée Anatolien (39%) et il descend à 10% chez les lycéens super.

Si on prend en compte les taux de réussite et ceux de non-réponses ensemble, on peut dire que la plupart des élèves de seconde ne savent pas que le coefficient d'une fonction consistante doit être égal à zéro ou la fonction consistante ne concerne pas de variable.

3.7.5 Résultats généraux des élèves



	RC1	RC2	RP3	RP4	RP5	RP6	RP7	AR	NR
RG	16	2	7	5	3	8	6	13	42

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2): réponse correcte, RP3 : l'élève pense que le coefficient de x doit être de 1. Ensuite il égalise a+2 à 1, RP4 : l'élève essai de ne résoudre la question que dans le cadre algébrique, RP5 : l'élève égalise la fonction à zéro, RP6: l'élève essai de trouver l'inverse de la fonction, RP7 : l'élève égalise a+2 à 8, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus indique qu'il y a seulement 18% des élèves qui fournissent une réponse correcte et la grande majorité d'entre eux privilégient la procédure P1 en utilisant la formule générale des fonctions constantes. La question n'est pas abordée par 42% des élèves tandis que le taux d'autres réponses est de 13%. En ce qui concerne les erreurs, 7% des élèves égalisent le coefficient de x à 1, 6% des élèves à 8, 3% égalisent la fonction à zéro ainsi 16% des élèves n'arrivent pas à choisir le bon nombre auquel ils vont égaliser le coefficient de x. 5% des élèves n'arrivent pas à utiliser les deux cadres (cadre algébrique et cadre fonctionnel) ensemble tandis que le taux des élèves qui essaient de trouver, même si elle n'est pas en jeu, l'inverse de la fonction f est de 8%.

3.7.6 Conclusion

Comme dans les questions précédentes, le taux de réussite est très faible et celui de non-réponses est assez élevé. La question est complexe et très peu familière aux élèves. La plupart des élèves qui trouvent la bonne réponse utilisent que le coefficient de x doit être zéro dans l'expression de l'image des fonctions constantes. Mais une bonne partie des élèves n'arrivent pas cependant à choisir le bon nombre auquel ils vont égaler le coefficient de x (RP3+RP5+RP7,16%) et ils ont échoué. Cela signifie, du côté des didacticiens que les élèves résolvent la question sans raisonnement. C'est-à-dire sans savoir pourquoi il faut égaler le coefficient de x à zéro. C'est pourquoi la plupart des erreurs proviennent d'un oubli et d'une confusion. De plus l'enseignement qui s'appuie sur le fait d'annoncer simplement des connaissances nécessaires pour résoudre des questions sans raisonnement, comme l'enseignement de dérsané (ou l'enseignement très proche du concours), n'est pas pertinent et ne garantit pas l'apprentissage de ces connaissances. Ainsi les élèves de dérsané ne sont pas encore bien automatisés, ont encore besoin de résoudre beaucoup d'exercices de ce type pour ne pas oublier à quel nombre égaliser le coefficient de x[1].

---

[1] Cela m'a rappelé un exemple qu'un de mes enseignants de dérsané nous avait donné. Quand on lui disait qu'on n'arrivait pas à saisir des procédures les plus courtes lors de la résolution des questions (cf. les questions n°3 (procédure P4),4 (procédure P2),5 et 9 (procédure P1) et à ne pas éviter des erreurs. Il nous a dit d'imaginer que vous cherchez une adresse que vous ne connaissez pas déjà. Que feriez-vous ? vous faites attention aux noms des

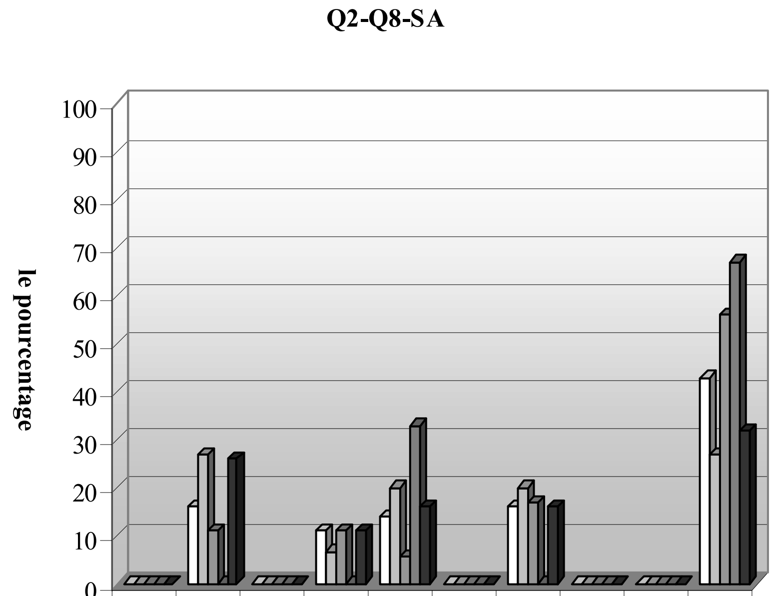
3.8 Question n°8

Cette question correspondait à une lecture de la courbe d'une fonction. Les élèves devaient cependant envisager que cette courbe était aussi celle de l'inverse de la fonction.
Comme la question n'est pas très familière aux élèves de seconde, je n'attendais pas que le taux de réussite soit très élevé dans ces classes même les classes où beaucoup d'élèves suivent les cours de dérsanés.
Maintenant je passe à la présentation des réponses catégorisées des élèves ;

RC : réponse correcte.
RP1 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2.
f(1)=2, f(2)=-3, f^{-1}*(2)=1,* $\frac{-3+1}{f(2)}=\frac{-2}{3}$ ……………*(SA13)*
RP2 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2 par f^{-1}.
RP3 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 1 par f rond f.
$\frac{2+(-3)}{2}=\frac{-1}{2}$ ………………*(SB15)*
RP1+RP2 : l'élève ne trouve correctes que l'image de 2 par f et 2 par f^{-1}.
RP1+RP3 : l'élève trouve correctes l'image de 2 par f et celle de 1 par f rond f.
$\frac{f(2)+f^{-1}(2)}{f(f(1))}=\frac{-3+2}{2}=\frac{-1}{2}$ ……………*(SB17)*
RP2+RP3 : l'élève ne trouve l'image de 2 par f^{-1} et celui de 1 par f rond f.
RP4 : l'élève ne fournit aucune image correcte.
$\frac{f(2)+f^{-1}(2)}{f(f(1))}=\frac{2+(-3)}{1}=\frac{-1}{1}$ …………….*(SB11)*
Autres réponses :
Non réponses :
Voici les résultats des élèves dans la question 7 ;

rues. Vous êtes très vigilant des fois vous pouvez vous tromper. Mais pour la deuxième fois c'est plus facile que la première fois. Pour la troisième fois plus facile que la deuxième fois et pour la centième fois et plus facile que les fois précédentes. A ce moment-là vous ne regardez pas les noms des rues et vous ne nous trompez pas.

3.8.1 Lycée Anatolien



	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP1+2	RP1+3	RP2+3	AR	NR
SA	0	16	0	11	14	0	16	0	0	43
BON	0	27	0	7	20	0	20	0	0	27
MOY	0	11	0	11	6	0	17	0	0	56
MAU	0	0	0	0	33	0	0	0	0	67
DER	0	26	0	11	16	0	16	0	0	32

les réponses

RC : réponse correcte, RP1 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2, RP2 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2 par f^{-1}, RP3 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 1 par f rond f, RP1+RP2 : l'élève ne trouve correctes que l'image de 2 par f et 2 par f^{-1}, RP2+RP3 : l'élève ne trouve l'image de 2 par f^{-1} et celui de 1 par f rond f, RP4 : l'élève ne fournit aucune image correcte, AR :autres réponses, NR :non-réponses

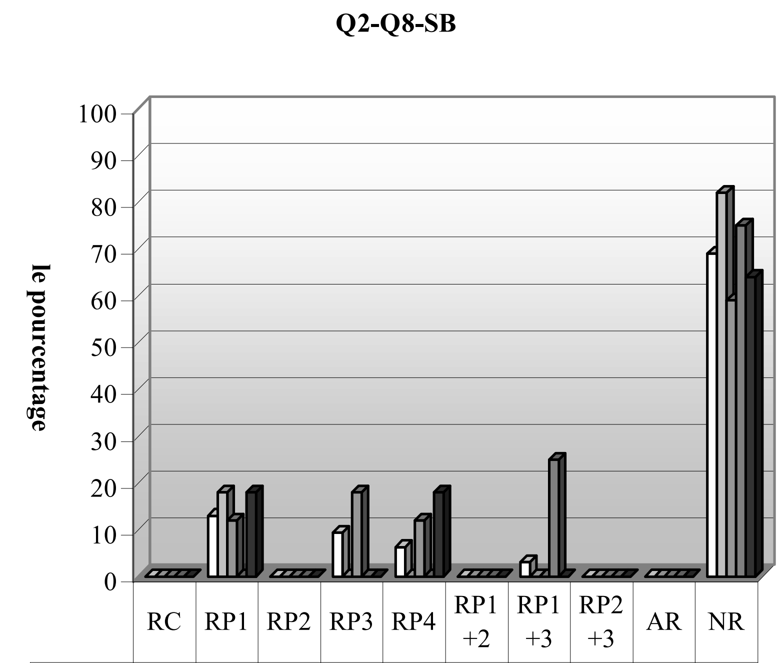
Le tableau ci-dessus montre qu'en classe aucun élève ne fournit une bonne réponse et près de la moitié des élèves ne donnent pas de réponse ce qui confirme mes attentes. La question est donc très complexe et peu familière aux élèves. Le pourcentage des élèves qui ne trouvent correcte que l'image de 2 par f est de 16%. Ce pourcentage est aussi valable pour ceux qui ne trouvent correctes que l'image de 2 par f et 1 par « f rond f ». Par ailleurs, il n'y a aucune image correcte chez 14% des élèves tandis que 11% ne trouvent correcte que l'image de 1 par « f rond f ».

Il est intéressant de constater que chaque pourcentage des réponses relatives à l'image de 2 par f^{-1} est nul ce qui indique que les élèves ont de grosses difficultés à accepter que la courbe d'une fonction bijective est également celle de son inverse en changeant les axes.

Quant aux résultats des élèves par niveau, si on commence par les réponses plus proches de la bonne réponse, on remarque que 20% des bons ne trouvent correctes que l'image de 2 par f et 1 par « f rond f » contre 17% des moyens. Ce type de réponses n'existe cependant pas chez les mauvais.

Il est normal que le taux de non-réponses soit plus élevé chez les mauvais ainsi plus des deux tiers des mauvais ne donnent pas de réponse contre plus de la moitié des moyens et 27% des bons. Les élèves qui ne fournissent aucune image correcte sont plus nombreux chez les mauvais : 33% d'entre eux donnent ce type de réponses contre 20% des bons et 6% des moyens.

Plus du quart des bons qui ne trouvent correcte que l'image de 2 par f tandis que cette réponse est constatée chez 11% des moyens et un pourcentage nul chez les mauvais. Par contre les élèves qui ne trouvent correcte que l'image de 1 « f rond f » sont plus nombreux chez les moyens (11% contre 7% des bons).



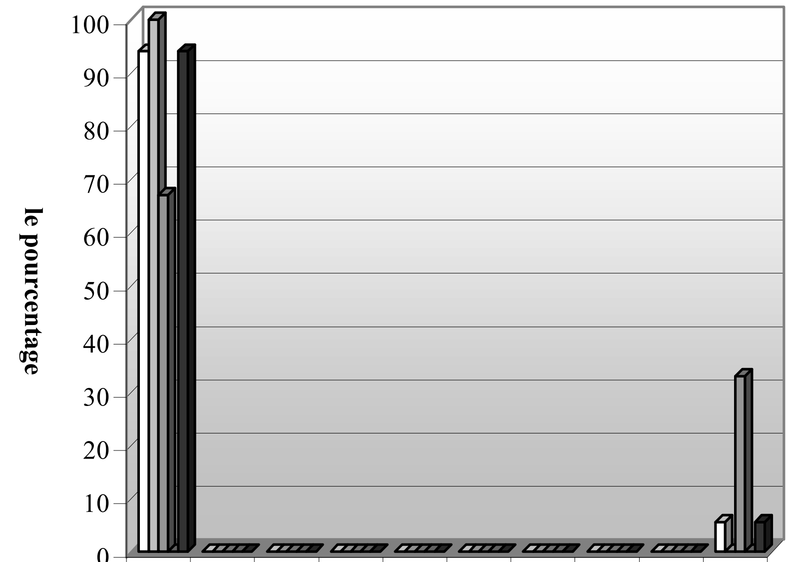
	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP1 +2	RP1 +3	RP2 +3	AR	NR
SB	0	13	0	9	6	0	3	0	0	69
BON	0	18	0	0	0	0	0	0	0	82
MOY	0	12	0	18	12	0	0	0	0	59
MAU	0	0	0	0	0	0	25	0	0	75
DER	0	18	0	0	18	0	0	0	0	64

RC : réponse correcte, RP1 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2, RP2 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2 par f^{-1}, RP3 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 1 par f rond f, RP1+RP2 : l'élève ne trouve correctes que l'image de 2 par f et 2 par f^{-1}, RP2+RP3 : l'élève ne trouve l'image de 2 par f^{-1} et celui de 1 par f rond f, RP4 : l'élève ne fournit aucune image correcte, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Remarquons qu'il n'y a aussi aucun élève qui donne la bonne réponse dans cette classe et que 69% des élèves ne répondent pas à la question. Il est donc évident de dire que la question est très complexe et peu familière aux élèves. L'image de 2 par f n'est correcte que chez 13% des élèves alors que 9% ne trouvent correcte que l'image de 1 par « f rond f ». Par ailleurs, 6% des élèves ne fournissent aucune image correcte tandis qu'un très peu nombre des élèves trouvent correctes seulement l'image de 2 et f(1) par f (3%). Comme dans la classe précédente, il n'y a aucune réponse correcte relative à l'image de 2 par f^{-1}.

Si on regarde les résultats par niveau, on observe que le taux de non-réponses est plus élevé chez les bons : 82% d'entre eux ne donnent pas de réponse contre trois quarts des mauvais et 59% des moyens. Il est cependant très intéressant que la réponse étant plus proche de la bonne réponse ne vient que de la part d'un quart des mauvais. Comme déjà dit, il n'y a aucune réponse correcte concernant l'image de 2 par f^{-1}. Par contre 18% des bons ne trouvent correcte que l'image de 2 par f contre 12% des moyens et il y a seulement 18% des moyens qui ne réussissent qu'à trouver l'image de 1 par « f rond f ».

Q2-Q8-CT



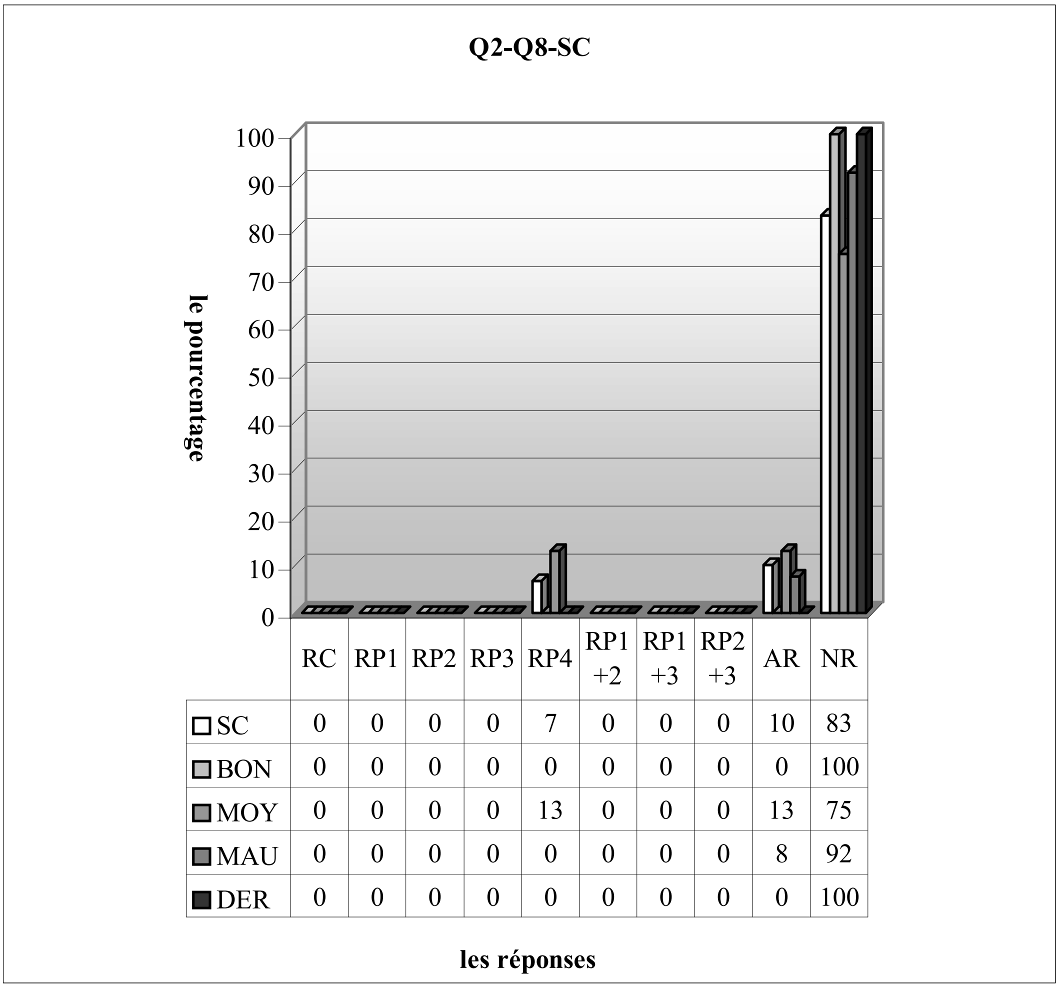
	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP1 +2	RP1 +3	RP2 +3	AR	NR
T	94	0	0	0	0	0	0	0	0	6
BON	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MOY	67	0	0	0	0	0	0	0	0	33
MAU	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
DER	94	0	0	0	0	0	0	0	0	6

les réponses

RC : réponse correcte, RP1 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2, RP2 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2 par f^{-1}, RP3 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 1 par f rond f, RP1+RP2 : l'élève ne trouve correctes que l'image de 2 par f et 2 par f^{-1}, RP2+RP3 : l'élève ne trouve l'image de 2 par f^{-1} et celui de 1 par f rond f, RP4 : l'élève ne fournit aucune image correcte, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Quant à la classe de terminale, à part 6% des élèves qui ne donnent pas de réponse, tous les élèves fournissent la bonne réponse. On observe cependant que tous les bons donnent la bonne réponse contre 67% des moyens.

3.8.2 Lycée Super

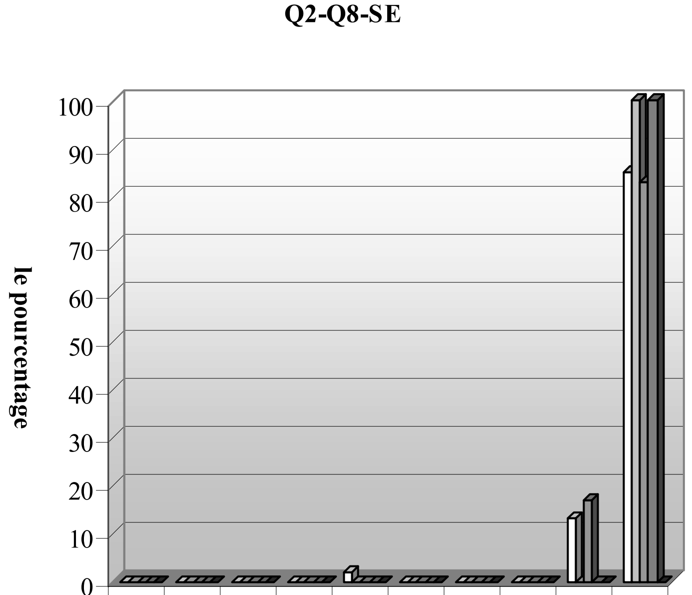


	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP1 +2	RP1 +3	RP2 +3	AR	NR
SC	0	0	0	0	7	0	0	0	10	83
BON	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
MOY	0	0	0	0	13	0	0	0	13	75
MAU	0	0	0	0	0	0	0	0	8	92
DER	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100

RC : réponse correcte, RP1 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2, RP2 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2 par f^{-1}, RP3 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 1 par f rond f, RP1+RP2 : l'élève ne trouve correctes que l'image de 2 par f et 2 par f^{-1}, RP2+RP3 : l'élève ne trouve l'image de 2 par f^{-1} et celui de 1 par f rond f, RP4 : l'élève ne fournit aucune image correcte, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Il est très intéressant que 7% des élèves ne fournissent aucune image correcte et 10% répondent autrement à la question parmi ceux qui traitent la question. Donc la question n'est pas abordée par 83% des élèves. Il est facile de dire que la question est trop complexe pour ces élèves.

3.8.3 Lycée Normal

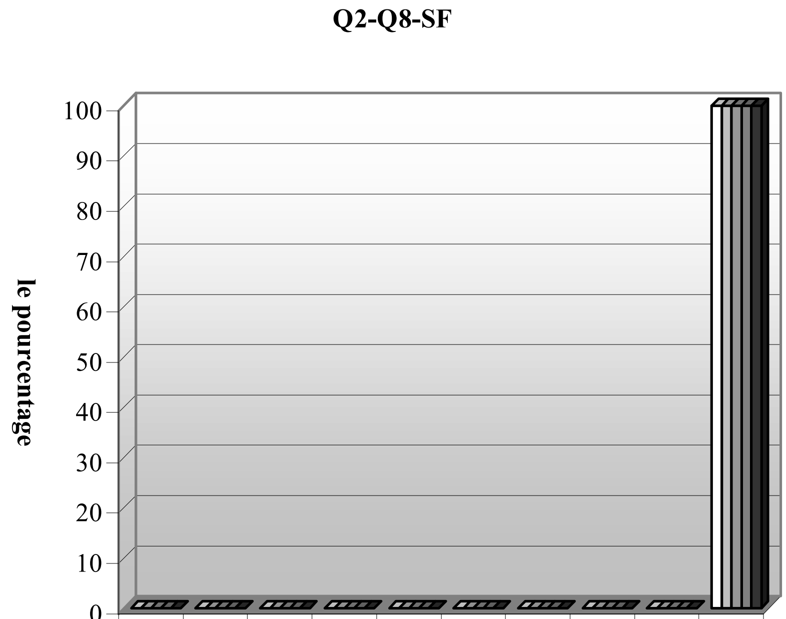


	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP1 +2	RP1 +3	RP2 +3	AR	NR
SE	0	0	0	0	2	0	0	0	13	85
BON	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
MOY	0	0	0	0	0	0	0	0	17	83
MAU	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
DER	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

les réponses

RC : réponse correcte, RP1 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2, RP2 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2 par f^{-1}, RP3 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 1 par f rond f, RP1+RP2 : l'élève ne trouve correctes que l'image de 2 par f et 2 par f^{-1}, RP2+RP3 : l'élève ne trouve l'image de 2 par f^{-1} et celui de 1 par f rond f, RP4 : l'élève ne fournit aucune image correcte, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Les résultats résumés par le tableau ci-dessus ressemblent beaucoup à ceux de la classe précédente ainsi il n'y a aucune bonne réponse et la grande majorité des élèves ne donnent pas de réponse. Le taux d'autres réponses est de 13% tandis qu'il n'y a aucune image correcte chez 2% des élèves.



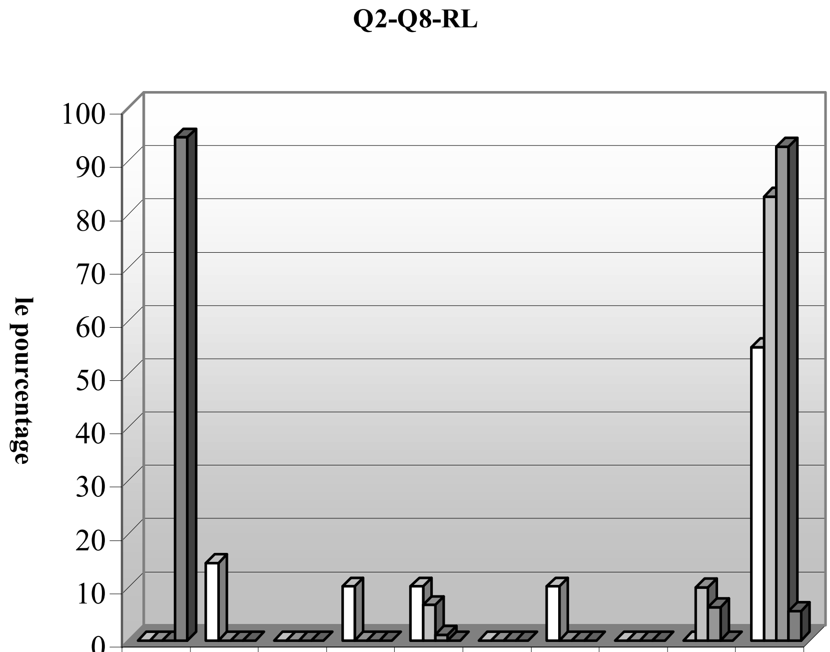
	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP1 +2	RP1 +3	RP2 +3	AR	NR
SF	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
BON	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
MOY	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
MAU	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
DER	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100

les réponses

RC : réponse correcte, RP1 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2, RP2 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2 par f^{-1}, RP3 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 1 par f rond f, RP1+RP2 : l'élève ne trouve correctes que l'image de 2 par f et 2 par f^{-1}, RP2+RP3 : l'élève ne trouve l'image de 2 par f^{-1} et celui de 1 par f rond f, RP4 : l'élève ne fournit aucune image correcte, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Quant à la classe de seconde F, aucun élève ne donne de réponse. On peut donc dire que la question est trop complexe ou qu'ils ont peut-être vu pour la première fois une question pareille.

3.8.4 Résultats des élèves par lycée



	RC	RP1	RP2	RP3	RP4	RP1 +2	RP1 +3	RP2 +3	AR	NR
LA	0	14	0	10	10	0	10	0	0	55
LS	0	0	0	0	7	0	0	0	10	83
LN	0	0	0	0	1	0	0	0	6	93
T	94	0	0	0	0	0	0	0	0	6

les réponses

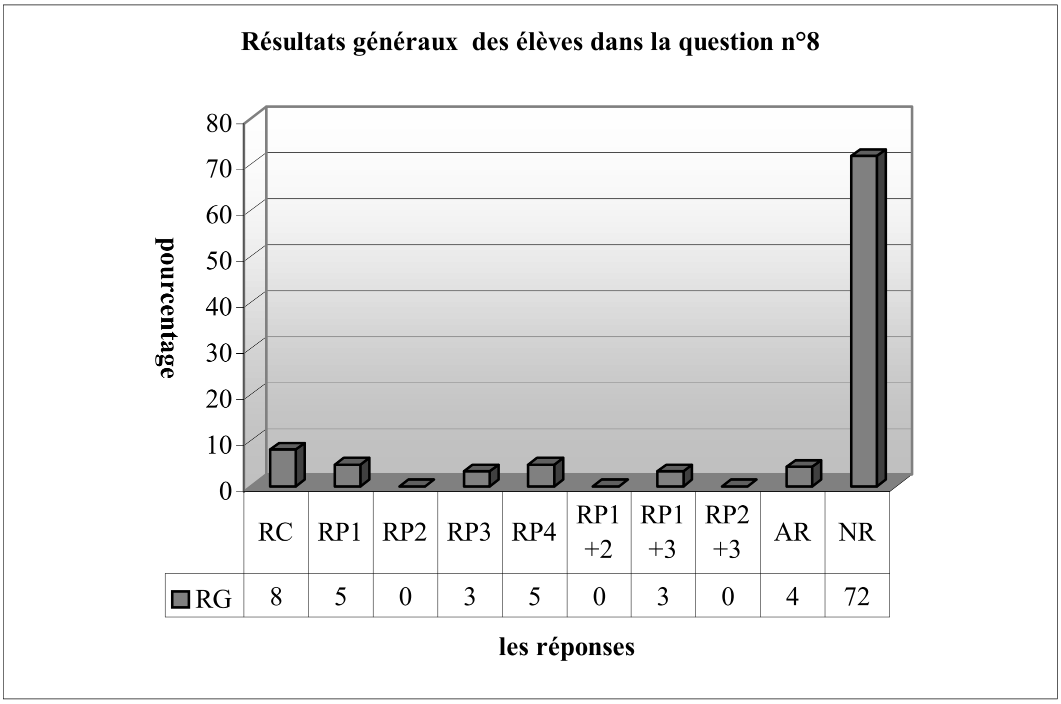
RC : réponse correcte, RP1 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2, RP2 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2 par f^{-1}, RP3 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 1 par f rond f, RP1+RP2 : l'élève ne trouve correctes que l'image de 2 par f et 2 par f^{-1}, RP2+RP3 : l'élève ne trouve l'image de 2 par f^{-1} et celui de 1 par f rond f, RP4 : l'élève ne fournit aucune image correcte, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Il n'y a aucun élève qui donne la bonne réponse dans tous les lycées, les résultas des lycées super et normal sont très homogènes. Il est très intéressant de constater que dans ces deux lycées il n'y a que trois types de réponse : non-réponses (83% dans le lycée Super contre 93% normal), autres réponses (respectivement 10% contre 6%) et la réponse ne concernant aucune image correcte (7% contre 1%) ce qui signifie que la question est trop complexe et pas familière aux élèves.

En ce qui concerne le lycée Anatolien, même s'il n'y a aucune réponse correcte et plus de la moitié des élèves ne donnent pas de réponse. on constate quand même que 14% des élèves ne trouvent correcte que l'image de 2, 10% l'image de 1 par « f rond f » et il s'agit du même pourcentage pour les élèves qui ne trouvent correctes que l'image de 2 et f(1).

Comme déjà prévu, l'image de 2 par f^{-1} pose beaucoup de problème aux élèves : il n'y a aucune réponse correcte concernant l'image de 2 par f^{-1}. Pour ces élèves, il est peut-être difficile d'accepter que la courbe d'une fonction bijective est aussi celle de son inverse en changeant les axes.

3.8.5 Résultats généraux des élèves



RC : réponse correcte, RP1 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2, RP2 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 2 par f^{-1}, RP3 : l'élève ne trouve correcte que l'image de 1 par f rond f, RP1+RP2 : l'élève ne trouve correctes que l'image de 2 par f et 2 par f^{-1}, RP2+RP3 : l'élève ne trouve l'image de 2 par f^{-1} et celui de 1 par f rond f, RP4 : l'élève ne fournit aucune image correcte, AR :autres réponses, NR :non-réponses

La grande majorité des élèves ne donnent pas de réponse ainsi il y a seulement 8% des élèves qui fournissent une réponse correcte, 5% des élèves ne trouvent correcte que l'image de 2, 3% des élèves l'image de 1 par fof, 3% des élèves l'image de 2 par f^{-1} et de 1 par fof. Il n'y a aucun élève de seconde qui trouve correctement l'image de 2 par f^{-1}.

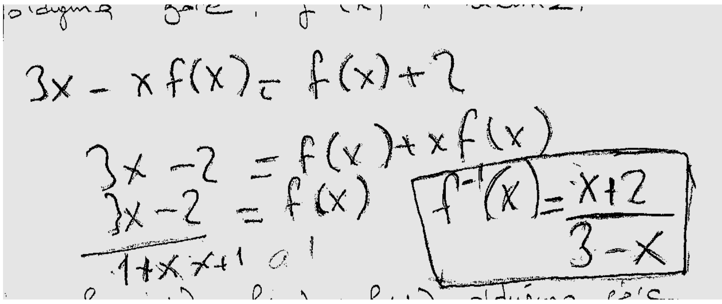
3.8.6 Conclusion

Un très petit nombre des élèves répondent correctement à la question et la grande majorité des élèves ne donnent pas de réponse. Nous pouvons dire que la question est assez complexe et peu familière aux élèves. Comme nous l'avons vu lors de l'analyse des manuels, les manuels sont géométriquement très pauvres c'est pourquoi il ne nous semble pas très étonnant d'avoir ces résultats. Par ailleurs, il n'y aucun élève qui trouve l'image de 2 par f^{-1}. Cela nous amène à conclure que ces élèves ne peuvent pas savoir que la représentation graphique d'une fonction bijective est également celle de son inverse en changeant les axes.
Par ailleurs, le fait qu'à part un élève, tous les élèves de terminale fournissent une réponse correcte confirme l'hypothèse que nous avons émise dans l'analyse a priori (même s'il s'agit d'un taux nul de réussite dans le lycée Anatolien) et nous conduit à penser que les élèves complètent leurs lacunes, soit dans les classes suivantes, soit dans des dérsanés.

3.9 Question n°9

Cette question n'a été posée qu'aux élèves de la classe de terminale. Le but était destiné à observer les différentes techniques utilisées par les élèves.
Maintenant la présentation des réponses catégorisées ;

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte.
L'élève fournit une réponse correcte en utilisant la procédure P1.
RC2 (Procédure 2) : réponse correcte avec la procédure P2.
L'élève utilise la recette $\boldsymbol{R_a}$, *lors qu'il trouve l'inverse de la fonction.*



$3x - xf(x) = f(x)+2$

$3x - 2 = f(x)+xf(x)$

$\frac{3x-2}{1+x} = f(x)$ $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3-x}}$

(T2)

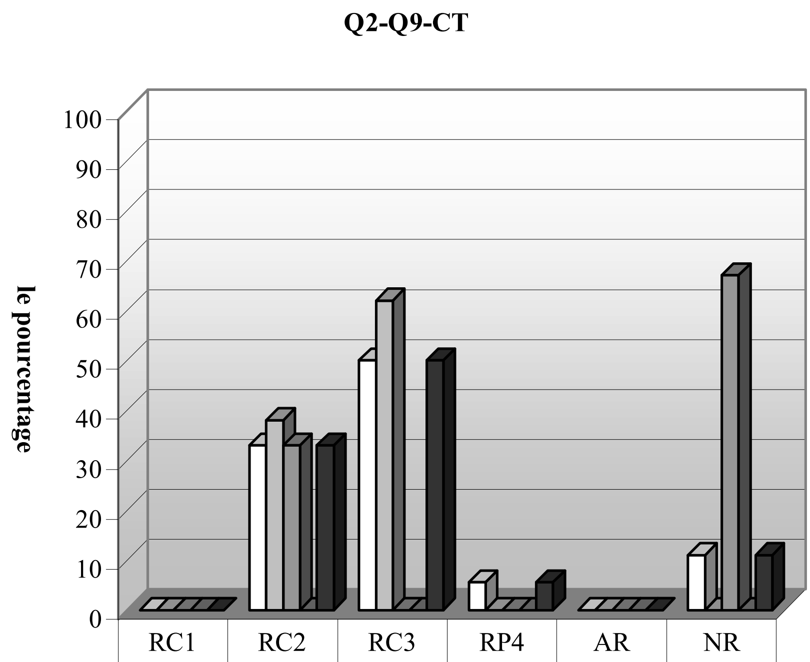
RC3 (Procédure 3): réponse correcte avec la procédure P3.
L'élève trouve l'inverse de la fonction en utilisant la méthode $\boldsymbol{M_{xfy}}$.
RP4 : réponses incomplètes.

3x-f(x)x=f(x)+2, 3x-2=f(x)+f(x)x, $\frac{x-2}{3-x}$ …………..*(T1)*

Autres réponses :
Non-réponses :

Maintenant je donne le tableau qui résume les résultats des élèves :

3.9.1 Classe de Terminale



	RC1	RC2	RC3	RP4	AR	NR
T	0	33	50	6	0	11
BON	0	38	62	0	0	0
MOY	0	33	0	0	0	67
MAU	0	0	0	0	0	0
DER	0	33	50	6	0	11

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte, RC2 (Procédure 2) : réponse correcte avec la recette R_a, RC3 (Procédure 3): réponse correcte avec la méthode M_{xfy}, RP4 : réponses incomplètes, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, la grande majorité des élèves fournissent une bonne réponse (83%) : la moitié d'entre eux trouvent la bonne réponse en utilisant la procédure P3 tandis que la procédure P2 portant sur la recette $\mathbf{R_a}$ conduit 33% des élèves à trouver la bonne réponse. On observe cependant qu'aucun élève ne privilégie la procédure P1 la plus pratique. Environ 6% donnent des réponses incomplètes alors que la question n'est pas abordée par 11% des élèves.
En ce qui concerne les résultats des élèves par niveau, on constate que chaque bon trouve la bonne réponse et ils privilégient majoritairement la procédure P3 (62% contre 38%). Chez les moyens il y a seulement 33% des élèves qui trouvent la bonne réponse à partir de la procédure P2 et la grande majorité d'entre eux n'abordent pas la question.

3.9.2 Conclusion

Le fait qu'il n'y a aucun élève qui trouve la bonne réponse en privilégiant la procédure P1 la plus pratique indique que saisir ce type de procédures est très difficile même pour les très bons élèves. Mais il faut cependant souligner que ces élèves n'ont pas vu la notion de fonction dans le dérsané lors que le questionnaire s'est déroulé. Cela me conduit donc à poser la question suivante « est-ce que le nombre des élèves qui privilégient la procédure P1 change après l'enseignement de dérsané ? ».

4. Synthèse des questionnaires-élèves

Dans cette partie, nous allons comparer les résultats des élèves aux deux questionnaires. Nous allons aussi présenter et comparer les erreurs très fréquemment commises par les élèves suivant les classes ou les lycées en essayant de mettre en évidence les erreurs[1] et les difficultés. De plus nous allons comparer les résultats des bons élèves par classe et lycée.

Signalons toutefois qu'il convient de rester prudent par rapport à ces résultats. En effet, nous n'avons pas eu l'occasion d'observer directement les pratiques des enseignants et des élèves et nous nous contenterons des réponses données aux questionnaires. C'est-à-dire, comme les élèves n'écrivent pas beaucoup de choses sur les feuilles, parfois nous éprouvons le besoin de leur demander des applications. De plus, quel que soit le nombre d'élèves soumis aux questionnaires, nous ne pensons pas que ce nombre permette de garantir que les résultats obtenus sont pleinement significatifs.

Définitions de la notion de fonction

Conformément aux manuels, la majorité des élèves définissent la notion de fonction de manière ensembliste. Il n'y a aucun élève qui donne les définitions des fonctions en termes de variable. De plus la comptine $\mathbf{C_o}$ et la réponse « correspondance entre deux ensembles » sont plus fréquentes que la définition ensembliste dans les classes très proches de l'enseignement du concours. On peut donc dire que dans ce type d'enseignement, les définitions n'occupent pas une place important mais les comptines et les recettes qui facilitent à mémoriser des résultats d'une définition ou d'un théorème…etc. sont très fréquents.

Le changement de cadres et d'écritures fait chuter le taux de réussite

Dans la question Q2Q1 (Questionnaire 2, Question n°1) pour laquelle on demande de passer de l'écriture de la langue naturelle à l'écriture algébrique, un très petit nombre des élèves de seconde reconnaissent à écrire algébriquement la fonction. De plus, il y a une grande chute de réussite et une forte hausse du taux de non-réponses dans cette question par rapport à la question dans laquelle il s'agit de calculer l'ensemble image d'une fonction définie algébriquement. Cela signifie que la grande majorité des élèves ont du mal à passer d'une écriture à l'autre et d'un cadre à l'autre.

Dans le lycée Normal, il n'y a aucun élève qui puisse écrire algébriquement la fonction. Mais le taux des élèves qui donnent la bonne réponse sans l'écriture algébrique de la fonction est

[1] Cf. Bachelard G.(1965), Brousseau G.(1983)

plus élevé que dans les autres lycées. Cela signifie que ces élèves ont des problèmes à investir un nouveau domaine mal maîtrisé (fonctions) mais ils peuvent quand même trouver la réponse correcte en s'appuyant sur des connaissances antérieures. En ce qui concerne la chute de réussite à cette question (Q2Q1) dans les autres lycées, surtout dans le lycée Anatolien, on peut avancer l'explication suivante : comme l'enseignement est très proche du concours dans ces lycées, les élèves n'ont pas, surtout ceux du lycée Anatolien, beaucoup d'habitude de ce type de questions qui les invitent à imaginer, à regarder ou à dire autrement. En d'autres termes, le fait que l'enseignement de dérsané (ou celui très proche du concours) a comme but de faire acquérir aux élèves une pratique les conduisant à résoudre beaucoup de questions d'entraînement du même type dans un automatisme engendre le comportement suivant : même si des connaissances en jeu étaient disponibles, les élèves sont déconcertés face aux questions non habituelles. C'est l'une des conséquences de cet enseignement « utilitaire ».

A quel nombre je devais égaler le coefficient de x ?

Comme le but principal de l'enseignement très proche du concours est de trouver la bonne réponse sans prendre en compte détails ni raisonnements, dans la question Q2Q7[2] consistant à trouver le coefficient de x à partir de la formule algébrique d'une fonction constante, une bonne partie des élèves qui traitent la question ont échoué en égalisant le coefficient de x à 1, ou à 8 ou la fonction à zéro. Cela signifie que les élèves, même ceux qui trouvent la bonne réponse, résolvent la question sans raisonnement, sans savoir pourquoi il faut égaliser le coefficient de x à zéro ou à un autre nombre. Comme nous l'avons déjà vu lors de l'analyse des manuels, le sens des fonctions en termes de variable est totalement absent. Donc l'élève est très loin d'être arrivé à l'idée que, dans l'expression des fonctions constantes, il n'y a pas de x, c'est-à-dire il n'y a pas de variable et ainsi qu'il n'y a pas de changement quand x change. C'est la raison pour laquelle ces erreurs résultent d'un oubli et d'une confusion. Nous pouvons aussi prendre en compte dans cette catégorie des erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a. Et nous pouvons dire que l'enseignement qui s'appuie sur le fait d'annoncer simplement des formules et des connaissances strictement nécessaires pour résoudre des questions n'est pas pertinent et ne garantit pas l'apprentissage de ces connaissances.

---

[2] Voir « résultats généraux des élèves », page 324.

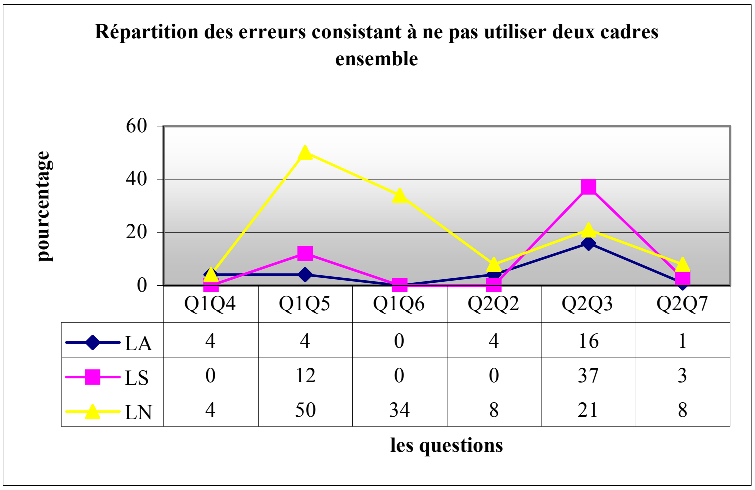
Abus de l'inverse des fonctions définies algébriquement

Dans certaines questions, il y a des élèves (Q2Q7 8%, Q2Q6 12% et Q2Q5 20%) qui trouvent, même si l'on ne leur le demande pas, l'inverse des fonctions qui figurent dans l'énoncé des questions. Nous pensons que c'est dû aux applications abusives des formules de l'inverse de fonctions définies algébriquement. Comme nous l'avons vu dans l'analyse des manuels, les élèves rencontrent fréquemment des exercices dans lesquels on leur demande de trouver l'inverse des fonctions. C'est pourquoi ils pensent peut-être que dans toutes les questions qu'on leur propose, il faut trouver l'inverse des fonctions de l'énoncé.

Erreurs consistant à ne pas articuler les deux cadres : cadre algébrique et cadre fonctionnel

Comme le montre bien le tableau ci-dessous, dans toutes les classes de seconde, il est possible de rencontrer des erreurs qui consistent à ne pas utiliser ensemble les deux cadres : cadre algébrique et cadre fonctionnel. L'élève essaie de résoudre la question dans un domaine qu'il connaît déjà bien. Il enlève simplement les fonctions, obtient des équations et ensuite il les résout. Ces erreurs se traduisent par la suppression des fonctions, une espèce de symptôme d'évitement de la notion de fonction. L'élève hésite à s'écarter du domaine familier (les équations à une inconnue) et à investir dans un nouveau domaine (les fonctions) mal maîtrisé. De plus le fait que le taux de ce type d'erreurs soit plus élevé chez les élèves du lycée Normal montre que ces élèves ont plus de lacunes théoriques plus profondes.

Par ailleurs, ces erreurs ne sont généralement pas très fréquentes dans les lycées anatolien et super. Mais dans certaines questions, nous constatons qu'elles apparaissent ou que leur taux augmente dans ces lycées. Cela nous conduit à dire que la complexité de ces questions provoque les erreurs qui ne sont pas déjà apparues.



	Q1Q4	Q1Q5	Q1Q6	Q2Q2	Q2Q3	Q2Q7
LA	4	4	0	4	16	1
LS	0	12	0	0	37	3
LN	4	50	34	8	21	8

Erreur de « mission inaccomplie »

Dans toutes les classes, même dans la classe de terminale, il est possible de rencontrer cette erreur. Lors qu'il s'agit de travailler sur une composée (implicite) comme dans les questions Q2Q2[3] et Q2Q3[4], l'élève pense que la composée n'est pas déjà effectuée. Il met la fonction implicite encore une fois à la place de x dans la composée. Nous appelons ce type d'erreur « erreur de mission inaccomplie ». Jusqu'à cette application l'élève rencontre peut-être plusieurs fois des situations dans lesquelles on lui demande, par exemple, de calculer l'image des nombres réels par des fonctions définies algébriquement. Toutes ces applications amènent l'élève à penser que dans les fonctions, on met ce qui existe dans la parenthèse de la lettre f à la place de x à deuxième terme[5]. Nous pensons que cette erreur résulte probablement de cette conception des élèves.

Recette $\mathbf{R_a}$ ou méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ (la mentalité utilitaire ou les mathématiques)

La recette $\mathbf{R_a}$ est majoritairement utilisée dans les lycées anatolien et super, contrairement au lycée Normal où il y a un très petit nombre des élèves qui utilisent cette recette. Par ailleurs, le nombre des élèves qui échouent en utilisant la recette $\mathbf{R_a}$ est plus élevé que celui des élèves qui échouent en utilisant la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Cela nous amène à dire que l'utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ a plus de risque d'erreurs que celle de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$.

De plus, du lycée Anatolien au lycée Super, nous avons constaté que le taux d'erreurs qui résultent de la mauvaise utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ augmente beaucoup (cf. la question Q1Q3). Comme le niveau des élèves descend du lycée Anatolien au lycée Super, nous pouvons conclure que plus le niveau des élèves descend, plus le taux d'erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette augmente. Autrement dit, ce type de situations (comme la recette $\mathbf{R_a}$) pose beaucoup de problèmes chez des élèves en difficulté. De plus dans le manuel que les élèves du lycée Anatolien suivent (le manuel officiel), les deux méthodes sont présentes. Et certains élèves s'excusent en disant « désolé j'ai oublié l'autre démarche la plus longue ». Mais le fait que dans l'une des classes de seconde de ce lycée il n'y a cependant aucun élève qui utilise la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ et que dans l'autre classe de seconde un très petit nombre des élèves la privilégient montre que l'introduction de la recette $\mathbf{R_a}$ empêche la maîtrise de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$.

[3] Voir « résultats des élèves par lycée », page 272.
[4] Voir « résultats des élèves par lycée », page 284.
[5] Voir « RP3 :erreur de *la mission inaccomplie* », page 264.

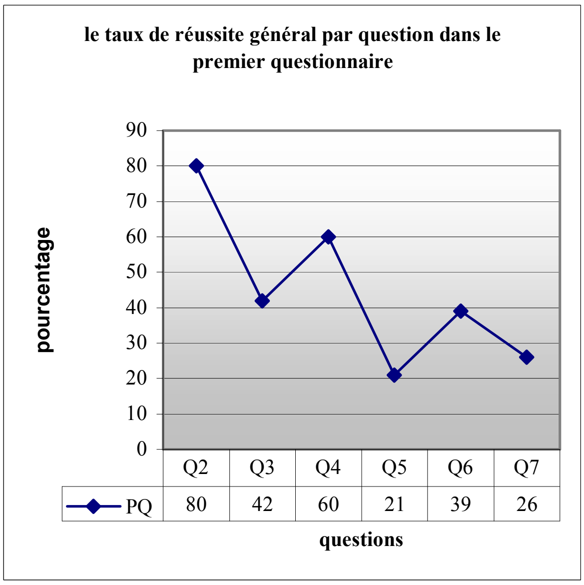
Par ailleurs, comme les élèves du lycée Normal se distinguent des autres par l'utilisation la plus fréquente de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$, ils se distinguent aussi par les erreurs commises. Ces élèves ont beaucoup de difficultés liées à l'enseignement précédent (par exemple ils font des erreurs lors d'une équation). C'est pourquoi une bonne partie d'entre eux, soit n'arrivent pas à terminer la résolution, et donnent des réponses incomplètes, soit font des erreurs algébriques dans cette démarche la plus mathématisée.

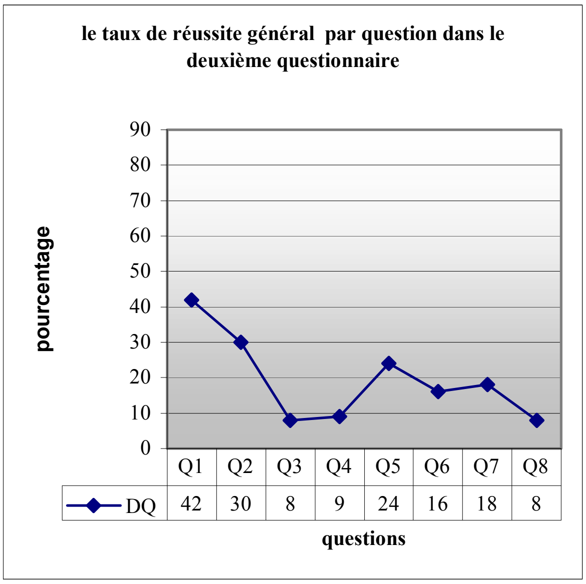
En ce qui concerne les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$, elles sont un peu loin des mathématiques comme la recette elle-même. Et elles sont plutôt dues à un oubli ou à une confusion. Ainsi les élèves qui commettent ces erreurs soit changent seulement les places, soit changent seulement l'un des signes…etc. Cela nous permet encore une fois de dire que dans l'utilisation de ce type de recettes il est très difficile de contrôler les démarches et de corriger des erreurs. Autrement dit, dans un cas d'oubli, il n'y a rien à faire que des erreurs ou une absence de réponse.

En ce qui concerne les élèves de terminale, les deux méthodes : recette $\mathbf{R_a}$ et méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ sont présentes dans les réponses de ces élèves. Il n'y a aucune erreur liée ni à l'une ni à l'autre et le taux d'utilisation de ces méthodes varie suivant les questions. C'est-à-dire que ces élèves peuvent choisir la méthode adéquate ou la moins risquée par rapport aux questions. Par exemple, dans la question Q1Q3 l'utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ est plus risquée que celle de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ parce que la fonction n'est pas rationnelle. On ne peut pas donc aisément utiliser la recette $\mathbf{R_a}$ c'est pourquoi le taux d'utilisation de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ est plus élevé que celui de la recette $\mathbf{R_a}$. Par contre dans la question Q1Q6, comme la fonction est rationnelle, le taux d'utilisation de la recette est plus élevé. Enfin, nous pouvons dire que ce type de situations ne pose pas de problèmes chez des bons élèves et qu'ils peuvent facilement passer de l'une des procédures à l'autre, en cas de difficulté ou de risque d'erreurs.

Chute de réussite dans le deuxième questionnaire

En général, dans le deuxième questionnaire le taux de réussite des élèves par question est plus faible et celui de non-réponses est plus élevé (surtout dans les classes où l'intérêt du concours n'est pas très fort) que dans le premier questionnaire.





Comme le montrent bien les graphiques ci-dessus, dans le premier questionnaire le taux de réussite varie de 21% à 80%. Dans les deux seules questions n°5 et n°7, il est inférieur à 30%. En ce qui concerne le deuxième questionnaire, le taux de réussite est au maximum de 42% et au minimum de 8%. Il y a seulement deux questions dans les quelles 30% ou plus de 30% des élèves arrivent à trouver la bonne réponse. De plus dans les trois questions le taux des élèves qui fournissent une réponse correcte ne dépasse même pas 10%. En regardant ces résultats nous pouvons d'emblée dire que les élèves ont moins de succès face aux questions du concours ou aux questions ressemblantes.

Même les bons élèves de seconde ont échoué dans le deuxième questionnaire : difficultés du concours

Ce tableau ci-dessous montre que dans le premier questionnaire la répartition des taux de réussite des bons élèves par question présente une diversité.

Répartition du nombre des taux de réussite au premier questionnaire des bons élèves par classe

	moins de 20%	20%-30%	30%-40%	40%-50%	50%-60%	60%-70%	70%-80%	plus de 80%
SA	**-**	**1**	**-**	**-**	**1**	**-**	**4**	**-**
SB	**-**	**-**	**1**	**-**	**3**	**1**	**-**	**1**
SC	**1**	**-**	**1**	**-**	**1**	**2**	**-**	**1**
SD	**2**	**-**	**-**	**-**	**-**	**2**	**-**	**2**
SE	**1**	**-**	**2**	**-**	**-**	**1**	**-**	**2**
SF	**3**	**-**	**1**	**1**	**-**	**-**	**-**	**1**
CT	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**6**

Moins de 20% :nombre de taux de réussite moins de 20%, 20%-30% :nombre de taux de réussite entre 20% et 30%,..., plus de 80% :nombre de taux de réussite plus de 80%, SA :seconde A, SB :seconde B, SC :seconde C..., CT :classe de terminale. Par exemple, les taux de réussite au premier questionnaire des bons élèves de seconde A sont les suivants : 27% dans la question n°7, 57% dans la n°4, 71% dans la n°3, 72% dans la n°6, 75% dans la n°5 et 79% dans la n°2.

Ainsi dans les classes de seconde du lycée Anatolien il y a seulement une question dans laquelle le taux de réussite est inférieur à 50%. En ce qui concerne les bons élèves des deux classes du lycée Super, il y a seulement deux questions auxquelles moins de la moitié des élèves répondrent correctement. Dans l'une des classes du lycée Normal, il y a une seule question et dans l'autre classe trois questions dans lesquelles le taux de réussite est inférieur à 30%.

Répartition du nombre de taux de réussite au deuxième questionnaire des bons élèves par classe

	moins de 20%	20%-30%	30%-40%	40%-50%	50%-60%	60%-70%	70%-80%	plus de 80%
SA	**3**	**1**	**-**	**1**	**-**	**2**	**1**	**-**
SB	**4**	**2**	**-**	**1**	**-**	**1**	**-**	**-**
SC	**7**	**1**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**
SE	**7**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**1**	**-**
SF	**7**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**1**
CT	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**8**

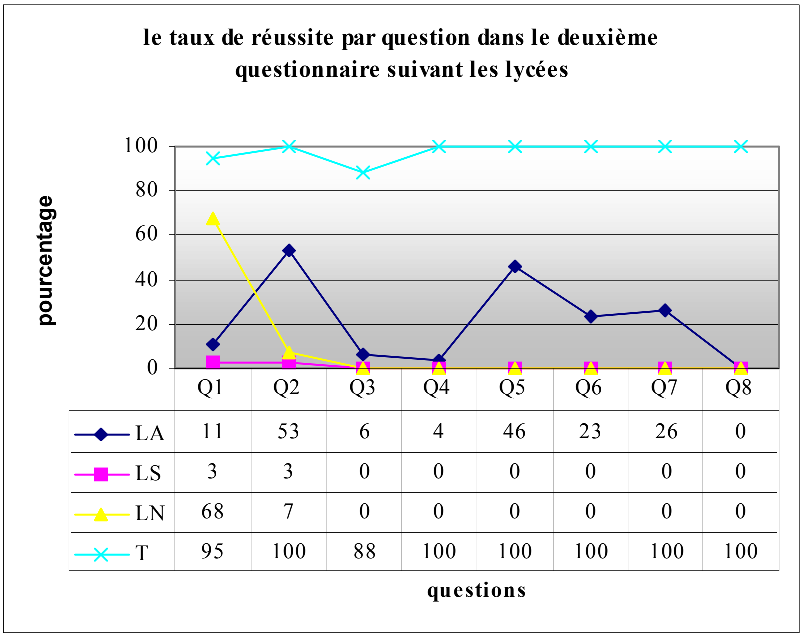
Moins de 20% :nombre de taux de réussite moins de 20%, 20%-30% :nombre de taux de réussite entre 20% et 30%,..., plus de 80% :nombre de taux de réussite plus de 80%, SA :seconde A, SB :seconde B, SC :seconde C..., CT :classe de terminale. Par exemple, les taux de réussite au deuxième questionnaire des bons élèves de seconde A sont les suivants : 0% dans les questions n°3 et n° 8, 13% dans la question n°4, 27% dans la question n°1, 47% dans la n°6, 63% dans la n° 7, 64% dans la n°2, 80% dans la n°5 .

Comme le montre bien ce tableau, dans le deuxième questionnaire, le taux de réussite des bons élèves descend remarquablement dans toutes les classes. Ainsi chez les bons élèves de la classe de seconde A ayant plus d'élèves de dérsané, le taux de réussite est supérieur à 40% dans quatre questions. Ce nombre descend à 2 questions dans l'autre classe de seconde du lycée Anatolien. En ce qui concerne les bons élèves du lycée Super et du lycée Normal, à part une seule question, dans toutes les questions de ce questionnaire le taux des élèves qui fournissent une réponse correcte ne dépasse pas 20%. En plus, dans la plupart des questions il est nul. Dans la classe de terminale, il n'y a aucune question à laquelle le taux de réussite est inférieur à 80%.

En regardant les résultats des bons élèves, nous pouvons dire qu'il y a une relation entre la réussite et la nature de l'enseignement en relation avec le concours (ou l'enseignement du dérsané). Par exemple, comme dans la classe de seconde A du lycée Anatolien, le nombre des élèves qui suivent les dérsanés est plus important que dans la classe de seconde B du même lycée et la première classe a plus de succès que la deuxième. De plus, il y a un grand échec des bons élèves des lycées super et normal. Tout cela montre que dans les questions du concours, comme la nature du concours est très technique, **les élèves qui ne suivent pas les dérsanés (même s'ils sont très bons élèves) échouent.**

Effets positifs de l'enseignement du dérsané (ou d'un enseignement très proche du concours) sur la préparation au concours

Dans le deuxième questionnaire proche du concours, nous constatons que les élèves du lycée Anatolien se distinguent des autres lycées par le taux de réussite le plus élevé. Par exemple, comme le montre bien le tableau ci-dessous, dans les six questions du deuxième questionnaire, il n'y aucun élève du lycée Super et normal qui donne la bonne réponse. Tandis que dans les classes de seconde du lycée Anatolien, à l'exception de la question n°8, il y a toujours des élèves qui fournissent une réponse correcte. En plus, près de la moitié de ces élèves traitent correctement l'une des questions de ce groupe . Quant à la classe de terminale, à part deux questions, il y a une réussite totale dans les deux questionnaires. Tout cela signifie qu'il y a des effets positifs de l'enseignement du dérsané (ou de l'enseignement très proche du concours) sur la préparation au concours et en d'autres termes que seul l'enseignement du lycée ne suffit pas à la préparation au concours.



	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
LA	11	53	6	4	46	23	26	0
LS	3	3	0	0	0	0	0	0
LN	68	7	0	0	0	0	0	0
T	95	100	88	100	100	100	100	100

Par ailleurs, dans la question Q2Q8, à part un élève, tous les élèves de terminale fournissent une réponse correcte. Mais chez les élèves de seconde du même lycée, il y a une réussite nulle à cette question. Cela traduit peut-être que les élèves complètent leurs lacunes soit dans les classes suivantes soit dans des dérsanés.

Le manque ou la mauvaise maîtrise des connaissances antérieures des élèves font chuter le taux de réussite

Comme nous l'avons déjà vu lors de l'analyse des thèmes du concours (cf. le chapitre IV), la plupart des questions du concours portent sur plusieurs connaissances antérieures des élèves.

Ainsi les manuels MPC et certaines manuels ML proposent majoritairement des exercices de ce type. Mais nous avons vu dans l'analyse des questionnaires, surtout dans le deuxième questionnaire, que les élèves de seconde ont de grosses difficultés à mettre en fonctionnement des connaissances antérieures. Par exemple, dans la question Q2Q4 le taux des erreurs portant sur une mauvaise utilisation de l'identité remarquable est très élevé et près de la moitié des élèves qui traitent la question n'arrivent pas à trouver la bonne réponse à cause de ce type d'erreurs. C'est la même chose pour la question Q2Q5. Ainsi une bonne partie des élèves échouent à cause du manque de connaissances ou d'erreurs liées à la résolution de systèmes linéaires d'équations (c'est le cas pour 42% des élèves qui traitent la question). Tous ces résultats confirment aussi les dires de la grande majorité des enseignants qui expriment que la plupart des erreurs des élèves proviennent de leurs connaissances antérieures (cf. le chapitre V).

Les manuels sont très pauvres en géométrie et les résultats des élèves aussi

Comme nous l'avons déjà vu (cf. le chapitre II), les manuels (surtout les manuels ML) sont très pauvres géométriquement. C'est la raison pour laquelle dans la question Q2Q8 où il s'agit de travailler sur la représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormé les résultats des élèves de seconde ne sont pas bons. Dans ces classes il n'y a ainsi aucun élève qui donne la bonne réponse. Les erreurs des élèves s'intensifient lors de la détermination graphique de l'image de 2 par f^{-1}. Il n'y a aucun élève qui la trouve. Cela montre que ces élèves ont de grandes difficultés à lire et à interpréter la représentation graphique des fonctions et de leurs inverses dans un même repère orthonormé.

Si le signe de l'antécédent change, celui de l'image change aussi

La question Q2Q5 nous a permis de constater l'erreur qui consiste à trouver simplement l'image de 2 par f en pensant que si l'image de -2 par f est 5, celle de 2 est donc –5. En général cette erreur n'est pas très fréquente, ainsi il y a seulement 3% des élèves qui la commettent. Mais chez près du quart des élèves du lycée Super elle est cependant présente. Il nous semble que ce type d'erreurs résulte des attitudes des élèves face à des équations. En d'autres termes ces élèves traduisent peut-être une mauvaise généralisation de la comptine « si l'on fait quelque chose à premier terme d'une équation, pour ne pas détruire l'égalité, il faut faire la même chose à l'autre terme » ou de la suivante « si le signe de l'antécédent change, celui de l'image aussi ».

Résoudre correctement des questions est très important mais ce n'est pas suffisant
Chaque année, à la suite du concours, il est possible d'entendre des regrets des élèves à la télévision ou partout. Et les regrets les plus importants correspondent généralement au temps. Beaucoup d'élèves disent qu'ils n'ont pas réussi à terminer les questions et qu'il y en avait encore pas mal qu'ils auraient pu résoudre. Comme nous l'avons déjà indiqué plusieurs fois, dans ce concours résoudre correctement des questions n'est pas suffisant, il faut les résoudre très vite en privilégiant (de ce fait) les démarches les plus courtes.
Si on regarde les résultats des élèves de terminale, le taux de réussite est très satisfaisant et il ne descend jamais en dessous de 80% dans les deux questionnaires mais nous avons cependant constaté que ces élèves ont du mal à privilégier des méthodes les plus avantageuses. Par exemple, dans la question Q2Q4, un très petit nombre d'entre eux peuvent suivre la procédure la plus courte P1 en remarquant l'identité remarquable et en factorisant la fonction. Dans la question Q2Q9, c'est la même chose : il n'y a aucun élève qui mette en fonctionnement la procédure la plus économique P1. Cela montre que la plupart des élèves, même s'ils sont très bons élèves au lycée (il faut rappeler que ces élèves n'avaient pas encore vu les fonctions dans le dérsané lors de la passation des questionnaires), ne peuvent pas, tout seuls, privilégier les procédures les plus courtes.

5. Conclusion

Les élèves définissent les fonctions de manière ensembliste comme on leur a appris. Les définitions en termes de variable sont totalement absentes. Comme au concours les définitions ne sont pas très importantes, la comptine $\mathbf{C_0}$ qui sert à mémoriser les résultats de la définition ensembliste est privilégiée et la définition ensembliste complète est moins fréquente dans les classes où l'enseignement est très proche du concours.
Les élèves de seconde n'ont pas d'habitude de travailler dans d'autres cadres que dans le cadre algébrique. C'est pourquoi dans les questions qui demandent un changement de cadre ou d'écriture le taux de réussite chute remarquablement par rapport aux questions analogues où il s'agit de travailler dans le cadre algébrique. De plus, ce type de questions (avec un petit changement dans l'énoncé des questions habituelles) engendre des élèves déconcertés, même si les connaissances en jeu sont disponibles, chez les élèves qui subissent un enseignement très proche du concours. Cela renforce l'idée que dans un enseignement très proche du concours, les élèves mémorisent les types de questions et leurs démarches.
Par le privilège accordé par les élèves aux procédures les plus courtes, les lycées très proches de l'enseignement du concours et ceux très proches des programmes se distinguent fortement.

Ainsi la recette $\mathbf{R_a}$ est plus fréquente dans le premier tandis que dans le deuxième il n'y a presque aucun élève qui l'utilise. Comme les procédures privilégiées sont différentes, les erreurs commises par les élèves sont aussi différentes dans ces deux types de lycée. Les erreurs liées à la recette $\mathbf{R_a}$ proviennent plutôt d'un oubli ou d'une confusion. De plus ce type de procédures ne permet pas aux élèves de contrôler leurs démarches et de corriger leurs erreurs. Dans un cas d'oubli, il ne reste à l'élève qu'à commettre des erreurs ou qu'à ne pas traiter les questions. Comme le taux d'erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ est plus élevé chez des élèves en difficulté, on peut dire que ce type de situations pose plus de problème chez eux. En ce qui concerne les erreurs correspondant à la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$, elles sont plutôt dues à une résolution incomplète ou à des erreurs algébriques et les élèves qui échouent en utilisant cette méthode sont moins nombreux que ceux qui échouent avec la recette $\mathbf{R_a}$. On peut donc dire que l'utilisation de cette dernière engendre plus de risque d'erreurs.

Les très bons élèves n'ont de mal ni à l'utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ ni à l'utilisation de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Ils privilégient l'une ou l'autre de ces méthodes suivant les questions, ils peuvent ainsi facilement passer de l'une à l'autre.

Il y a une relation entre le taux de réussite aux questions du concours et le niveau de l'enseignement très proche du concours. Ainsi on constate un plus grand échec pour les élèves qui ne subissent pas ce type d'enseignement, même ils sont bons élèves. On peut donc dire que tout seul l'enseignement du lycée n'est pas satisfaisant pour préparer des élèves au concours. Autrement dit, il y a des effets positifs de l'enseignement très proche du concours sur la préparation au concours.

Par ailleurs, dans les manuels, des exercices qui demandent de trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement sont abusivement proposés. C'est pourquoi une bonne partie des élèves trouvent, même si l'on ne le leur demande pas, l'inverse des fonctions qui figurent dans l'énoncé des questions.

La plupart des questions du concours portent sur plusieurs connaissances antérieures des élèves. Dans la plupart des manuels il y a aussi beaucoup d'exercices de ce type mais les élèves de seconde ont cependant de grosses difficultés à mettre en fonctionnement des connaissances antérieures dans les questions qui le leur demandent. Une bonne partie des exercices correspond soit au manque des connaissances antérieures soit à leur mauvaise maîtrise.

Comme les manuels sont très pauvres en géométrie, les élèves de seconde ont beaucoup de difficultés à lire et à interpréter la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé. De plus les élèves ne peuvent pas comprendre que la représentation graphique d’une fonction dans un repère orthonormé est également celle de son inverse en changeant les axes.

Comme dans le concours d’entrée à l’université le temps est très important, résoudre correctement des questions n’est pas suffisant, il faut les résoudre le plus vite possible en privilégiant les démarches les plus courtes mais la plupart des élèves ont du mal à privilégier des méthodes les plus avantageuses. On peut donc dire que les élèves, même s’ils sont de très bons élèves dans le lycée, ne peuvent pas tout seuls privilégier les procédures les plus courtes.

CHAPITRE VII

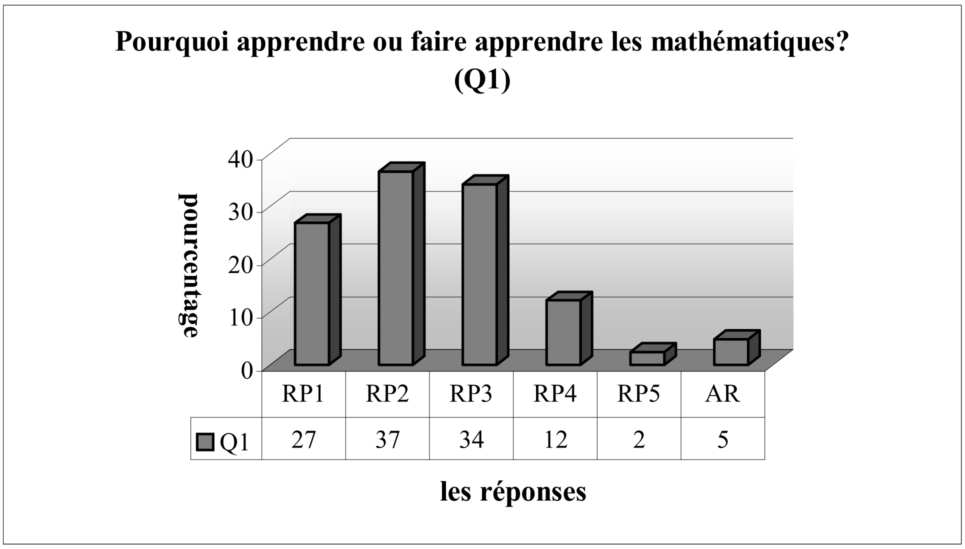
ANALYSE DES QUESTIONNAIRES-ETUDIANTS SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES EN TURQUIE

Plan du chapitre VII :

Comme nous l'avons déjà dit, dans la partie méthodologique, afin de vérifier les effets négatifs de l'enseignement du dérsané (ou l'enseignement très proche du concours) sur les études supérieures des élèves, nous disposons des questionnaires provenant d'étudiants qui font leurs études dans des différentes universités de la Turquie. Dans cette partie, nous allons analyser les réponses des étudiants question par question. De plus, certaines réponses qui nous semblent représentatives vont accompagner notre analyse. Nous allons terminer cette partie en tirant une conclusion.

1. Analyse des questionnaires-étudiants

1.1 Question n°1 : pourquoi on se sent le besoin d'apprendre ou de faire apprendre les mathématiques ?



RP1 *: les mathématiques sont des bases de toutes les sciences.* ***RP2*** *: les mathématiques existent dans toute la vie et elles nous aident à résoudre les problèmes de la vie.* ***RP3*** *: les mathématiques développent la puissance de pensée, d'interprétation et de logique.* ***RP4*** *: les mathématiques nous aident à connaître l'environnement et l'espace, avec leur aide on peut différemment regarder la vie et toutes les choses et les mathématiques sont la philosophie de la vie.* ***RP5*** *: pour réussir aux examens (ou on est obligé….).* ***AR*** *: autres réponses.*

Le tableau ci-dessus montre que 37% des étudiants affirment que les mathématiques existent dans toute la vie, qu'elles sont nécessaires pour une vie ordinaire et que grâce aux mathématiques on peut résoudre des problèmes qu'on rencontre dans la vie. Pour plus du tiers des étudiants, les mathématiques développent la puissance de pensée, d'interprétation et de logique. Les mathématiques amènent des gens à s'approcher des évènements de manière plus objective et plus logique. Par ailleurs, 27% des étudiants pensent que toutes les sciences se basent sur les mathématiques, qu'on doit les développements scientifiques et techniques aux mathématiques. Tandis que le taux des étudiants qui disent que les mathématiques nous aident à connaître l'environnement et l'espace, que grâce à elles on peut différemment regarder la vie et toutes les choses et qu'elles sont la philosophie de la vie est de 12%. Il y a un très petit nombre d'étudiants qui expriment leurs raisons d'apprendre ou de faire apprendre les mathématiques en disant que c'est pour réussir aux examens et qu'on y est obligé.

Citons quelques réponses intéressantes et représentatives :

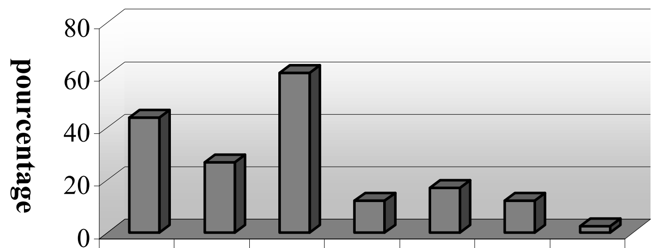
Comme actuellement je suis en première année, je veux vraiment apprendre les mathématiques. Mais ce n'est pas suffisant. Pour moi les mathématiques ont vraiment commencé à devenir un hobby. Essayer de résoudre des problèmes me fait beaucoup de plaisir et quand j'ai trouvé la bonne réponse, je suis très contente. Désormais les mathématiques me semblent comme une philosophie et une conception du monde. Je pense que résoudre des problèmes en mathématiques m'aide à résoudre des problèmes à la maison et que les mathématiques nous aident aussi à penser avec plus logique et plus raisonnablement. Est-ce qu'il est possible qu'un vrai mathématicien soit idiot ? **(une étudiante, en première année, à l'Université Erciyes).**

1.2 Question n°2 : d'après vous quelles sont les différences entre les mathématiques effectuées aux lycées, aux dérsanés à l'université ?

La plupart des étudiants affirment que les vraies mathématiques sont celles de l'université, qu'on y fait des mathématiques « détaillées » en posant la question du « pourquoi ».

Près de la moitié des étudiants répondent à cette question comme suit : « dans des dérsanés résoudre des questions et trouver la bonne réponse sont très importants, sans prise en compte des détails. L'objet principal de cet enseignement est de faire passer aux élèves le concours. De plus les dérsanés apprennent aux élèves comment mémoriser des formules nécessaires et des connaissances essentielles ».

Les mathématiques aux dérsanés, aux lycées et à l'université (Q2)



	RP1	RP2	RP3	RP4	RP5	RP6	AR
Q2	44	27	61	12	17	12	2

les réponses

***RP1** : dans les dérsanés résoudre des questions et trouver la bonne réponse sont très importants sans prise en compte des détails, l'objet principal est de faire passer le concours, ils apprennent aux élèves comment mémoriser. **RP2** : les mathématiques de l'université sont très abstraites et théoriques. **RP3** : les vraies mathématiques sont celles de l'université. On y fait les mathématiques détaillées en posant la question "pourquoi". **RP4** : les mathématiques du lycée et dérsané reviennent à la mémorisation des formules... **RP5** : les mathématiques effectuées au lycée et dérsané ont pour objet de faire passer le concours et la classe suivante. **RP6** : les mathématiques du lycée sont plus détaillées que celles du dérsané. **AR** : autres réponses*

27% d'entre eux trouvent que les mathématiques de l'université sont très abstraites et théoriques tandis que le taux des étudiants qui disent que les mathématiques effectuées au lycée et au dérsané ont pour objet de faire passer le concours et les classes suivantes est de 17%.

Pour 12% des étudiants, les mathématiques au dérsané consistent à l'apprentissage par cœur des formules sans raisonnement. De plus, en mettant aussi les mathématiques au lycée dans la même catégorie, ces étudiants se rapprochent de leurs collègues qui donnent la réponse RP1. Ce taux est aussi valable pour ceux qui disent que les mathématiques du lycée sont plus détaillées que celles du dérsané.

Nous donnons quelques réponses qui nous semblent représentatives :

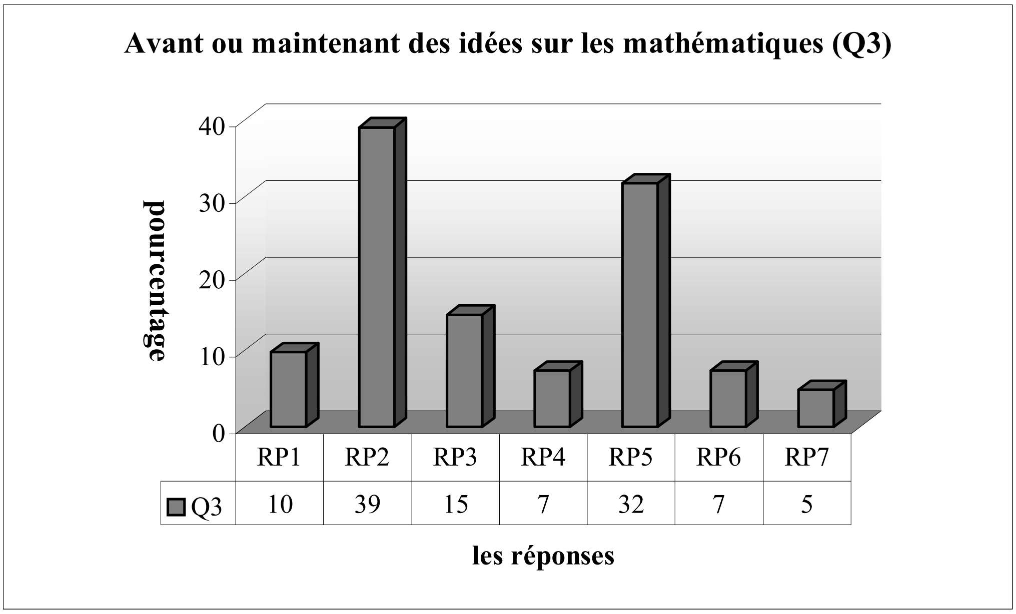
> *Dans les dérsanés on ne demande pas de raisonnement. Le but essentiel est de résoudre des questions en trouvant les démarches les plus courtes. Au lieu de faire des mathématiques il s'agit plutôt de faire apprendre comment mémoriser. En ce qui concerne les mathématiques au lycée, si vous avez de la chance, c'est-à-dire si vous avez un bon professeur de mathématiques, vous pouvez apprendre des nouvelles connaissances plus théoriques et plus pratiques dans les programmes officiels de lycée.*

En ce qui concerne l'université, toutes les choses changent. Parce qu'on fait apprendre le raisonnement sous-jacent à ce que vous avez appris jusqu'à maintenant **(une étudiante, en quatrième année, à l'Université Ankara).**

A l'université on descend en profondeur dans toutes les notions. On apprend complètement la logique de ces notions et avec cela on peut découvrir soi-même beaucoup de choses en mathématiques. En ce qui concerne les mathématiques du lycée, elles sont très artificielles et se fondent sur l'apprentissage par cœur **(une étudiante, en deuxième année, à l'Université Ege).**

Dans les dérsanés on se focalise complètement sur la pensée rapide et soigneuse. En ce qui concerne le lycée, on peut présenter des notions plus détaillées qu'aux dérsanés. Mais on ne cherche quand-même pas assez à répondre à la question du « pourquoi ». D'après moi, si on le faisait au lycée, les étudiants de l'université seraient très à l'aise **(une étudiante, en première année, à l'Université Ege).**

1.3 Question n°3 : avant de commencer vos études supérieures qu'est-ce que vous pensiez sur les mathématiques et maintenant qu'est que vous en pensez ?



RP1 *: pas de différence.* ***RP2*** *: avant de commencer l'université les mathématiques me paraissaient amusantes et faciles. Je les aimais beaucoup mais maintenant elles sont devenues difficiles et complexes.* ***RP3*** *: les mathématiques de l'université et celles du lycée sont très différentes.* ***RP4*** *: à cause du système du concours je rencontre beaucoup de difficultés.* ***RP5*** *: j'ai vu que les mathématiques ne contiennent pas seulement des nombres et que la logique et la question du "pourquoi" sont très important.* ***RP6*** *: d'abord j'ai éprouvé des difficultés, s'habituer à l'enseignement de l'université a pris du temps.* ***RP7*** *: maintenant j'aime plus les mathématiques elles me donnent du plaisir.*

Selon le tableau précédent, 39% des étudiants disent qu'avant de commencer l'université les mathématiques leur paraissaient amusantes et faciles, qu'ils les aimaient beaucoup mais maintenant elles sont devenues difficiles et complexes. Par ailleurs, il y a un taux de 32% des étudiants qui disent qu'à l'université ils ont remarqué que les mathématiques ne contiennent pas seulement des nombres et qu'expliquer des raisons et chercher des réponses à la question du « pourquoi » sont très importants. Un tiers des étudiants affirment que les mathématiques de l'université et celles du lycée sont très différentes. Par contre, selon 10% d'entre eux il n'y a aucune différence entre deux mathématiques. Le taux des étudiants qui disent qu'à cause du système du concours ils rencontrent beaucoup de difficultés à l'université et celui des étudiants qui affirment qu'au début ils ont éprouvé des difficultés et que s'habituer à l'enseignement de l'université a pris du temps sont identiques et de 7% (RP4 et RP6). Un très petit nombre des étudiants disent qu'actuellement ils aiment plus les mathématiques et qu'elles leur donnent du plaisir.

Citons quelques réponses :

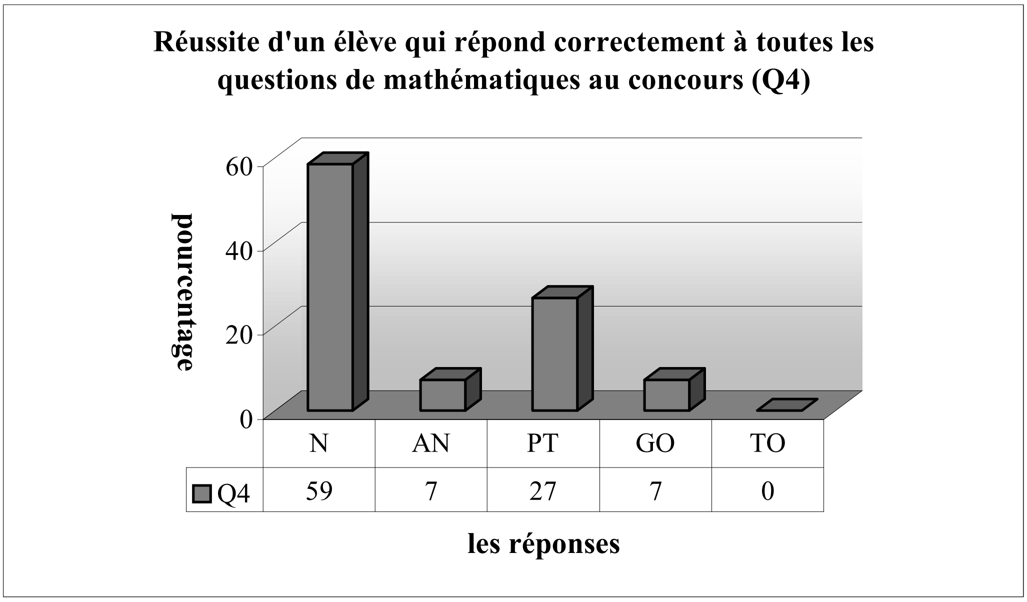
Avant de commencer mes études supérieures, j'aimais les mathématiques. Je les aime encore. Maintenant les opérations que je fais me semblent plus significatives. Parce que j'ai appris leurs démonstrations. Je crois que mon pouvoir de pensée est plus développé **(une étudiante, en quatrième année, à l'Université Ankara).**

Le fait qu'au lycée on nous dise de marcher sur le chemin A et à l'université de marcher sur le chemin B est très étrange. Les mathématiques du lycée et celles de l'université sont très différentes. Avant de commencer mes études supérieures, je n'étais pas du tout au courant de ce type de mathématiques. A mon avis, il faudrait qu'au lycée il y ait un semestre de passage qui permet de préparer des élèves à l'université. Mais en ce moment-là cela ne servirait pas au CEU **(une étudiante, en première année, à l'Université Erciyes).**

Avant de commencer mes études supérieures, j'avais une très grande sympathie pour les mathématiques. Après les avoir commencées, cette sympathie est petit à petit devenue antipathie **(un étudiant, en première année, à l'Université Firat).**

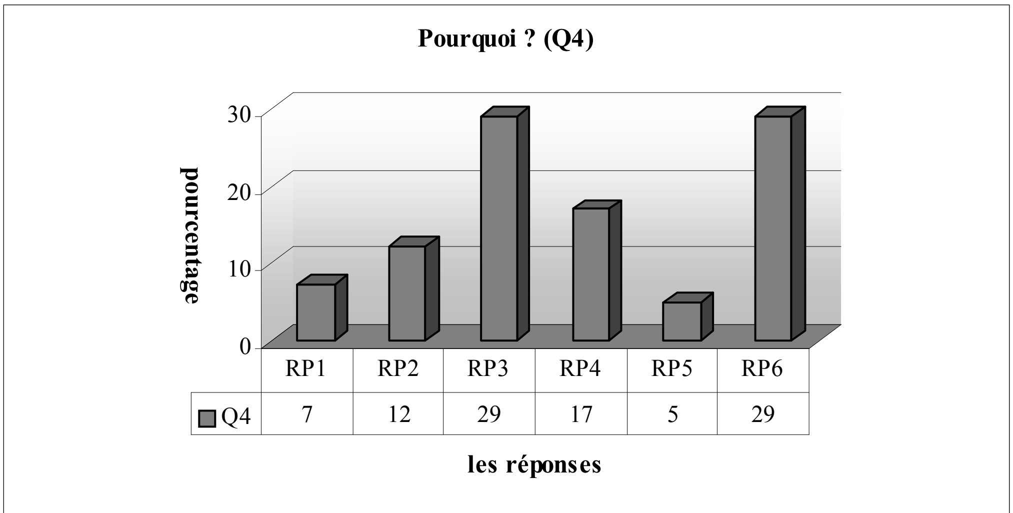
Avant de commencer mes études supérieures, les mathématiques étaient plus faciles et plus compréhensibles. Mais après les avoir commencées, ce type de mathématiques a disparu et les mathématiques ont commencé à me sembler complexes **(une étudiante, en troisième année, à l'Université Gazi).**

1.4 Question n°4 : est-ce qu'il est toujours possible de dire qu'un élève qui répond correctement à toutes les questions de mathématiques au concours va réussir dans ses études supérieures ? Pourquoi ?



N : *non,* ***AN*** : *absolument non,* ***PT*** : *pas toujours,* ***GO*** : *généralement oui,* ***TO*** : *toujours oui*

Comme le montre bien le tableau ci-dessous, il y a seulement 7% des étudiants qui disent qu'il est généralement possible de dire qu'un élève qui répond correctement à toutes les questions de mathématiques au concours va réussir dans ses études supérieures. Par contre 59% répondent à cette question en disant « non », 7% en disant « absolument non » et 27% en disant « pas toujours ».



RP1 *: le concours n'estime pas des connaissances mathématiques…* ***RP2*** *: les mathématiques effectuées au lycée consistent en formules simples…* ***RP3*** *: les causes venant du système du concours…* ***RP4*** *: la mentalité utilitaire et d'apprendre par cœur.* ***RP5*** *: il peut réussir parce que les cours à l'université s'établissent sur l'enseignement de lycée.* ***RP6*** *: le lycée et l'université sont très différents.(il n'y a aucun élève qui donne plusieurs réponses)*

En ce qui concerne les raisons que les étudiants expriment, 29% citent des causes provenant du système du concours. Ainsi ils expriment leurs raisons en disant que le concours comprend des questions à choix multiples et l'élève les résout en utilisant des formules sans raisonnement, que la première année de l'université se fonde sur les programmes de la classe de première et de terminale. Puisque le contenu du concours se limite au programme de seconde, il est tout à fait normal que l'élève ait échoué. A cause des dérsanés, même un élève qui ne connaît pas de grandes choses en mathématiques peut être devenu quelqu'un qui résout aisément des questions du concours. Ce taux est aussi valable pour les étudiants qui affirment que les mathématiques du lycée et celles de l'université sont très différentes, que les mathématiques de l'université sont plus théoriques. Alors un élève peut être fort en pratique mais pas en théorie et les questions du concours sont très pratiques et ne sont pas proches des notions de l'université.

D'après 17% des étudiants, c'est impossible parce que la mentalité utilitaire et l'apprentissage par cœur ne marchent plus à l'université. Ainsi ils disent que les mathématiques dont on a besoin au concours s'appuient sur les apprentissages par cœur. Par ailleurs, 12% affirment que comme les mathématiques effectuées au lycée consistent à appliquer des formules, il est difficile que ce type d'élève puisse toujours réussir. Tandis que le taux des étudiants qui disent que le concours est incapable de faire évaluer les connaissances mathématiques des élèves est de 7%. Il y a un très petit nombre des étudiants qui affirment que comme les cours de l'université s'établissent sur l'enseignement du lycée, l'élève en question peut en général réussir dans ses études supérieures.

Nous citons quelques réponses des étudiantes :

Niçin?
Hayır kesinlikle mümkün değildir. Çünkü orada yaptığımız gördüğümüz ve çözdüğümüz sorularla pek alakası yok benim matematik 43 olmasına rağmen pek beceremiyorum. ama yinede bu Türkiye şartlarında yapabileceğim pek birşey yok. ondan mecburen bu bölümü bitirmek ZORUNDAYIM!

C'est absolument impossible. Parce que l'enseignement de l'université n'a pas de rapport avec les questions que nous avons résolues au concours. Moi j'ai résolu 43 questions sur 45. Malgré cela je n'y arrive pas. Dans des conditions de la Turquie actuelle, je n'ai pas de grandes choses à faire. C'est pourquoi je DOIS terminer ces études **(un étudiant, en première année, à l'Université Firat).**

Non. Au moins avec ce système actuel du concours c'est absolument non. Parce que ce système se base complètement sur l'intelligence. Or avant de l'abolition de la deuxième étape du concours, il fallait avoirs des connaissances **(une étudiante, en première année, à l'Université Ege).**

Niçin?
Bu hesaplıkla yanlıştır. Matematikte test sınavı
öğrencinin bilgisini ya da konuya hakim olup
olmadığını göstermez. 2x4 8 yapar 16÷2 de
8 yapar sonuçlar aynı ama işlemler farklı
üniversitede bizden istenen sonuçtan çok çözümdür.

C'est absolument non. Les questions à choix multiples en mathématiques ne peuvent pas vérifier que l'élève a bien maîtrisé une notion ou la sait bien. 2×4 ça fait 8, 16 ÷2 ça fait aussi 8, les résultats sont pareils mais les opérations sont différentes. A l'université on nous demande plutôt la résolution que le résultat **(un étudiant, en deuxième année, à l'Université Ege).**

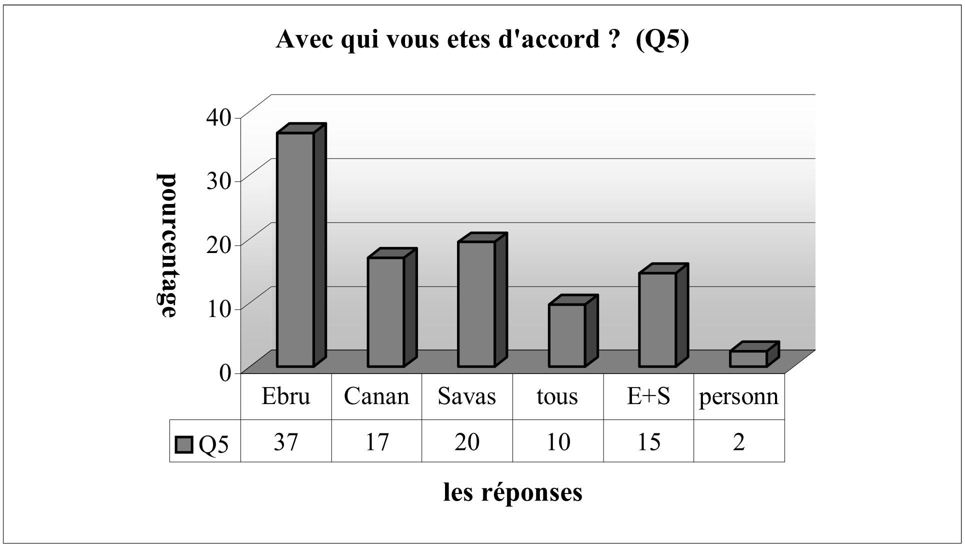
1.5 Question n°5 : parmi les étudiants de mathématiques à l'université un dialogue se passe comme ci-dessous :

Ebru : à cause de notre système de l'enseignement on a appris les mathématiques dans le dérsané seulement pour réussir au concours au lieu d'apprendre sérieusement quelque chose. Maintenant je rencontre beaucoup de difficultés, les cours m'apparaissent très abstraits et je déteste interpréter, prouver des théorèmes, expliquer des relations.

Canan : je ne pense pas comme toi. Cet enseignement dont j'ai déjà profité au concours est encore utile pour moi. Moi je crois que l'enseignement de dérsané m'a assuré différentes façons de penser.

Savaş : Moi je vous assure que je suis très étonné. Quant j'étais au lycée j'ai appris une certaine mathématique pour passer en classe suivante, Quant je suivais le dérsané, je me suis occupé d'une autre pour réussir au concours et maintenant je suis en face d'une troisième mathématique qui contient des lettres comme a, b, c…

Avec quel (ou quels) élève(s) êtes-vous d'accord ? Précisez votre réponse en interprétant.



Ebru *: je suis d'accord avec Ebru,* ***Canan*** *: je suis d'accord avec Canan,* ***Savas*** *: je suis d'accord avec Savas* ***Tous*** *: je suis d'accord avec tous les trois,* ***E+S*** *: je suis d'accord avec Ebru et Savaş,* ***Personne*** *: je ne suis d'accord avec personne*

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, 37% des élèves affirment que l'enseignement de dérsané pose des problèmes dans leurs études supérieures et ils trouvent très abstraites les mathématiques à l'université. De plus ils n'aiment pas du tout les questions qui leur demandent de prouver, d'interpréter et de démontrer des théorèmes. Par ailleurs, 20% des étudiants sont très étonnés devant les mathématiques effectuées à l'université. Ils se plaignent d'avoir rencontré plusieurs « mathématiques » différentes pendant leurs études au lycée, au dérsané et à l'université. De plus ils avouent qu'ils ont appris les mathématiques au dérsané pour passer le concours et au lycée pour passer dans les classes suivantes. Un tiers des étudiants partagent les idées que Savas et Ebru lancent. Si l'on regroupe ces trois types de réponses communes, on constate que 72% des étudiants pensent comme Ebru ou Savas ou les deux.

Il y a seulement 17% des élèves qui disent qu'ils se sont servis de l'enseignement de dérsané au concours et qu'ils s'en servent encore dans leurs études supérieures. Ils affirment aussi que cet enseignement leur a donné différentes façons de penser, 10% sont d'accord avec les trois collègues tandis que pour un très petit nombre ces idées sont inacceptables (personne, 2%).

Nous voudrions terminer cette partie en citant quelques réponses :

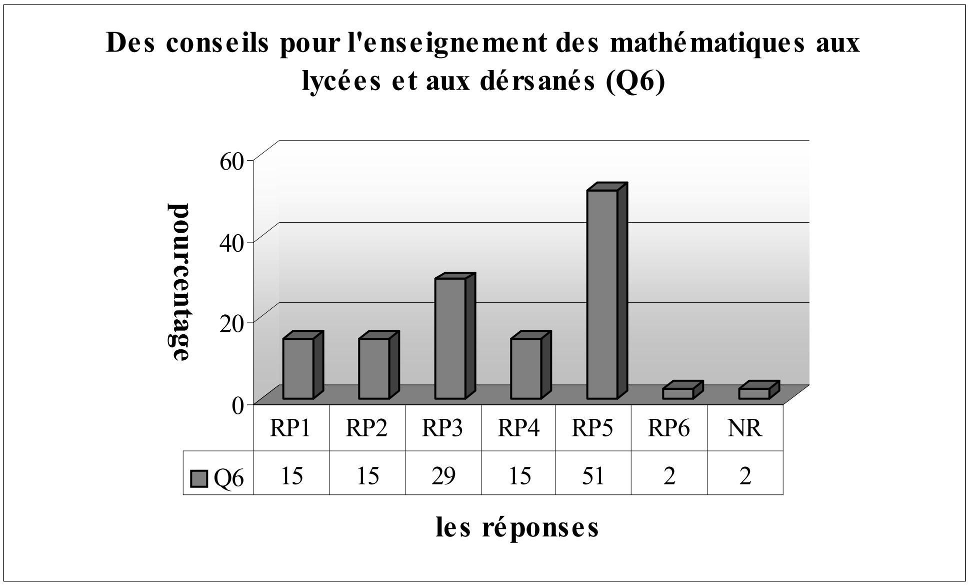
Moi je suis d'abord d'accord avec Ebru. Actuellement il me semble vraiment que les mathématiques sont très abstraites. C'est pourquoi j'ai beaucoup de difficultés à comprendre ce qu'on fait dans les cours. Je n'aime pas du tout faire des démonstrations. De plus je suis aussi d'accord avec Savas. Parce que c'est exactement vrai que nous sommes très étonnés. Et maintenant nous souffrons des résultats de ces erreurs **(une étudiante, en première année, à l'Université Erciyes).**

Je suis d'accord avec Ebru et Savas. Parce que les mathématiques que nous avons fait jusqu'à maintenant nous ont habitué à la pratique. Mais les mathématiques de l'université nous obligent à penser. De plus comme au lycée et au dérsané on ne nous a pas donné de bases, je rencontre des difficultés (une étudiante, en première année, à l'Université Firat).

Je suis d'accord avec Canan. Parce que je suis incapable d'apprendre par cœur. Et j'ai essayé d'apprendre ce qu'on m'a présenté au dérsané, en maîtrisant bien. Et maintenant j'en profite dans mes études actuelles **(une étudiante, en première année, à l'Université Erciyes).**

1.6 Question n°6 : Si l'on vous demande des conseils pour l'enseignement des mathématiques aux dérsanés et aux lycées, qu'est-ce que vous direz ?

Comme le montre bien le tableau ci-dessous, plus de la moitié des étudiants donnent des conseils sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Ces élèves sont totalement opposés à un enseignement des mathématiques qui consiste à apprendre par cœur, à négliger des détails et à ne pas mettre en place des raisonnements. Et ils veulent qu'on donne un enseignement qui amène des élèves à penser et à interpréter ce qu'on leur apprend. Ils ne trouvent pas non plus juste le fait que tous les efforts ne soient destinés qu'au concours. De plus ces étudiants affirment que le but principal des lycées et des dérsanés doit être de préparer des élèves à l'enseignement de l'université plutôt qu'au concours.



RP1 *: des conseils liés au système du concours.* ***RP2*** *: des conseils liés au système de l'enseignement.* ***RP3*** *: des conseils liés à l'enseignant.* ***RP4*** *: des conseils liés aux programmes du lycée.* ***RP5*** *: des conseils liés à l'enseignement des mathématiques (il faut supprimer les institutions qui provoquent d'apprendre par cœur).* ***RP6*** *: des conseils liés à l'élève.* ***NR*** *: non-réponse.*

Maintenant nous donnons quelques réponses qui nous paraissent intéressantes ou typiques :

Je ne trouve pas juste le fait que tous les efforts soient destinés à préparer des élèves au concours. Je conseille de faire apprendre la vie, c'est-à-dire les vraies mathématiques. Les mathématiques effectuées au lycée ne font plaisir à aucun élève. Comme des élèves ne s'orientent que vers le concours, ils pensent toujours à ce concours. Personne n'est au courant que les mathématiques font partie de la vie **(un étudiant, en première année à l'Université Firat).**

Finalement il faut que le but des lycées et des dérsanés soit de préparer des élèves à l'enseignement de l'université. Mais ils ne préparent des élèves qu'au concours. Ils sont absolument très loin de les préparer aux mathématiques de l'université. Au moins dans des classe de terminale il faut entraîner un peu dans ces mathématiques d'un point de vue démonstratif **(un étudiant, en deuxième année, à l'Université Ege).**

D'après moi, il faut que les notions à enseigner aux élèves ne soient pas implicitement présentées parce que des élèves se troublent lorsqu'ils sont arrivés à l'université. Les notions à enseigner doivent être présentées avec leurs raisonnements. Ainsi il faut éviter l'apprentissage par cœur **(une étudiante, en deuxième année, à l'Université Ankara).**

Par ailleurs, pour 29% des étudiants les problèmes proviennent de l'enseignant. Ils donnent donc les conseils correspondants à l'enseignant. Par exemple, ils demandent aux enseignants de discuter des notions à enseigner avec les élèves, de rendre leur cours amusant et d'éviter aux élèves d'apprendre par cœur. De plus selon eux, les enseignants doivent avoir bien maîtrisé ce qu'ils vont présenter aux élèves et estiment que dans les écoles il faudrait éviter de changer souvent les professeurs.

Le taux des élèves qui donnent les conseils liés au système du concours est de 15%. Ces élèves pensent qu'à cause du système du concours il y a beaucoup de notions qui sont devenues caduques dans les programmes de lycée. Comme la première année de l'université se fonde essentiellement sur ces notions-là, des élèves rencontrent des difficultés.

Nous citons quelques réponses :

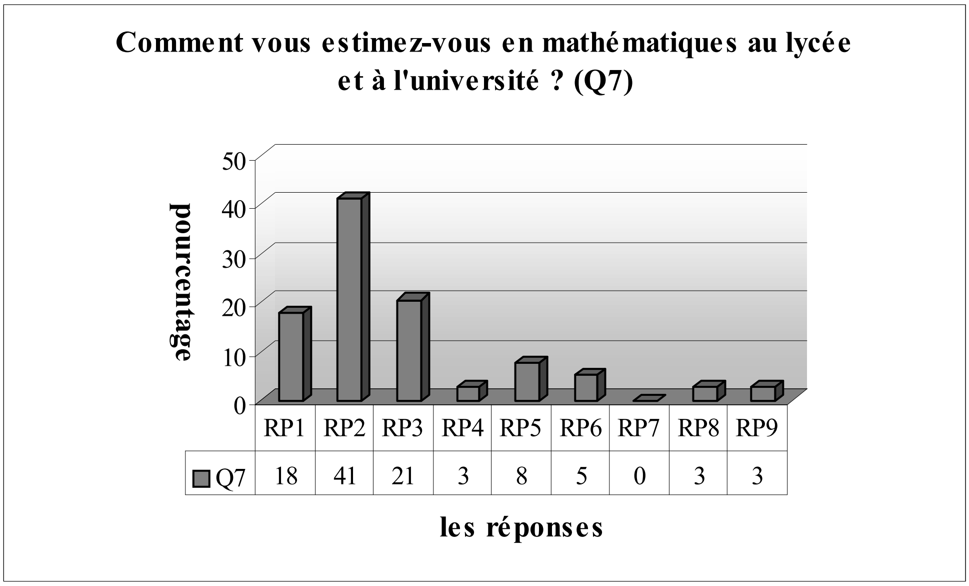
Selon moi, au lycée il faut présenter des notions essentielles dont l'élève se servira à l'université. Mais à cause du système du concours, à part les fonctions, les polynomes et le logarithme, la plupart des notions dans les programmes de lycée ne sont pas présentes dans les thèmes du concours. C'est pourquoi des élèves ne donnent pas d'importance au lycée et aux notions qu'on leur a apprises au lycée. Et ils ne se focalisent que sur les cours de dérsané. Je voudrais qu'on retourne au système ancien et remette la deuxième étape **(un étudiant, en première année, à l'Université Firat).**

Je voudrais qu'on apprenne toutes les choses de manière à ce qu'elles se méritent Mais l'enseignement de dérsané et celui de lycée doivent vraiment être contraires. Parce que le lycée suit les programmes et le dérsané prépare des élèves au concours. Croyez-moi, je régulariserais ce problème en changeant soit le système du concours soit les programmes de lycée. Mais on sait très bien qu'on ne peut pas changer les programmes. D'après moi, même si ce n'était pas si facile, la meilleure solution serait de changer le système du concours **(une étudiante, en première année, à l'Université Erciyes).**

En ce qui concerne les autres conseils des étudiants, 15% des étudiants donnent des conseils liés au système de l'enseignement. Ce taux est aussi valable pour les élèves dont les conseils s'adressent aux programmes de lycée.

1.7 Question n°7 : Comment vous estimez-vous en mathématiques au lycée et à l'université ?

Dans le tableau suivant, nous constatons que dans leurs études supérieures en mathématiques il y a une chute de réussite chez la plupart des étudiants. Ainsi 41% des étudiants affirment qu'ils sont moyens à l'université et qu'ils étaient bons au lycée. Le taux des élèves qui s'estiment mauvais à l'université et bons au lycée est de 21%. Et 5% des étudiants disent qu'ils étaient moyens en mathématiques au lycée. Malgré cela, ils sont en échec à l'université. Par contre, un très petit nombre d'étudiants sont plus brillants à l'université qu'au lycée (RP4 et RP8).



RP1 *: bon à l'université et bon au lycée,* ***RP2*** *: moyen à l'université et bon au lycée,* ***RP3*** *: mauvais à l'université et bon au lycée,* ***RP4*** *: bon à l'université et moyen au lycée,* ***RP5*** *: moyen à l'université et moyen au lycée,* ***RP6*** *: mauvais à l'université et moyen au lycée,* ***RP7*** *: bon à l'université et mauvais au lycée,* ***RP8*** *: moyen à l'université et mauvais au lycée,* ***RP9*** *: mauvais à l'université et mauvais au lycée, (effectif : 41 étudiants, comme deux étudiants ne donnent pas de réponse, nous avons obtenu ces résultats sur 39 étudiants).*

Par ailleurs, pour plus du quart des étudiants, il n'y a pas de grande différence entre leur réussite au lycée et à l'université. 18% d'entre eux sont toujours bons (RP1). Tandis que le taux des élèves qui ont moyennement du succès dans deux études est de 8%. Il n'y a aucun étudiant qui dise qu'il est bon à l'université et mauvais au lycée.

2. Conclusion

Selon les étudiants, les mathématiques existent partout. Toutes les sciences se fondent sur les mathématiques. De plus les mathématiques développent la puissance de pensée, d'interprétation et la logique. Elles amènent des gens à s'approcher des évènements de manière plus objective et plus logique.

Les étudiants affirment que les vraies mathématiques sont celles qui sont effectuées à l'université, qu'on y fait les mathématiques détaillées en posant la question du « pourquoi ». En ce qui concerne les mathématiques du dérsané, ils pensent qu'elles consistent à résoudre des questions et à trouver la bonne réponse sans prendre en compte de détails. De plus, selon les étudiants, les dérsanés apprennent aux élèves comment mémoriser des formules nécessaires et les connaissances essentielles.

Les étudiants disent qu'avant de commencer leurs études supérieures, les mathématiques leur paraissaient amusantes et faciles, qu'ils les aimaient beaucoup. Mais maintenant elles sont devenues difficiles et complexes. Les étudiants affirment cependant qu'à l'université ils ont remarqué que les mathématiques ne contiennent pas seulement des nombres et qu'expliquer des raisons et chercher des réponses à la question du « pourquoi » sont très importants.

Les étudiants ne croient pas qu'un élève qui répond correctement à toutes les questions de mathématiques au concours peut toujours réussir dans ses études supérieures. Selon eux, c'est dû au fait que le concours comprenne des questions à choix multiples et que l'élève s'habituent à résoudre des questions en utilisant des formules sans raisonnement. De plus puisque la première année de l'université se fonde sur les programmes de la classe de première et de terminale alors que le contenu du concours se limite au programme de seconde, à cause de dérsanés, même un élève qui ne connaît pas de grandes choses en mathématiques peut devenir quelqu'un qui résout aisément des questions du concours.

Par ailleurs, les étudiants affirment que l'enseignement de dérsané pose des problèmes dans leurs études supérieures et ils trouvent très abstraites les mathématiques à l'université. De plus ils n'aiment pas du tout les questions qui leur demandent de prouver, d'interpréter et de démontrer des théorèmes. Ils expriment qu'ils sont très étonnés devant les mathématiques effectuées à l'université. Ils se plaignent d'avoir rencontré plusieurs mathématiques différentes pendant leurs études au lycée, au dérsané et à l'université.

En ce qui concerne les conseils des étudiants, la plupart des conseils s'adressent à l'enseignement des mathématiques et à son apprentissage. Les étudiants sont totalement contre un enseignement des mathématiques qui consiste à apprendre par cœur, à négliger des détails et à ne pas mettre en place des raisonnements et ils veulent qu'on donne un enseignement qui amène des élèves à penser et à interpréter ce qu'on leur apprend. Ils ne trouvent pas non plus juste le fait que tous les efforts ne soient destinés qu'au concours. De plus ils affirment que le but principal des lycées et des dérsanés doit être de préparer des élèves à l'enseignement de l'université plutôt qu'au concours.

Dans leurs études supérieures en mathématiques il y a une chute de la réussite chez la plupart des étudiants. Un très petit nombre d'entre eux estiment qu'ils sont bons en mathématiques à l'université comme au lycée.

SYNTHESE GENERALE

Les programmes et les thèmes du concours. Afin de classifier ce qui apparaît dans le programme des lycées portant sur les fonctions, le comparer avec les thèmes qui apparaissent dans le concours d'entrée à l'université et montrer ainsi l'éloignement du programme du lycée et du contenu du concours, nous avons étudié les programmes. Cette étude nous a permis de constater qu'à part l'utilisation de la bijectivité d'une fonction pour la démonstration de « l'équipotence des ensembles infinis », les programmes de seconde ne mettent jamais en œuvre le fonctionnement outil des fonctions.

L'analyse des thèmes du concours montre qu'en général il y a peu de thèmes et peu de questions différentes, qu'on propose les mêmes types de questions avec des petites modifications pendant des années et que les questions du concours sont très courtes.

Par ailleurs les questions déjà posées au concours contiennent en général des applications directes du cours. Il n'y a aucune question qui demande de mettre en œuvre le fonctionnement outil des fonctions. Les questions sont en général dans l'esprit des programmes de seconde mais, malgré leur existence dans les programmes, le fonctionnement outil de la bijectivité pour la démonstration de l'équipotence et les propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières ne sont pas présents dans les thèmes du concours. De plus il y a des questions qui demandent de mettre en fonctionnement des connaissances non indiquées par le programme et des connaissances appartenant au programme des classes suivantes.

Les thèmes capitaux du concours sont la composition des fonctions à partir de leurs formules algébriques et le calcul de l'image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique.

Les questions du concours sont très pauvres géométriquement et le cadre algébrique et le cadre numérique sont les cadres les plus utilisés.

Comme aucune méthode n'est suggérée pour toutes les questions, tous les choix sont laissés à la charge des élèves.

Les manuels. En faisant l'hypothèse que l'étude des exercices nous renseigne sur les activités (mathématiques) que chaque énoncé peut déclencher chez les élèves, et sur les conséquences éventuelles sur l'acquisition, à conditions d'analyser ces activités en relation avec les apprentissages, nous avons analysé quatre manuels de lycées et trois manuels de préparation au concours. Il y a trois types de manuels que nous avons rencontrés, par rapport à l'enjeu de la préparation au concours : manuels de lycée loin du concours, manuels de lycée très proches du concours et manuels de préparation au concours. Dans les manuels du premier type, la préparation au concours n'est pas un enjeu et ils sont très fidèles aux programmes. Il est très peu probable de trouver des questions du concours, ou des questions y ressemblant, ni tous les thèmes des questions du concours. De plus, dans ces manuels la recette $\mathbf{R_a}$ n'est pas proposée (ou très implicitement dans quelques exercices).

En ce qui concerne les manuels très proches du concours, son influence y semble très forte. Ils se rapprochent beaucoup des manuels de préparation. C'est pourquoi ils essaient d'habituer systématiquement les élèves à des types de questions du concours (composée implicite par exemple). Il est ainsi possible de trouver certaines questions du concours ou des questions y ressemblant. Ils introduisent la recette $\mathbf{R_a}$ et elle est la seule méthode utilisée dans les exercices résolus. En ce qui concerne les manuels de dernier type, ce sont les manuels de préparation au concours. Comme leur but principal est de préparer des élèves au concours, on peut trouver toutes les questions du concours ou y ressemblant et tous les thèmes des questions du concours.

Tous les manuels introduisent les fonctions à partir de leur définition ensembliste. Les définitions portant sur le sens des fonctions en termes de variable sont totalement absentes. Par contre, dans certaines manuels nous pouvons trouver le nom des variables : y variable dépendante et x variable indépendante mais cela est très loin de faire connaître à des élèves le sens des fonctions en termes de variable.

Par ailleurs, dans les manuels de préparation au concours, des connaissances essentielles dont l'élève se servira pour résoudre des exercices sont simplement introduites comme des remarques. En général il n'y a aucun commentaire ni aucun raisonnement qui accompagnent ces remarques, ainsi il ne reste à l'élève qu'à les appliquer.

Comme nous l'avons déjà remarqué, les manuels de préparation au concours proposent presque toutes les questions du concours ou des questions y ressemblant. De plus, dans le cours il est possible de rencontrer des exercices résolus (la plupart de ces exercices sont des questions du concours) qui ne font pas référence directe aux notions qui les précédent. On peut donc conclure que pour ces manuels rappeler des connaissances essentielles ou antérieures des élèves et présenter les types de questions du concours sont les enjeux principaux.

L'analyse des manuels nous a aussi permis de constater qu'à cause de l'intérêt fort pour le concours, les manuels de lycée, surtout les manuels de la deuxième catégorie, ne respectent pas le programme de la classe de seconde en proposant des exercices illustrés par des notions du programme des classes suivantes (les fonctions polynômes définies par morceaux, la recherche de l'intervalle de définition le plus large des fonctions rationnelles par exemple) ou des notions du programme de seconde qui sont introduites ultérieurement (l'égalité des polynômes, la résolution d'équations exponentielles très particulières) ou des notions non indiquées dans le programme de seconde (les fonctions affines, le nombre des fonctions définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par exemple). Ainsi l'élève peut rencontrer pour la première fois certaines notions dans les exercices résolus.

Par ailleurs, dans les manuels de préparation au concours il y a beaucoup plus d'exercices de même type que dans les manuels de lycée. Cela signifie que l'autre objectif de ces manuels consiste à entraîner les élèves et à leur faire acquérir des automatismes en les faisant travailler sur les mêmes types d'exercice.

Parmi les questions déjà posées au concours, il n'y a aucune question qui privilégie le fonctionnement outil de la notion de fonction. Ainsi, dans les manuels de préparation au concours on ne trouve aucune situation (comme l'utilisation de la bijectivité comme outil pour la démonstration de l'équipotence suggérée par le programme de seconde) ni aucun exercice dans lesquels les fonctions sont utilisées comme outils.

En ce qui concerne les manuels de lycée, ils privilégient généralement le fonctionnement outil de la bijectivité pour démontrer l'équipotence en proposant l'exemple indiqué par le programme. A part cela, il n'y a aucune situation dans laquelle la notion de fonction est utilisée comme un outil pour résoudre un problème.

Comme les questions du concours sont très courtes et qu'il n'y a pas de vrais problèmes, on ne trouve pas non plus de problèmes dans les manuels de préparation au concours. Il nous semble cependant très intéressant de constater que c'est aussi valable pour les manuels de lycée.

Dans tous les manuels le cadre algébrique est majoritairement utilisé et le taux d'utilisation de ce cadre atteint jusqu'à 98% des exercices. Par contre les cadres analytique et géométrique sont les cadres les plus marginaux. Cela nous permet de conclure que les manuels sont très

algébriques et moins géométriques. Ainsi il est très rare de rencontrer des situations dans lesquelles le changement de cadre est mis en fonctionnement.
Conformément aux questions du concours, les manuels, à part l'un d'entre eux, proposent en général majoritairement des exercices qui portent sur plusieurs connaissances antérieures et demandent à l'élève de passer par plusieurs étapes. Cela montre très bien l'influence forte du concours sur les manuels ainsi que le désir de proposer des exercices proches des questions déjà posées au concours de ces derniers.

Questionnaires proposés aux enseignants[1] sur la notion de fonction. Pour avoir une image plus complète de ce qui constitue la vie des fonctions dans les classes de seconde et pour étudier si le concours influence les choix faits par les enseignants, nous avons analysé les réponses à un questionnaire proposé aux enseignants. Soulignons à nouveau que ce travail reste très exploratoire, puisque nous n'avons pas eu accès aux pratiques effectives de la classe et que le nombre d'enseignants interrogés est limité.

L'analyse des questionnaires montre que selon les enseignants, la plus grande partie des erreurs et des difficultés des élèves sont dues à une assimilation insuffisante des connaissances élémentaires relatives aux classes précédentes. De plus les enseignants disent que les élèves ont mal à trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement. Cela nous conduit à penser que comme la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ demande plus d'efforts mathématiques qui se fondent sur l'enseignement précédent (résolution des équations par exemple), la plupart des enseignants privilégient la recette $\mathbf{R_a}$ au lieu de la méthode plus mathématisée.

Par ailleurs, les enseignants de lycée utilisent à la fois des manuels différents de lycée et ceux de la préparation au concours. On peut donc dire que les enseignants prennent en compte le contenu du concours, lors de la préparation de leur cours, en plus des programmes.

Comme dans les manuels, les enseignants introduisent les fonctions de manière ensembliste en mettant en évidence la différence entre correspondance et fonction et aucun d'entre eux ne donne d'autre définition des fonctions que leur définition ensembliste. De plus, le sens des fonctions en termes de variable n'est pas non plus présent dans les pratiques des enseignants. Par ailleurs, pour faciliter la compréhension de la définition ensembliste, les enseignants proposent aux élèves des exemples portant sur la vie courante. Nous suggérons que le fait qu'il est difficile de comprendre la définition ensembliste des fonctions ou de la garder longtemps conduit les enseignants à essayer de faciliter la compréhension de cette définition en s'appuyant sur des exemples de la vie courante.

[1] Voir chapitre II « analyse des questionnaires-enseignants sur l'enseignement de la notion de fonction », page 47.

Ni dans le cours, ni dans les contrôles, les enseignants ne proposent aucun exercice qui demande de mettre en œuvre le fonctionnement outil des fonctions. Ainsi, l'influence du concours apparaît aussi dans le choix d'exercices des enseignants. Des questions déjà posées au concours, ou qui y ressemblent, occupent une place importante dans le choix d'exercices des enseignants mais, contrairement aux questions du concours, la plupart des exercices sont simples et isolés.

Comme les manuels, les enseignants proposent un très petit nombre d'exercices qui demandent de travailler dans d'autres cadres que le cadre algébrique et le cadre numérique. Ainsi ces deux cadres sont les cadres principaux tandis qu'un très petit nombre d'exercices demandent d'utiliser le cadre analytique et le cadre géométrique n'est jamais utilisé. Nous pouvons donc conclure que comme les exercices des manuels, les exercices utilisés par les enseignants sont géométriquement très pauvres et algébriquement très riches.

Questionnaires proposés aux élèves de seconde[2] sur la notion de fonction. Afin de vérifier que, comme la nature du concours est très technique, les élèves, même s'ils sont bons, qui ne suivent pas les dérsanés échouent, que l'enseignement de dérsané ou la motivation forte du concours influencent négativement les pratiques des élèves et que les erreurs commises, les méthodes et les procédures privilégiées sont différentes chez les élèves qui suivent les dérsanés et chez ceux qui ne les suivent pas, nous avons analysé les réponses des élèves à deux questionnaires.

Conformément aux résultats de l'analyse des manuels et des questionnaires proposés aux enseignants, les élèves définissent les fonctions de manière ensembliste. Il n'y a aucun élève qui donne la définition des fonctions en termes de variable.

La comptine $\mathbf{C_0}$ qui sert à mémoriser les résultats de la définition ensembliste est privilégiée et la définition ensembliste moins fréquente dans les classes où l'enseignement est très proche du concours. Cela peut être expliqué par le fait que dans le concours les définitions ne soient pas très importantes.

Comme dans les exercices des manuels et ceux utilisés par les enseignants, il y a un très petit nombre d'exercices qui demandent de travailler dans d'autres cadres que dans le cadre algébrique, les élèves de seconde n'ont pas d'habitude de travailler dans d'autres cadres que dans le cadre algébrique. C'est la raison pour laquelle le taux de réussite des élèves aux questions qui demandent un changement de cadre ou d'écriture chute remarquablement par rapport aux questions analogues où il s'agit de travailler dans le cadre algébrique. De plus, ce

[2] Voir chapitre II, « description et passation des questionnaires aux élèves sur la notion de fonction », page 41.

type de questions (avec un petit changement dans l'énoncé par rapport aux habitudes) provoque une perte de leurs moyens, même si les connaissances en jeu sont disponibles, chez les élèves qui subissent l'enseignement très proche du concours. Nous pouvons donc conclure que dans l'enseignement très proche du concours, les élèves ne font que mémoriser les types de questions et leurs démarches.

Par ailleurs, l'analyse des questionnaires nous a permis de constater que les lycées très proches de l'enseignement du concours et ceux très proches des programmes se différencient remarquablement par le privilège des procédures les plus courtes. Ainsi presque tous les élèves utilisent la recette $\mathbf{R_a}$ dans le premier cas, alors que dans le deuxième, à part pour un très petit nombre des élèves, elle n'est jamais mise en fonctionnement.

Puisque les procédures privilégiées sont différentes, il est tout à fait normal que les erreurs commises par les élèves soient aussi différentes dans ces deux types de lycée. Les erreurs liées à la recette $\mathbf{R_a}$ sont plutôt dues à un oubli ou à une confusion. C'est aussi que les élèves qui utilisent ce type de procédures ne peuvent pas contrôler leurs démarches et corriger leurs erreurs et lorsque l'élève a oublié la recette $\mathbf{R_a}$ (ou ce qu'il a mémorisé), il ne lui reste qu'à faire des erreurs ou à ne pas toucher aux questions.

Les erreurs portant sur la mauvaise utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ sont plus fréquentes chez des élèves en difficulté. Cela montre que ce type de situations pose plus de problèmes pour eux. Quant aux erreurs liées à la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$, elles proviennent plutôt du fait de ne pas terminer la résolution ou d'erreurs algébriques. Par ailleurs, le nombre des élèves qui échouent en privilégiant cette méthode est moins élevé que celui des élèves qui échouent avec la recette $\mathbf{R_a}$. On peut donc dire que l'utilisation de la méthode plus mathématisée amène moins de risque d'erreurs.

Ni l'utilisation de la recette $\mathbf{R_a}$ ni celle de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ ne pose des problèmes chez des très bons élèves. Ils savent privilégier la méthode adéquate suivant les questions. Pour ces élèves, le passage de l'une des méthodes (ou procédures) à l'autre est aussi facile.

Le fait que dans les questions du concours (ou qui y ressemblent), les élèves qui ne subissent pas ce type d'enseignement, même s'ils sont bons, aient échoué montre qu'il y a une relation entre le taux de réussite aux questions du concours et le niveau de l'enseignement très proche du concours. En d'autres termes, il est possible de dire que tout seul l'enseignement du lycée n'est pas satisfaisant pour préparer des élèves au concours et qu'il y a des effets positifs de l'enseignement très proche du concours sur la préparation au concours. Ce qui ne veut rien dire sur les apprentissages…

Par ailleurs, grâce à l'analyse des questionnaires, nous avons constaté qu'une bonne partie des élèves trouvent, même si l'on ne leur le demande pas, l'inverse des fonctions qui figurent dans l'énoncé des questions. Comme dans les manuels, il y a beaucoup trop d'exercices pour lesquels on demande de trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement, nous pensons que ce type d'erreurs est dû à cet abus.

Les questions du concours sont en général simples et non isolées. Dans des manuels, il y a aussi beaucoup d'exercices de ce type. Par contre les élèves de seconde ont cependant du mal à mettre en fonctionnement des connaissances antérieures dans les questions qui le leur demandent. Une bonne partie des erreurs proviennent soit du manque de connaissances antérieures soit de la mauvaise maîtrise de ces connaissances. Le fait que les enseignants indiquent que la plupart des erreurs sont liées aux connaissances antérieures des élèves confirme aussi cette hypothèse.

Comme nous l'avons déjà indiqué, dans les manuels il y a un très petit nombre d'exercices qui demande un travail hors du cadre algébrique. C'est pourquoi les élèves de seconde ont de grosses difficultés à lire et à interpréter la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé. De plus, pour les élèves il est très difficile de comprendre que la représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormé est également celle de son inverse en changeant les axes.

On sait que dans le concours d'entrée à l'université le temps est très important, que résoudre correctement des questions n'est pas suffisant et qu'il faut les résoudre le plus vite possible en privilégiant les démarches les plus courtes. Par contre, la plupart des élèves ont des difficultés à saisir et à utiliser des méthodes les plus avantageuses dans les questions du concours. Cela nous permet de conclure encore une fois que les élèves, même s'ils sont de très bons élèves dans le lycée, ne peuvent pas tout seuls privilégier les procédures les plus courtes.

Questionnaires proposés aux étudiants. Afin de vérifier que subir l'enseignement de dérsané (ou tout enseignement très proche de celui du concours) pose des problèmes dans les études supérieurs des élèves, nous avons analysé les réponses à un questionnaire que nous avons soumis aux étudiants[3] de différentes universités en Turquie.

L'analyse des questionnaires nous a montré qu'il semble aux étudiants que les mathématiques existent dans toute la vie, que toutes les sciences se basent sur les mathématiques. Selon eux, les mathématiques développent, la puissance de pensée, la possibilité d'interpréter et la

[3] Voir chapitre II, « analyse des questionnaires-étudiants », page 47.

logique. Grâce aux mathématiques, des gens apprennent à s'approcher des évènements de manière plus objective et plus logique.

Par ailleurs, les étudiants distinguent fortement les vraies mathématiques qui sont effectuées à l'université de celles qui sont effectuées au lycée ou au dérsané et ils affirment qu'à l'université on fait des mathématiques plus détaillées en posant la question du « pourquoi ». En ce qui concerne les points de vue des étudiants sur les mathématiques du dérsané, ils les accusent de ne consister qu'à résoudre des questions et à trouver la bonne réponse sans prendre en compte de détails. De plus, selon eux dans les dérsanés on apprend aux élèves comment mémoriser des formules nécessaires et des connaissances essentielles.

Pour la grande majorité des étudiants les mathématiques qu'ils aimaient et trouvaient amusantes et faciles, avant de commencer leurs études supérieures sont devenues difficiles et complexes. De plus les étudiants avouent qu'à l'université ils ont remarqué que le raisonnement est très important et que les mathématiques ne consistent pas seulement en des applications avec des nombres.

En explicitant les raisons suivantes : le concours comprend des questions à choix multiples, l'élève s'habitue à résoudre des questions en utilisant des formules sans raisonnement, les étudiants ne sont pas sûr qu'un élève qui répond correctement aux questions de mathématiques au concours puisse toujours réussir dans ses études supérieures. Par ailleurs, selon eux, ce serait aussi difficile, parce que la première année de l'université se fonde sur les programmes de la classe de première et de terminale, mais le contenu du concours se limite au programme de seconde. De plus, à cause de dérsanés, même un élève qui ne connaît pas de grandes choses en mathématiques puisse être devenu quelqu'un qui résout aisément des questions du concours.

Les élèves ne se sentent pas très à l'aise en mathématiques à l'université : il y a une chute de la réussite chez la plupart d'entre eux et il y a seulement un très petit nombre qui s'estiment bons en mathématiques à l'université comme au lycée. Par ailleurs, ils trouvent très abstraites les mathématiques de l'université et ils n'aiment pas des questions qui leur demandent raisonner, d'interpréter et de démontrer des théorèmes. Selon eux, tous ces problèmes proviennent du fait d' avoir subi un enseignement comme l'enseignement de dérsané (ou un enseignement très proche du concours) qui n'attache pas l'importance aux détails ni au raisonnement. Ils ne sont pas contents d'avoir rencontré plusieurs mathématiques différentes pendant leurs études au lycée, au dérsané et à l'université.

Des conseils qui viennent de la part des étudiants correspondent plutôt à l'enseignement des mathématiques et à son apprentissage. Ils souhaitent qu'un enseignement des mathématiques qui consiste à apprendre par cœur, à négliger des détails et à ne pas mettre en place des raisonnements soit remplacé par un enseignement qui amène les élèves à penser et à interpréter ce qu'on leur apprend. D'après eux, le fait que toutes les choses ne soient destinées qu'au concours est complètement faussé et les lycées et des dérsanés doivent préparer des élèves à l'enseignement de l'université plutôt qu'au concours.

CONCLUSION

Dans cette partie, nous allons apporter un bilan de ce travail. Nous allons d'abord rappeler nos questions initiales (constats probables à vérifier) et puis nous allons résumer ce que nous avons obtenu, les difficultés qui sont apparues et les limites de notre point de vue. Nous allons enfin terminer cette partie en mettant en évidence des pistes de recherche que cette étude permet d'entrevoir à présent.

Il nous paraît tout d'abord important de souligner que cette étude est fragmentaire, qu'elle contient un certain nombre d'hypothèses qui devraient être vérifiées soigneusement, ce qui n'a pas été fait par manque de temps et vu les difficultés à travailler sur la Turquie en étudiant en France.

Rappelons ces questions initiales : le système actuel du concours d'entrée à l'université en Turquie nécessite pour réussir une préparation spécifique, proposée en dérsané, or cela éloigne les élèves d'une pratique mathématique authentique, rendant « l'enseignement en lycée plus superficiel, moins légitime » et cela peut avoir des conséquences négatives plus tard.

Dans le cadre de ce travail, un certain nombre d'analyses nous ont permis de vérifier ces constats : analyses du programme, des thèmes du concours qui nous ont montré l'éloignement du programme des lycées et du contenu du concours, analyse des manuels de lycée et des manuels de préparation au concours qui nous a servi à mieux cerner l'enseignement des fonctions au lycée et au dérsané et l'apprentissage des élèves, analyse des questionnaires proposés aux enseignants sur l'enseignement des fonctions qui nous a aidé à constater comment les enseignants apprécient le chapitre des fonctions et évaluent l'influence du concours sur leurs choix, analyse des questionnaires proposés aux élèves de seconde ou de terminale sur les fonctions qui nous a amène à voir les mauvaises influences de l'enseignement de dérsané (ou du concours) sur l'enseignement des mathématiques au lycée et les influences positives de l'enseignement de dérsané sur la préparation au concours et enfin analyse des questionnaires proposés aux étudiants de l'université sur l'enseignement des mathématiques nous a renseigné sur les effets négatifs d'un enseignement très proche du concours (ou de l'enseignement de dérsané).

Ces différentes analyses effectuées convergent autour des résultats ci-après à propos des fonctions:

● *L'enseignement des mathématiques en Turquie est très pauvre du point de vue du « fonctionnement outil » des notions*[1]. Il est ainsi très rare de trouver, dans les programmes ou dans les manuels ou dans les pratiques des enseignants ou dans le concours, de vrais problèmes dans lesquels l'élève doit utiliser des connaissances en jeu pour les résoudre. L'élève ne prend pas un rôle actif lors de l'introduction de nouvelles connaissances.

● *L'enseignement des mathématiques en Turquie est aussi très pauvre du point de vue des changements de cadre.* Le contenu du concours[2] et des manuels[3] sont très algébriques et il n'y a qu'un très petit nombre de situations qui demandent de changer de cadre, de points de vue, de penser et de dire autrement. En s'appuyant sur des travaux faits en didactiques il n'est pas difficile de dire que tout cela appauvrit l'apprentissage, puis amène à avoir « un enseignant très actif qui parle toujours » et « un élève passif qui écoute toujours ».

● *Il y a une relation entre le taux de réussite aux questions du concours et la proximité de l'enseignement du concours.* Face aux questions du concours, plus la mise en place d'un enseignement très proche du concours augmente, plus la réussite d'élèves aux questions du concours s'élève[4]. En d'autres termes, *les élèves de seconde qui ne suivent pas les dérsané, même s'ils sont très bons élèves, échouent*[5]. En ce qui concerne le privilège accordé aux procédures les plus courtes, les élèves, même s'ils sont très bons élèves en mathématiques au lycée, ont du mal à référer les procédures les plus économiques et les plus adéquates au concours[6]. Le concours nécessite donc une préparation spécifique.

---

[1]Des travaux antérieurs (Chevallard) ont montré que les élèves apprennent à mieux utiliser leurs connaissances algébriques lorsqu'elles interviennent, sans que ce soit annoncé (et sans que ce soit l'objectif de l'exercice), comme outils dans d'autres problèmes.

[2] Voir « cadres d'utilisation dans les questions du concours », page 127.

[3] Voir « cadres d'utilisation dans les exercices résolus », page 106.

[4] Voir « effets positifs de l'enseignement du dérsané (ou d'un enseignement très proche du concours) sur la préparation au concours », page 343.

[5] Voir « même les bons élèves de seconde ont échoué dans le deuxième questionnaire : difficulté du concours », page 341.

[6] Voir « résoudre correctement des questions est très important mais ce n'est pas suffisant », page 345.

● *Le manque ou la mauvaîse maîtrise des connaissances antérieures font chuter la réussite au concours.* Les questions du concours sont en général des questions qui demandent aux élèves de faire fonctionner des connaissances antérieures. Les élèves ont de grandes difficultés à utiliser ces connaissances et *cela fait chuter le taux de réussite aux questions du concours.* En s'appuyant sur le témoignage des enseignants[7], on peut conclure qu'au lycée ou au concours, les lacunes des élèves qui viennent de leur enseignement précédent (ou du collège) posent des problèmes.

● *L'enseignement de dérsané repose sur le fait de présenter des types de questions spécifiques et d'entraîner des élèves avec des questions analogues.* Dans l'analyse des manuels de préparation au concours, nous avons montré qu'il y a des questions qui n'ont pas de rapport direct avec les notions précédentes et des questions du concours ou leurs analogues. De plus, les connaissances essentielles dont l'élève doit se servir pour résoudre les questions sont simplement annoncées et on attend de lui qu'il les applique. Le raisonnement n'est pas très important. C'est pourquoi nous suggérons que ce type de manuel est légitime pour la préparation au concours des élèves de terminale pour leur rappeler leurs connaissances antérieures et faire connaître les types de questions du concours mais pas efficace pour les élèves de seconde qui rencontrent, pour la première fois, les notions des programmes du lycée.

● *L'enseignement du dérsané (ou un enseignement très proche du concours) et la motivation forte au concours ont de mauvaises influences sur des manuels de lycée.* L'intérêt du concours contribue à rendre l'enseignement du lycée moins cohérent: il rapproche les manuels de lycée de ceux de préparation au concours, les oblige à proposer des exercices hors du programme et à privilégier les procédures les plus adéquates au concours au détriment des procédures les plus mathématisées.

● *L'enseignement du dérsané (ou un enseignement très proche du concours) appauvrit et donne naissance à des nouvelles erreurs.* Nous avons montré que chez les élèves de seconde qui subissent un enseignement très proche du concours, les démarches les plus économiques et les plus courtes sont fréquemment utilisées. Ces procédures sont plus utilitaires mais mathématiquement moins riches, elles peuvent facilement provoquer des erreurs surtout chez des élèves en difficulté[8], et, en cas d'erreurs, il est très difficile de contrôler les démarches et de corriger les erreurs.

---

[7] Voir « l'image que les enseignants se font de l'enseignement de la notion de fonction », page 147.
[8] Voir « résultats généraux des élèves », page 210.

● *L'enseignement du dérsané (ou un enseignement très proche du concours) pose des problèmes chez des étudiants dans leurs études supérieures.* L'enseignement du dérsané, le système actuel du concours et même l'enseignement du lycée sont très loin de faire acquérir aux étudiants le plaisir de la recherche, l'habitude du raisonnement[9], la compétence de faire une analyse et une synthèse. Dans leurs études supérieures, les étudiants éprouvent donc des difficultés et ainsi sont moins bons en mathématiques de l'université.[10] De plus, les programmes de la classe de première et de terminale qui sont importants en première année d'université ne contribuent pas au concours, sauf exception, cela multiple aussi les difficultés des étudiants.

Les résultats décrits ci-dessus peuvent servir de base à d'autres travaux. Je vais souligner maintenant quelques limites à ce travail :

■ Comme je l'ai déjà indiqué dans la partie méthodologique, en Turquie les professeurs et les proviseurs ont l'habitude d'accueillir en classe plutôt des inspecteurs ou des stagiaires que des chercheurs. De plus, la didactique est un nouveau sujet pour la Turquie, c'est pourquoi ils ne savent pas à quoi va se servir ce travail. Il a fallu beaucoup de temps pour le leur expliquer et les rassurer. Par ailleurs, comme je suis boursier du Ministère de l'Education Nationale, cela multipliait encore le doute sur le fait que j'allais en classe pour juger. A cause de cela, je ne suis pas entré en classe pour faire des observations ou filmer des séances et ainsi je n'ai pas pu vérifier mes hypothèses en regardant aussi les pratiques des enseignants. De plus, les questionnaires proposés aux élèves sur les fonctions ont été remplis dans les cours d'orientation. Je me dis donc que s'ils s'étaient présentés dans les cours des mathématiques par les professeurs de maths, les élèves les prendraient plus au sérieux mais je pense que cela aurait détruit la spontanéité des élèves.

■ Notre étude est trop locale pour pouvoir caractériser l'enseignement des mathématiques en Turquie et ainsi l'enseignement de dérsané. Le nombre d'élèves et le nombre de classes sont limités, de plus travailler sur un seul chapitre n'est pas suffisant. Il faudrait peut-être travailler sur au moins deux chapitres dont l'un est en géométrie. Mais comme nous l'avons déjà indiqué, il est très difficile de trouver des chapitres qui sont présentés à la fois au dérsané et au lycée. De plus, l'analyse des manuels et des réponses des élèves aux questionnaires prend beaucoup de temps.

---

[9] Voir chapitre VII, « question n°2 », page 351.
[10] Voir chapitre VII, « question n°7 », page 361.

■ Il nous semble important de souligner que l'analyse des questionnaires-enseignants reste très exploratoire, puisque nous n'avons pas eu accès aux pratiques effectives de la classe et que le nombre d'enseignants interrogés est très limité. De plus, les réponses des enseignants aux questionnaires sont un peu floues. Elles mériteraient peut-être d'être éclaircies en faisant des entretiens avec certains d'entre eux. Ceci nécessiterait un travail important concernant des enregistrements, leurs transcriptions, puis leur traduction en français enfin leur analyse.

■ Les résultats des questionnaires-étudiants sont trop généraux. J'avais aussi préparé un autre questionnaire pour les professeurs de l'université mais ils n'ont pas été très motivés pour y répondre et leur nombre était très petit c'est pourquoi nous n'avons pas pu avoir les idées des professeurs sur l'enseignement des mathématiques et comparer leurs réponses avec celles des étudiants.

■ Dans le cadre de ce travail, je n'ai pas pris en compte, par exemple, les points de vue de type psychanalytique, sociologique et socio-économique. Les résultats apportés ne sont donc valables que dans le cadre et compte tenu des hypothèses didactiques retenues.

Je pense que ce travail effectué dégage au moins quatre pistes de nouvelles recherches en didactique pour compléter les résultats actuels sur l'enseignement des mathématiques en Turquie et leur apprentissage.

♦ Même si les résultats obtenus dans l'analyse des questionnaires-étudiants sont très généraux, ils nous ont permis quand-même de préciser qu'il y a des difficultés des étudiants dans leurs études supérieures qui viennent de l'enseignement du dérsané (ou d'un enseignement très proche du concours). Ce travail effectué il me paraîtrait important de mettre en évidence ces difficultés, par exemple dans une analyse comparative entre les programmes des lycées et ceux de l'université ou en regardant quelles sont les erreurs fréquemment commises par les étudiants, quels obstacles sous-jacents se manifestent par ces erreurs et quelles activités manquent chez les étudiants.

♦ Ce travail nous a permis aussi de remarquer la pauvreté des programmes officiels turcs. Ils sont très courts et comprennent trop peu d'explications. Cela m'a amené à réfléchir à la complexité de l'interprétation des programmes par les enseignants. En mettant évidence ce que doit être un programme (ceci pour être étudié par comparaison avec les programmes d'autres pays), on pourrait étudier les programmes officiels turcs. Q'est-ce qu'il leur manque ? Est-ce qu'ils sont suffisants pour donner des idées aux enseignants ? Est-ce qu'ils peuvent empêcher des méthodes « clandestines » (cf. la recette $\mathbf{R_a}$) ?

♦ Il serait tout à fait intéressant de confirmer les résultats obtenus ici dans les représentations des élèves et des professeurs sur les mathématiques et leur enseignement. Ainsi il y aurait l'occasion de voir les effets d'un enseignement « utilitaire » sur les représentations des professeurs et des élèves.

♦ Nous avons montré en particulier qu'il y a au moins deux grandes réductions dans l'enseignement des mathématiques en Turquie : pauvreté du fonctionnement outil des notions et rareté des changements de cadres. Je pense qu'il y en a encore d'autres, par exemple la négligence de l'organisation des travaux en petits groupes. Peut-t-on envisager des moyens pour introduire ce type de fonctionnement dans les classes (par l'intermédiaire des programmes ?) ou encore par l'intermédiaire de formes renouvelées d'enseignement en classe, permettant de surmonter les représentations actuelles (comme le travail en petits groupes…).

BIBLIOGRAPHIE[1]

ARSLAN S. (2000), Analyse comparative des sujets de mathématiques dans les épreuves passes à la fin du lycée en France et en Turquie, *DEA de didactique des mathématiques de l'Université de Paris VII*, Paris.

ARTIGUE M. et ROBINET J. (1982), Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 3/1, pp.5-64.

BACHELARD G. (1965), *La formation de l'esprit scientifique*, ed J. VRIN, Paris.

BARUK S. (1985), *L'âge du capitaine,* ed. Seuil.

BAŞTÜRK S. (2000), Difficultés des élèves de seconde à propos de la notion de valeur absolue et l'analyse des manuels turcs et français, *DEA de didactique des mathématiques de l'Université de Paris VII*, Paris.

BOUVIER A. (1989), Le droit à l'erreur, *dans « sans tambour ni trompette »*, n° 1, bulletin de l'IREM de Lyon

BROUSSEAU G. (1983a), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 4/2, pp. 164-198.

[1] Cette bibliographie rassemble les titres qui figurent dans la thèse ainsi que quelques ouvrages utilisés sans pourtant qu'un extrait n'ait été cité (signalé).

BROUSSEAU G.(1983b), Le contrat didactique :le milieu, *Recherche en didactique des mathématiques*, n° 9/3.

CANTOR M. (1896), Sur le sens primitif du mot fonction, Deuxième réponse., *L'intermédiaire des mathématiciens*, Tome III, Gauthier-Villars et Fils, pp.22-23, Paris.

CHARLOT (1997), *Du rapport au savoir-éléments pour une théorie*, Edition Anthopos.

CHARLOT B., BAUTIER E & ROCHEX J.-Y. (1992), *Ecole et savoir dans les banlieues...et ailleurs*, Armand Colin, Paris.

DESCARTES René (1952), *La Géométrie*, ouvrage traduit par D.E Smith et Marcia L. Latham, La salle Illinois, The Open Court Publishing Company, 246p.

DOUADY R.(1987), Jeux de cadre et dialectique outil/objet, *Recherche en didactique des mathématiques*, 7/2, pp.5-32.

ERGÜN S. (1993), Selon certaines variables, l'étude des attentes liées au service d'orientation des élèves qui suivent les dérsanés et des enseignants qui y travaillent, *DEA de l'Institut des Sciences Sociales de l'Université İnönü*, Malatya.

KÖKSALAN B. (1993), Des facteurs qui influencent la réussite des élèves qui suivent des cours de préparation au concours des dérsanés, *DEA de l'Institut des Sciences Sociales de l'Université İnönü*, Malatya.

L'annale de poche de l'institut de statistiques (1990), Ankara.

Le Système de l'Education Turque (2000), République de Turquie Ministre de l'Education Nationale, Ankara.

MEN (1970), *Les développements en éducation nationale turque par l' égalité des chances pour l'équité de l' éducation,* Ministre de l'Education Nationale 1970, page 14, Ankara.

MEN (1982), *Les dérsanés*, Rapport présenté à l'Institut de la Planification d'Etat par la direction générale de l'enseignement secondaire, Ministre de l'Education Nationale, Ankara.

MEN (2003), *Les statistiques éducatives* , www.meb.gov.tr

ÖZGÜVEN T. (1984), Les influences des dérsanés sur l'entrée à l'université, *Revue de la science sociale de l'Université Hacettepe*, n° 4, Ankara.

ÖZTÜRK T. (1994), La place, le développement et les fonctions des dérsanés dans le système de l'éducation turque, *DEA de discipline de la sociologie de l'Institut des Sciences Sociales de l'Université Cumhuriyet*, Aydın.

PHILI Christine, Le développement du concept de fonction., *Note présentée au Séminaire de philosophie et de mathématiques de l'école Normale Supérieure.*

RENE DE COTRET S (1988), Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante, *Petit x* n°17 pp. 5-27.

ROBERT A. (1982), L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 3/3, pp.305-342.

ROBERT A. (1988), Une introduction à la didactique des mathématiques (à l'usage des enseignants), *Cahier de didactique des mathématiques*, IREM de Paris VII.

ROBERT A. (1998a) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherche en didactique des mathématiques*, n°18/2, La pensée sauvage, pp.139-170, Grenoble.

ROBERT A. (1998b), Réflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels, *Cahier de didactique des mathématiques*, n°51, IREM de Paris.

ROBERT A. (2000), Recherches sur les pratiques des enseignants de mathématiques du secondaire :imbrication du point de vue de l'apprentissage des élèves et du point de vue de l'exercice du métier d'enseignant, in *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, ARDM, Paris.

ROBERT A. & ROGALSKI M. (2002), Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ?: le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe, *Petit x* n°60, pp.6-25.

ROGALSKI J. (1982), L'acquisition de notion relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur, surface), *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 3/3, pp. 343-396.

ROUSSET-BERT S. (1990), Stratégies de prise en compte de l'erreur par des enseignants de maths en liaison avec certaines de leurs représentations, *Petit x*, n° 25, pp. 25-58.

TUNAY U. (1992), Les facteurs qui forcent les élèves du lycée à suivre les cours des dérsanés, *DEA de l'Institut des Sciences Sociales de l'Université Ankara*, Ankara.

VERGNAUD G. (1983), Quelques problèmes de la didactique à propos d'un exemple :les structures additives, *Premier Atelier international de recherche en didactique de la physique à La Londe-les-Maures*, CNRS, pp. 391-402, Paris.

YOUSCHKEVITCH A.P.(1976) The concept of function up to the middle of th 19th century., *Archive for history of exact sciences*, tome 16, pp.36-85, traduction française de Jean-Marc Bellemin, "Fragments d'histoire des mathématiques", Brochure A.P.M.E.P., n° 41, 1981, pp.7-68, Paris.

MANUELS DE LYCEE ET DE PREPARATION AU CONCOURS

ASMA N., AYDIN N. (2002), *Manuel des mathématiques classe de seconde*, Editions Aydın, Ankara.

CHENEVIER P. (1939), *Mathématiques,* Hachette, Paris.

COLLECTIF. (2001), *Manuel de préparation au concours et du soutien à l'école des mathématiques classe de seconde*, Editions Zafer, Ankara.

COLLECTIF. (2001), *Mathématiques CEU*, Editions Güvender, İzmir.

Cours d'algèbre élémentaire (1961), F.E.C., Montréal.

ÇALIKOĞLU I., ÇAMLI A., POLATOĞLU M. (1999), *Manuel des mathématiques classe de 3ème*, Edition Ministre de l'Education Nationale, Ankara.

ÇETİNER Z., KAVCAR M.,YILDIZ Y. (1998), *Manuel des mathématiques classe de seconde*, Edition Ministre de l'Education Nationale, Maison d'édition de l'Université Anadolu, Eskişehir.

GÜNDOĞDU M. (2001), *Manuel des mathématiques classe de seconde*, Editions Altın Kitaplar, İstanbul.

KILIÇARSLAN T., YÜCE A-R. (2001), *Préparation au CEU,* Editions Uğur, İstanbul.

ODABAŞI Z., TEKİN A. (1999), *Manuel des mathématiques 1*, Editions Tutibay, Maison d'édition de Saray Matbaacılık, Ankara.

ÖZDEMİR (2000), *Des questions immuable et leurs résolutions dans le CEU entre 1999-2000*, Çağlayan A.Ş, Gaziemir-İZMİR.

ANNEXES

Table des matières des annexes :

ANNEXE I

ANALYSE DES MANUELS :

1. manuel de lycée Altın

2. manuel de lycée Aydın

3. manuel de préparation Uğur

4. manuel de préparation Zafer

Plan de l'annexe I :

Annexe I-1 : analyse du manuel de lycée Altın

Comme le manuel précédent la notion de fonction est présentée dans le chapitre intitulé « correspondances- fonctions- loi de composition interne ». Nous ne trouvons aucune activité introductrice même pas une petite phrase qui provoque une réflexion chez élèves sur la nouvelle notion à présenter. Les auteurs du manuel commencent directement par le cours en faisant introduire la notion de fonction avec sa définition ensembliste.

1.1 La définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant

Comme nous l'avons déjà indiqué, le manuel présente la notion de fonction de manière ensembliste.

Etant donné A et B deux ensembles non vides. On appelle fonction de A vers B la correspondance qui à chaque élément de A associe un seul élément de B.

On note : $f\,A \to B$ *ou* $A \xrightarrow{f} B$.

Bien qu'il n'y ait aucune indication sur la définition de la notion de fonction dans le programme, les auteurs se contentent de donner la définition à partir d'ensembles. Comme nous le verrons dans les parties suivantes, on ne parle jamais du sens en termes de variable dépendante ou indépendante.

Il y a un exemple qui illustre la définition. Conformément au programme le manuel fait introduire les ensembles associés à la notion de fonction : ensemble de définition, ensemble d'arrivée et ensemble image et leur représentation en diagramme sagittal. L'écriture symbolique de la définition et la comptine $\mathbf{C_0}$ figurent aussi à la suite de la définition.

Si f est une fonction de A vers B ;

a. Il n'y a aucun élément vacant dans l'ensemble de définition.

b. Un élément de l'ensemble de définition s'associe à un seul élément unique de l'ensemble d'arrivée.

c. Card(f)=Card(A) c'est-à-dire le cardinal de la fonction est égal à celui de l'ensemble de définition de la fonction.

d. Dans l'ensemble d'arrivée il (ne) peut y avoir des éléments vacants.

e. Un élément de l'ensemble d'arrivée peut s'associer à plus d'un élément de l'ensemble de définition.

La théorie est suivie d'une série d'exemples. Les trois premiers exemples font appliquer directement la définition ensembliste de la notion de fonction (cf. la comptine $\mathbf{C_0}$). Il s'agit donc des correspondances définies à partir d'ensembles. Et l'élève est amené à repérer quelle est une fonction parmi des correspondances définies. Dans le quatrième exercice on demande d'écrire une fonction *f* affine d'un sous-ensemble fini de Z dans Z sous forme d'une liste[1] des couples et ensuite représenter la fonction *f* en diagramme sagittal. En ce qui concerne les deux derniers, l'un montre qu'une fonction définie de A vers B (A et B sont les sous-ensembles finis et discrets) n'est pas fonction de l'un des sous-ensembles de A vers B. Inversement l'autre consiste à montrer qu'une fonction définie de A vers B est fonction de A vers l'un des sous-ensembles de B. Dans ces deux exemples la représentation en diagramme sagittal est utilisée.

1.2 Egalité des fonctions

Nous trouvons ici la définition des fonctions identiques et un exemple illustratif dans lequel l'élève doit étudier si une fonction du second degré et une fonction affine, définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z, sont égales.

1.3 Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières

D'abord figurent la définition ensembliste des fonctions injectives et l'écriture symbolique. Il y a deux exemples qui suivent la définition. L'un fait utiliser directement la définition à partir d'une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. Et l'autre demande de mettre en fonctionnement l'écriture symbolique de la définition pour montrer l'injectivité d'une fonction affine définie sur |R.

Le manuel illustre aussi la définition ensembliste des fonctions surjectives avec deux exemples. Dans le premier, il s'agit d'étudier la surjectivité d'une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. L'élève doit faire attention au fait qu'il n'y ait aucun élément vacant dans l'ensemble d'arrivée. Quant au deuxième exemple, l'élève doit y faire la même chose à partir d'une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z.

Par ailleurs nous pouvons trouver la définition des autres propriétés particulières des fonctions de manière ensembliste: fonctions non-surjectives, bijectives, injectives et non-

[1] Comme la suivante f={(1,4),(2,7),(3,10),(4,13)}

surjectives, fonction identique, constantes et nulle. Et elles sont illustrées par des exemples et leurs représentations en diagrammes sagittaux.

1.4 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé

Après avoir défini la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé, le manuel propose deux exemples. L'un fait représenter graphiquement dans un repère orthonormé une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z et l'autre, une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. L'élève doit d'abord déterminer des points de coordonnées en calculant les images et ensuite les placer dans le plan analytique.

1.5 Ensembles infinis ou finis et ensembles équipotents

Les ensembles infinis ou finis et les ensembles équipotents sont présentés à partir de la bijéctivité et de l'exemple conforme aux consignes du programme officiel. La définition des ensembles infinis ou finis est suivie d'un exemple dans lequel on demande de montrer que l'ensemble des nombres naturels est infini. Pour ce faire l'élève est amené à étudier la bijectivité de la fonction f définie de l'ensemble des nombres naturels vers l'ensemble des nombres pairs par $f(x)=2x$. En ce qui concerne les ensembles équipotents, il y a un seul exemple qui illustre leur définition. Dans cet exemple en utilisant la fonction définie de A vers B (A et B sont les sous-ensembles finis de Z) par $f(x)=2x-1$ il est nécessaire de montrer que les ensembles A et B sont équipotents.

1.6 Définition de l'inverse d'une fonction

En s'appuyant sur la notion de correspondance entre ensembles l'inverse d'une fonction est définie à partir des éléments. La définition est suivie de quelques commentaires qui peuvent être qualifiés des mises en garde. Ainsi on dit que si la fonction f définie de A vers B (A et B sont les sous-ensembles finis de Z) est bijective, elle est inversible, que la fonction f et f^{-1} est réciproquement l'inverse de l'une et de l'autre et que la notation f^{-1} ne signifie pas $\frac{1}{f}$. Nous constatons que l'écriture symbolique de la définition figure aussi à la suite de la définition ($(x,y)\in f \Leftrightarrow (y,x)\in f^{-1}$ *donc* $y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$).

Cette théorie est suivie de cinq exemples. Les trois premiers exemples concernent des applications directes du premier commentaire. Alors on y demande d'étudier si l'inverse des trois fonctions définies à partir d'ensembles sont une fonction. L'élève doit chercher la bijectivité des fonctions proposées.

A la suite de ces exemples, le manuel fait introduire la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ pour trouver l'inverse d'une fonction définie algébriquement :

> *En pratique lorsqu'on trouve l'inverse d'une fonction (si elle existe), on calcule x en fonction de y dans la formule de la fonction. Cette valeur dépendante de y et égale à x désigne la formule de la fonction inverse. En général dans la formule de cette dernière on remplace x par y et vice et versa.*

Le quatrième exemple comprend deux parties. La première partie propose de déterminer l'ensemble image d'une fonction *f* affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z et représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé et en diagramme sagittal. Dans la deuxième partie l'élève est amené à trouver la formule générale de la fonction inverse f^{-1} et représenter f^{-1} graphiquement dans un repère orthonormé et en diagramme sagittal. L'élève doit trouver l'inverse de la fonction en mettant en fonctionnement la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$.

Le dernier exemple fait trouver l'ensemble de définition d'une fonction *f* affine surjective définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction à partir de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ et ensuite trouver l'ensemble de définition de la fonction *f* ou l'ensemble image de la fonction inverse f^{-1}.

Après ces exemples, la représentation graphique de la fonction inverse dans un repère orthonormé est introduite sous le titre « tracer la représentation graphique d'une fonction donnée et son inverse ». Une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z et son inverse sont graphiquement représentés dans un même repère orthonormé. Grâce à cet exemple, l'élève est amené à reconnaître que la représentation graphique d'une fonction et celle de son inverse sont symétrique par rapport à la droite $y=x$.

1.7 Composition des fonctions

Cette partie commence par un exemple préparatoire dans lequel il s'agit de représenter en diagrammes sagittaux deux fonctions affines dont l'une est définie de A vers B et l'autre de B vers C (A, B et C sont les sous-ensembles finis de Z). Ainsi on conduit l'élève à reconnaître qu'il y a une troisième fonction qui associe à chaque élément de A un seul élément de C.

La définition est suivie de l'écriture symbolique, de la représentation en diagramme sagittal et d'une série d'exemples.

Dans le premier exemple on demande de composer une fonction du second degré et une fonction affine. Le deuxième exemple amène les élèves à étudier une composée représentée graphiquement. L'articulation entre le registre fonctionnel et les diagrammes sagittaux est utilisée. Quant à l'exemple suivant, il fait composer une fonction affine et une fonction du second degré définies sur Z et calculer l'image de quelques valeurs numériques. Une identité remarquable paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Le quatrième exemple demande de trouver d'abord la composée d'une fonction du second degré et une fonction affine définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z et ensuite l'ensemble image de la composée demandée. Le but principal des deux derniers exemples est de faire trouver l'une des fonctions lorsqu'on donne la composée (gof) et l'autre fonction (f). Ainsi le premier d'entre eux propose une composée et une fonction affines et le deuxième une composée du second degré et une fonction affine. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction à partir de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ et ensuite le mettre à la place de x dans la composée. Dans le deuxième exemple une identité remarquable dont l'élève doit se servir est un outil supposé disponible dans ce travail.

Par ailleurs le manuel présente certaines propriétés de la composée. Ainsi l'inexistence de la commutativité de la composée (elle n'est pas démontrée, illustrée par un exemple), la bijectivité de la composée des fonctions bijectives (pas démontrée, ni illustrée par un exemple), la composée d'une fonction et la fonction identique (démontrée), la composée d'une fonction et son inverse (démontrée et illustrée par un exemple), l'inverse de la composée (démontrée et illustrée par un exemple), l'inverse de l'inverse d'une fonction (démontré et illustré par un exemple) et l'associativité de la composée (démontrée et illustrée par un exemple) sont mises en place.

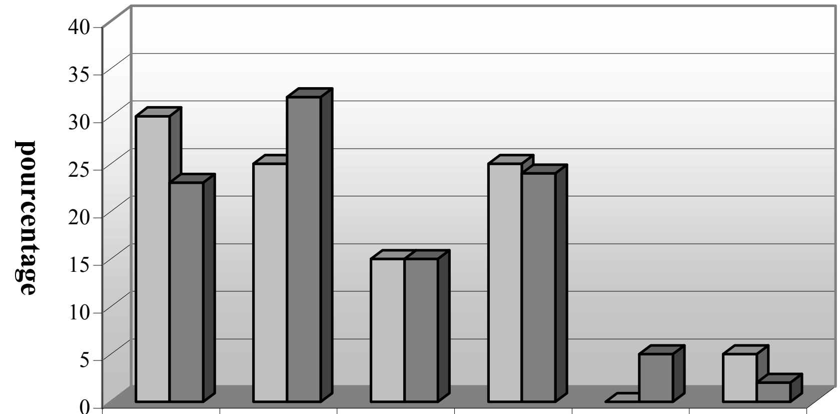
1.8 Exercices résolus (20 exercices)

Nous abordons maintenant les exercices résolus. Le manuel les propose en deux parties sous le titre « applications ». Conformément aux consignes du programme la loi de composition interne est introduite avant de passer à la notion de fonction inverse et la composition des fonctions. Alors la première partie des exercices résolus apparaît avant ces dernières. Quant à la deuxième partie, elle figure au bout du chapitre.

Nous trouvons cinq thèmes dans les exercices résolus. Si l'on prend en compte tous les exercices (exemples) du manuel, le nombre des thèmes monte à six. :

Comme le montre bien le tableau ci-dessous, qui présente la répartition de tous les exercices résolus et exemples du manuel Altın, le thème II est le thème plus fréquent. Et il est suivi des thèmes I et IV. Puisque la plupart des exercices concernant la composition des fonctions utilisent aussi la fonction inverse, le taux des exercices liés directement à l'inverse d'une fonction est seulement de 15%. Les thèmes V et VI sont les thèmes marginaux des exercices du manuel.

Répartition des exercices résolus (ER) et exemples (EXPL) du manuel Altin par thèmes



	Thème I	Thème II	Thème III	Thème IV	Thème V	Thème VI
ER	30	25	15	25	0	5
ER+EXPL	23	32	15	24	5	2

thèmes

Thème I : Définition ensembliste de la notion de fonction…Thème II : Propriétés particulières des fonctions… Thème III : Recherche de l'inverse à partir d'une fonction définie algébriquement ou de manière ensembliste Thème IV : Composition des fonctions à partir d'ensembles, Thème V : Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé[2], Thème VI : Recherche de l'image d'un nombre réel ou d'une fonction définie par une expression algébrique, EXP : Exemples (effectif :42), ER : Exercices résolus (effectif : 20 exercices)

1.8.1 Thème I : Définition ensembliste de la notion de fonction : (6 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Application de la définition ensembliste (1 exercice) : il s'agit de travailler sur la représentation en diagramme sagittal d'une correspondance définie entre ensembles. L'élève est amené à chercher si cette correspondance est une fonction. Alors il doit appliquer la définition ensembliste de la notion de fonction (cf. la comptine $\mathbf{C_o}$).

[2] Dans la partie des exercices résolus, il n'y a aucun exercice qui concerne la représentation graphique de la fonction dans un repère orthonormé. Mais le manuel propose trois exercices (ou exemples) à la suite de la définition de cette dernière.

ii) Déterminer les ensembles correspondant (l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée ou l'ensemble image d'une fonction) (2 exercices) : il y a deux exercices pour lesquels on demande de déterminer les ensembles correspondant. Ainsi l'un propose de trouver l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image d'une fonction en utilisant sa représentation en diagramme sagittal et d'écrire la fonction sous forme de liste de couples. Et l'autre est une des questions du concours (Q9/1976). L'élève est amené à déterminer l'ensemble image d'une fonction définie algébriquement de A qui est l'ensemble des nombres pairs vers B. Il doit mettre l'expression générale des nombres pairs (2n), qui est précisée dans l'énoncé de l'exercice, à la place de x dans la formule de la fonction. Ainsi les connaissances antérieures liées aux ensembles des nombres paraissent comme des outils supposés disponibles dans ce travail.

iii) Calculer le nombre des fonctions ou non-fonctions (3 exercices) : il y a trois exercices dans lesquels il s'agit de calculer le nombre des correspondances qui sont des fonctions ou qui n'en sont pas définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. L'élève rencontre pour la première fois ce type d'exercices. Ainsi dans un exercice on demande de calculer le nombre des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Dans la résolution la formule nécessaire est simplement donnée sans commentaire. Il faut cependant souligner que dans le programme il n'y a aucune indication relative à cet exercice. L'élève doit d'abord trouver le cardinal des ensembles. Ensuite il doit appliquer la formule donnée[3]. Le cardinal et la puissance sont les outils supposés disponibles dans ce travail. Le deuxième exercice fait calculer le nombre des correspondances qui ne sont pas des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Les formules sont aussi énoncées sans raison comme dans l'exercice précédent et on demande à l'élève de les appliquer simplement. L'élève doit d'abord calculer le nombre des correspondances et des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre et ensuite la différence entre eux. Dans le dernier exercice on demande de calculer le cardinal de l'ensemble A si les cardinaux des ensembles A et B (A et B sont les sous-ensembles finis de Z) sont égaux et le nombre des correspondances qui ne sont pas des fonctions définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z est de 12. En utilisant les formules données dans les exercices précédents l'élève doit obtenir une équation exponentielle très particulière et ensuite la résoudre à partir des expérimentations numériques mais cette tâche est celle des chapitres suivants. Alors on peut dire qu'il s'agit d'une tâche prématurée.

[3] Si Card(A)=m et Card(B)=n, le nombre des fonctions définies de A vers B : n^m

1.8.2 Thème II : Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières (5 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Chercher l'injectivité des fonctions (2 exercices) : un exercice fait chercher si une fonction f affine définie sur Z est injective. L'élève doit mettre en fonctionnement l'écriture symbolique de la définition des fonctions injectives. Dans le deuxième exercice l'élève est amené à déterminer d'abord l'ensemble B qui contient des restes de la division de chaque élément de l'ensemble A par 5. Ensuite il doit représenter en diagramme sagittal la fonction f qui associe à chaque élément de A un élément de B et étudier la bijectivité de cette fonction. La division paraît donc comme un outil supposé disponible dans ce travail.

ii) Calculer le nombre des fonctions bijectives, injectives et non surjectives, non surjectives et non bijectives (3 exercices) : L'élève rencontre pour la première fois ce type d'exercice. De plus il n'y a aucune indication qui les mentionne dans le programme. Dans un exercice on demande de calculer le nombre des fonctions injectives et non-surjectives définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. La formule[4] dont l'élève a besoin est donnée dans la résolution sans commentaire et on lui demande de l'appliquer simplement en faisant appel aux connaissances antérieures concernant la permutation et les factorielles. Le deuxième exercice fait calculer le nombre des fonctions bijectives définies sur A (un sous-ensemble fini de Z). L'élève doit trouver le cardinal de l'ensemble A et ensuite appliquer simplement la formule énoncée comme dans les exercices précédents. Les factorielles que l'élève doit se servir sont les outils devant être disponibles dans ce travail. Dans le dernier exercice il faut calculer le nombre des fonctions non bijectives définies sur A (un sous-ensemble fini de Z). L'élève doit d'abord trouver le nombre des fonctions et celui des fonctions bijectives définies sur A et ensuite leur différence. La puissance, les factorielles et le cardinal s'avèrent les outils supposés disponibles dans ce travail.

1.8.3 Thème III : Recherche de l'inverse à partir d'une fonction algébrique (3 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Recherche de l'inverse d'une fonction définie à partir d'ensembles (1 exercice) : il s'agit de travailler sur une fonction f définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par une liste de couples. On demande de déterminer certaines images par l'inverse de la fonction f. L'écriture

---

[4] Si Card (A)=m, Card(B)=n et n>m, le nombre des fonctions injectives et non-surjectives ;

$$P(n,m)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

des fonctions (f et f^{-1}) sous forme de liste de couples et leur représentation en diagrammes sagittaux sont utilisées.

ii) Recherche de l'inverse des fonctions définies algébriquement (2 exercices) : dans un exercice il s'agit de trouver l'inverse d'une fonction f affine définie sur Z et exprimer la somme $f(2)+f^{-1}(3)$. En mettant en fonctionnement la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$, l'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction et ensuite calculer les images demandées pour trouver leur somme. Le deuxième exercice comprend deux parties . La première partie fait trouver l'inverse d'une fonction f affine, bijective et définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. Dans la deuxième partie il est nécessaire de résoudre l'équation $f^{-1}(24)-f(x)=f(-1)$. L'élève doit calculer l'image de 24 par f^{-1} et l'image de –1 par f pour obtenir l'équation demandée. La résolution d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail.

1.8.4 Thème IV :Composition des fonctions (5 exercices)

Nous constatons que les exercices se distinguent en deux catégories différentes suivant la tâche prescrite :

i) Composition des fonctions (3 exercices) : dans un exercice on demande de calculer la valeur $(fog^{-1})^{-1}(1)$ à partir des deux fonctions affines, bijectives et définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. L'élève doit d'abord appliquer la propriété de l'inverse de la composée puis trouver l'inverse de la fonction f en utilisant la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ pour obtenir la composée gof^{-1} et l'image demandée. Le deuxième exercice fait trouver, en utilisant deux fonctions affines définies sur Z, pour quelle valeur entière de k on a $(fog^{-1})(k)=1$. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction g et ensuite la composée. La résolution d'équations que l'élève doit faire fonctionner est un outil devant être disponible dans ce travail. Dans le dernier exercice on demande de trouver, en utilisant deux fonctions affines définies sur Z, pour quelle valeur de *a* on a $(fog)(a)+(gof)(a)=f(a)-g(a)+1$. Il y a plusieurs étapes. L'élève doit d'abord déterminer les deux types de composée (gof et fog) et ensuite calculer l'image de *a* par ces composées et les fonctions f et g. La résolution d'équations paraît aussi comme un outil supposé disponible dans ce travail.

ii)Décomposition des fonctions (2 exercices) : Un exercice fait trouver la fonction g si $(fog)(x)=x$ et $f(x)=\frac{2x-5}{3}$, pour les fonctions f et g définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. En utilisant la relation entre la fonction identique et la composée d'une fonction et son inverse l'élève doit reconnaître que la fonction g est égale à l'inverse de la fonction f. Il lui reste donc à trouver ce dernier à partir de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Le deuxième exercice on demande de trouver la fonction g si $f: x \rightarrow x^2$ et $gof: x \rightarrow -2x^2+5$, pour les fonctions f et g définies sur Z. L'élève est amené à utiliser la méthode du changement de variable. Ainsi il doit remplacer x^2 par y dans la formule de la composée. Cela lui permet d'obtenir la fonction g sans mettre en fonctionnement l'inverse de g et la décomposition.

1.8.5 Thème V :Image d'un nombre réel ou une expression algébrique par une fonction (1 exercice)

Puisqu'il y a beaucoup d'exercices dans lesquels l'élève doit calculer l'image des nombres réels, nous pouvons trouver un seul exercice qui fait directement calculer l'image d'un nombre réel. Dans cet exercice on demande de trouver la valeur $f(-2)-4.f(1)+2.f(0)$ à partir d'une fonction f affine définie sur Z. L'élève doit d'abord calculer les images et ensuite exprimer la valeur demandée.

1.9 Synthèse

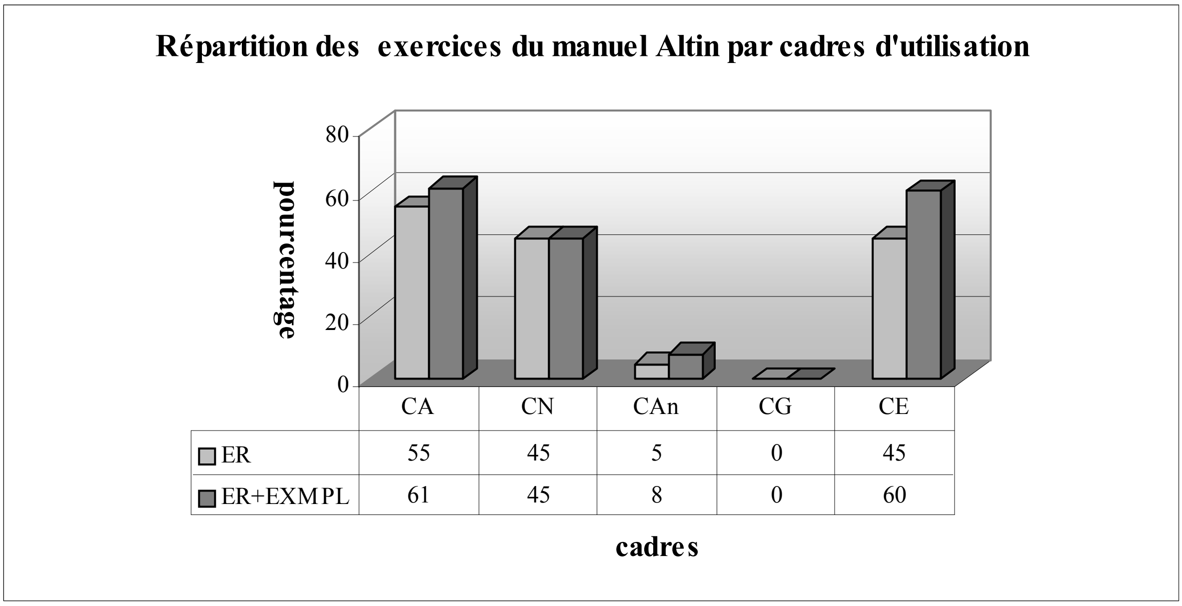
Nous constatons que toutes les notions qui figurent dans le programme officiel sont abordées par le manuel. Il n'y a aucune activité introductrice. La définition ensembliste est la seule définition utilisée pour introduire la notion de fonction. En ce qui concerne la méthode utilisée pour trouver l'inverse des fonctions, c'est la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Nous ne rencontrons pas la recette $\mathbf{R_a}$ dans le cours ni dans les exercices résolus.

Dans la collection de Altın il n'y a pas non plus de travaux pratiques comme le manuel précédent. Le manuel présente la résolution d'un certain nombre d'exercices. Et chacun contient une solution commentée. Dans la plupart des exercices il s'agit en général des applications directes du cours. Mais nous pouvons cependant trouver des exercices résolus[5] qui sont mis en place pour la première fois (le calcul des nombres de correspondances qui sont des fonctions ou qui n'en sont pas…etc). Dans leur résolution proposée, les formules dont l'élève doit se servir sont simplement données sans commentaire. Et on attend de l'élève de les mémoriser et de les appliquer De plus ils ne sont même pas dans le programme.

Quant aux cadres d'utilisation des exercices, le tableau ci-dessous montre que les cadres principaux sont le cadre algébrique(CA), le cadre numérique(CN) et le cadre de la théorie élémentaire des ensembles(CE). Le très faible pourcentage des exercices utilisent le cadre

[5] Les exercices concernant le nombre des fonctions, non-fonctions, fonctions injectives définies de A vers B …etc.

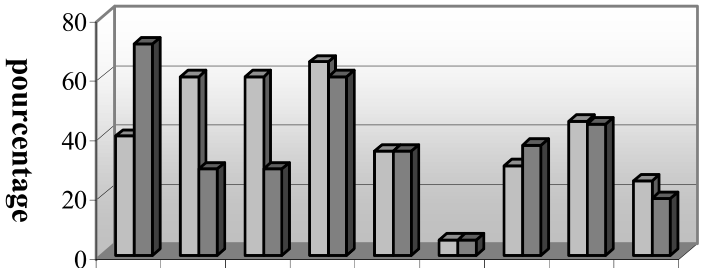
analytique (CAn). Tandis que le cadre géométrique(CG) est totalement absent. Cela signifie que le manuel Altın est géométriquement très pauvre.



Comme le montre bien le tableau précédent, près du tiers des exercices résolus font utiliser plusieurs connaissances antérieures de l'élève. 60% des exercices présentent un travail qui fait référence directe à la notion de fonction ou ses composantes. Dans la plupart des exercices l'élève doit mobiliser un seul outil. Tandis que 32% d'entre eux demandent de faire appel aux deux outils mobilisables. En ce qui concerne la répartition du nombre des étapes[6] prés de la moitié des exercices comprennent une seule étape. Ce taux descend un petit peu dans les exercices où l'élève doit passer deux étapes pour arriver à la bonne réponse. Par ailleurs il y a 19% des exercices résolus qui peuvent être résolus en trois étapes.

[6] Puisqu'on peut résoudre certains exercices en une étape ou deux étapes, il est normal que la somme des pourcentages des étapes dépasse 100%.

articulé ou simple-outils disponibles ou mobilisables-nombre des étapes



	S	A	OD1	OM1	OM2	OM3	E1	E2	E3
ER	40	60	60	65	35	5	30	45	25
ER+EXMPL	71	29	29	60	35	5	37	44	19

catégories

Annexe I-2 : analyse du manuel de lycée Aydın

2.1 Activités introductrices

Les auteurs du manuel commencent par annoncer que la notion de fonction est une correspondance particulière. Alors elle est aussi un ensemble des couples. Puisque la notion de fonction est une correspondance particulière, chaque correspondance ne peut donc être une fonction.

Ce manuel se distingue sensiblement des autres par la mise en cause de l'utilisation différente du mot « fonction » dans la vie courante et en mathématiques. Ainsi les auteurs affirment qu'on utilise la fonction en langue parlée au sens de l'activité que doit accomplir une personne pour jouer son rôle dans la société dans un groupe social. Ensuite ils prennent les deux exemples suivants :

L'activité du médecin est d'examiner des patients.
L'activité du jardinier est de cultiver des fleurs.

En ajoutant que la notion de fonction en mathématiques a un sens particulier, les auteurs définissent de l'ensemble A contenant des élèves de grandes tailles vers l'ensemble B des élèves de petites tailles en classe, une correspondance qui associe à chaque élève de grande taille un seul élève de petite taille. Grâce à cet exemple la comptine $\mathbf{C_0}$ est introduite.

Nous pensons que ce type d'activité est très loin d'être considéré concerne une activité introductrice. Il s'agit plutôt d'essayer de faciliter la compréhension de la définition ensembliste de la notion de fonction. De plus une introduction comme celle-ci nous semble réduire la notion de fonction à une simple correspondance entre ensembles.

2.2 Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant

Le manuel introduit la notion de fonction à partir de sa définition ensembliste comme les manuels précédents mais, contrairement aux autres, dans la définition il y a cependant une petite phrase supplémentaire qui renvoie à la première partie de la comptine $\mathbf{C_0}$ «aucun élément vacant dans l'ensemble de définition».

A la suite l'écriture symbolique de la définition et la deuxième partie de la comptine « chaque élément de l'ensemble de définition ne peut correspondre avec plus d'un élément de l'ensemble d'arrivée » sont mises en place. Ainsi l'élève rencontre la même chose (la comptine $\mathbf{C_0}$) pour la troisième fois dans une même page.

Par ailleurs le manuel présente les ensembles correspondant à la notion de fonction (ensemble de définition, ensemble d'arrivée, ensemble image) et il les représente en diagramme sagittal. La notation y=f(x) est également introduite à la place de la notation $(x,y) \in f$.

Cette théorie est suivie d'une série d'exemples. Les deux premiers exemples font appliquer directement la définition ensembliste de la notion de fonction (cf. la comptine $\mathbf{C_0}$). Ainsi dans l'un il s'agit de travailler sur une correspondance du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. L'élève doit chercher si cette correspondance est une fonction et si oui il doit déterminer son ensemble image. La représentation en diagramme sagittal est aussi utilisée. Dans l'autre on propose trois correspondances définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par une liste de couples. L'élève est amené à chercher si elles sont des fonctions et à les représenter en diagrammes sagittaux. La comptine $\mathbf{C_0}$ est mise en fonctionnement. Le troisième exemple demande de trouver l'ensemble de définition d'une fonction affine définie de A vers B (A et B sont les sous-ensembles finis de Z). L'élève doit calculer les antécédents en égalisant la formule algébrique de la fonction à chaque élément de l'ensemble image B. La résolution d'équation apparaît donc comme un outil supposé disponible dans ce travail. En ce qui concerne l'exemple suivant, il fait travailler sur la représentation en diagramme sagittal d'une fonction f définie à partir d'ensembles. L'élève doit écrire la fonction f sous forme de liste de couples et trouver sa formule algébrique. Avant proposer le dernier exemple, le manuel donne la formule du calcul du nombre des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre sans commentaire. Dans le dernier exemple il s'agit d'appliquer directement cette formule.

2.3 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé

La définition de la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé est suivie d'un exemple dans lequel on demande de représenter graphiquement une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. L'élève doit d'abord déterminer les points de coordonnées données en calculant les images et ensuite les placer dans un repère orthonormé. Dans la deuxième partie de cet exemple on propose aussi de représenter graphiquement cette même fonction dans la mesure où elle est définie sur |R. L'élève doit donc reconnaître qu'il s'agit de la représentation graphique d'une droite.

2.4 Egalité des fonctions

Nous trouvons un exemple qui illustre la définition de l'égalité des fonctions. Ainsi l'élève est amené à chercher, en trouvant les ensembles images, si une fonction du premier degré et une fonction du troisième degré définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z sont égales.

2.5 Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières

Conformément au programme le manuel présente la définition des fonctions injectives, surjectives, non surjectives, la fonction identique, constantes et nulle. De plus on peut aussi trouver la définition des fonctions bijectives et injectives-non surjectives.

En ce qui concerne ce qui accompagne les définitions, l'écriture symbolique de la bijectivité figure à la suite de la définition et il y a aussi quatre exemples qui illustrent la théorie. Les trois premiers exemples présentent la représentation graphique des fonctions injectives. Ainsi deux d'entre eux montrent la représentation en diagramme sagittal d'une fonction définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre et le troisième exercice, la représentation graphique dans un repère orthonormé d'une fonction affine définie sur |R. A la suite on invite les élèves, à partir de ces exemples, à inventer une représentation en diagramme sagittal d'une fonction injective définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. Quant au dernier exemple concernant la bijectivité on y demande d'étudier si la fonction carré définie sur |R est bijective. La méthode du contre-exemple est utilisée. Ainsi l'élève est amené à reconnaître que les images de 2 et –2 sont égales.

La définition des fonctions surjectives et celle des fonctions non-surjectives sont illustrées par les deux exemples qui présentent la représentation en diagramme sagittal d'une fonction surjective ou non-surjective définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre.

Par ailleurs, il y a trois exemples (ou exercices) proposés sous le titre intitulé « exemples » à la fin de cette partie. Les deux derniers exemples font chercher le type d'une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. L'élève doit trouver l'ensemble image et ensuite appliquer les définitions des propriétés particulières des fonctions. En ce qui concerne le premier exemple on y demande à l'élève d'inventer une fonction bijective définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z et trouver sa formule algébrique. L'élève doit établir un lien entre les éléments de A et ceux de B.

La définition de la fonction identique est suivie de trois exemples. L'un des deux premiers montre la représentation en diagramme sagittal de la fonction identique définie sur un sous-ensemble fini de Z et l'autre, la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction identique définie sur |R. Dans le deuxième exemple l'élève est aussi invité à reconnaître que la représentation graphique de la fonction identique est celle de la droite $y=x$.

Le dernier exemple demande de trouver les valeurs m et n si la fonction f définie sur Z par

$f(x)=(m-1)x+n-4$ est identique. En sachant que le coefficient de x est égal à 1 et le terme constant, à zéro dans la formule algébrique de la fonction identique l'élève doit égaliser m-1 à 1 et n-4 à zéro. Alors la résolution d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail.

La partie des propriétés particulières des fonctions se termine par deux exemples qui illustrent la définition des fonctions constantes dans lesquels il s'agit de la représentation en diagramme sagittal d'une fonction constante définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre.

2.6 Ensembles infinis et ensembles équipotents

Il y a deux exemples qui accompagnent la théorie. Ainsi le premier exemple indique que l'ensemble des nombres naturels est un ensemble infini et met en évidence ses différentes écritures. Dans l'exemple suivant, il s'agit d'étudier si la fonction f définie de l'ensemble des nombres entiers vers l'ensemble des nombres entiers impairs par $f(x)=2x+1$ est bijective et de chercher si ces ensembles sont équipotents. L'élève doit d'abord calculer les images de certains éléments de l'ensemble de définition et ensuite utiliser la définition de la bijectivité et des ensembles équipotents.

Comme on demande d'introduire la notion de loi de composition interne avant la composition des fonctions dans le programme, à la suite de cet exemple le manuel s'arrête et il présente la définition de la notion de loi de composition interne et ses propriétés.

2.7 Composition des fonctions

Le manuel commence la composition des fonctions par un exemple introductif comme les manuels précédents. Grâce à cet exemple l'élève est amené à connaître qu'il y a une nouvelle fonction définie de A vers C à partir d'une fonction carré f définie de A vers B et une fonction affine g définie de B vers C (A, B et C sont les sous-ensembles finis de Z). De plus le manuel explique comment on trouve la formule générale de la composée des fonctions f et g.

Par ailleurs il y a cinq exemples qui suivent la définition ensembliste de la composée. Dans ces exemples le manuel introduit également certaines propriétés de cette dernière. Le premier exemple dans lequel on met en évidence la non-commutativité de la composée demande de trouver les deux types de composées (fog et gof) d'une fonction du second degré et une fonction affine définies sur |R. Pour l'une des composées une identité remarquable paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Le but principal de l'exemple suivant est de montrer que dans certains cas il est possible que la composée soit commutative. Ainsi il propose de trouver les deux types de composées des deux fonctions affines définies sur |R. En ce qui concerne le troisième exemple à la suite duquel l'associativité de la composée est introduite, on demande de trouver les composées (fog)oh et fo(goh) à partir d'une fonction du second degré et deux fonctions affines définies sur |R. Le quatrième exercice fait calculer l'image d'un nombre réel par la composée d'une fonction affine et une fonction du second degré définies sur |R. Deux solutions sont proposées. L'élève peut d'abord trouver la composée demandée et ensuite calculer l'image du nombre réel. Ou bien il peut aussi calculer l'image demandée «fonction par fonction » sans trouver la formule algébrique de la composée. Dans le dernier exemple, l'élève est amené à trouver les deux types de composition d'une fonction affine et de la fonction identique définies sur |R. A la suite de cet exemple la définition de la fonction identique à partir de la composée est mise en place.

2.8 Définition de l'inverse d'une fonction

Avant la définition nous constatons qu'il y a un exemple grâce auquel on met en évidence qu'une fonction doit être bijective pour avoir une inverse. Alors l'élève doit d'abord représenter en diagrammes sagittaux une fonction affine et une fonction du second degré définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z et préciser leur type, ensuite écrire les fonctions sous forme de liste de couples et trouver leurs inverses et enfin étudier si ces inverses sont des fonctions.

La définition de la fonction inverse à partir de la composée est suivie de sa représentation en diagramme sagittal et de son écriture symbolique. De plus la relation entre la composée et la fonction identique est aussi introduite.

Il y a quatre exemples qui illustrent la théorie. Le premier exemple comprend deux parties. La première partie fait écrire une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z et son inverse sous forme de liste de couples. Ainsi l'élève doit déterminer tout couple *(x, y)* tel que $y=f(x)$ en calculant les images et ensuite la fonction inverse en remplaçant les abscisses par les ordonnées et vice et versa. Dans la deuxième partie on demande de trouver algébriquement l'inverse de la fonction. La méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ est utilisée. L'exemple suivant fait trouver l'inverse d'une fonction f définie algébriquement sur |R et la composée de la fonction f et son inverse. Deux solutions sont proposées : dans la première solution on demande de trouver l'inverse de la fonction à partir de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ et ensuite la composée de la fonction et son inverse, quant à la deuxième en sachant que la composée d'une fonction et son inverse est égale à la fonction identique l'élève est amené à obtenir l'équation $f(f^{-1}(x))=x$ et à calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x. Le troisième exemple demande de représenter graphiquement une fonction affine définie sur |R et son inverse dans un même plan analytique. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction en utilisant la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ et ensuite déterminer au moins deux points pour chacune des fonctions. Il est aussi amené à reconnaître que la représentation graphique d'une fonction et celle de son inverse sont symétriques par rapport à la droite $y=x$. En ce qui concerne le dernier exemple dans lequel on décontextualise que l'inverse de l'inverse d'une fonction est égal à la fonction elle-même, il s'agit d'une fonction affine définie sur |R. L'élève doit trouver les inverses en utilisant deux fois la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Contrairement aux manuels précédents ce manuel présente la méthode très courte pour trouver l'inverse de certaines fonctions définies algébriquement que nous appelons *recette d'abracadabra* $\boldsymbol{R_a}$ sous le titre « trouver l'inverse de certaines fonctions par une démarche courte » :

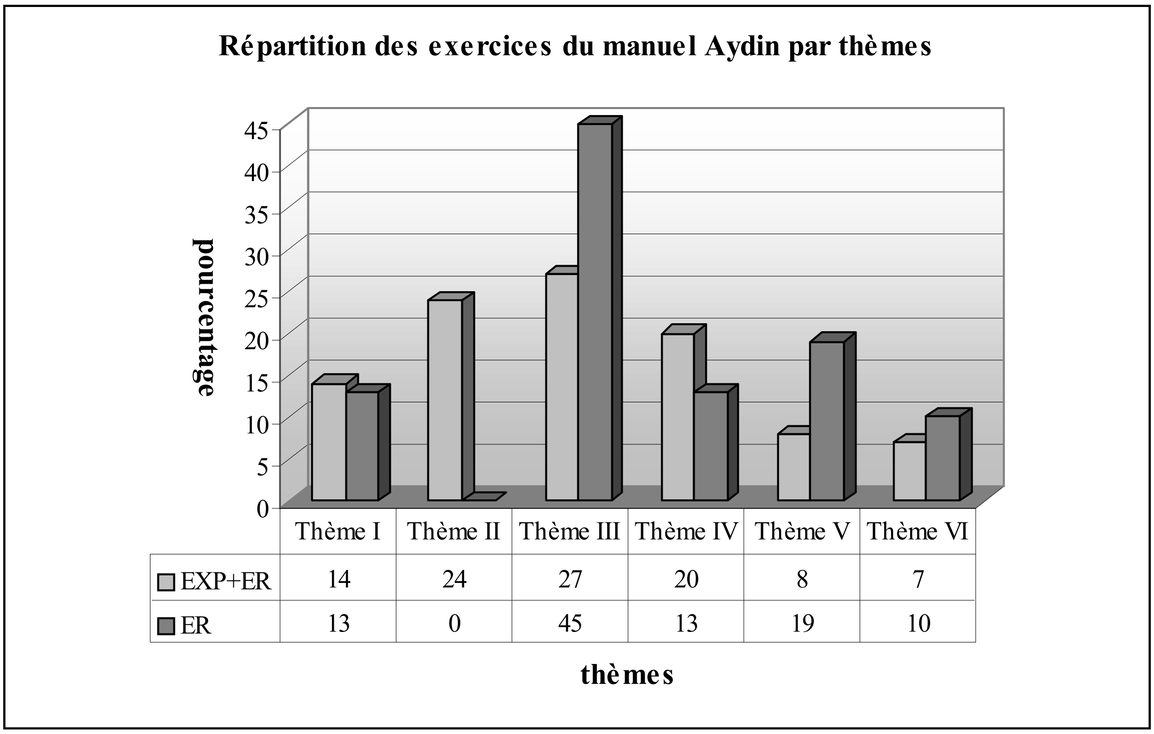
1. $f(x)=ax \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{a}$	2. $f(x)=x+a \Rightarrow f^{-1}(x)=x-a$
3. $f(x)=ax+b \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$	4. $f(x)=\frac{ax+b}{c} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{cx-b}{a}$
5. $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$	*(a et d changent à la fois leurs places et leurs signes.)*

A la suite il y a six exemples qui appliquent directement ces formules. Dans ces exemples nous constatons que les auteurs du manuel essayent d'attirer l'attention des élèves sur des erreurs à éviter en choisissant les coefficients négatifs :

2. $\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-8 \Rightarrow f^{-1}(x)=x+8,$	3. $\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+1 \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-1}{-2}=\frac{1-x}{2}$
4. $\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x+5 \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-5}{-1}=5-x,$	5. $\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2x-3}{4} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{4x+3}{2},$

2.9 Exercices résolus (31 exercices)

Dans ce manuel les exercices résolus se décomposent en trois parties. La première partie qui figure à la suite de la composition des fonctions et l'inverse de la fonction est proposée sous le titre « Exercices divers ». La deuxième partie est intitulée « trouver f [ou g] lorsqu'on a donné la composée fog et g [ou f] ». Dans cette partie il y a ainsi des exercices concernant la décomposition des fonctions. En ce qui concerne la dernière partie, elle est intitulée « test résolu ». Il y a des exercices à choix multiple qui concernent tout le chapitre « correspondance- fonction-loi de composition interne ».



Thème I : Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant, Thème II : Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières, Thème III : Composition des fonctions, Thème IV : Recherche de l'inverse des fonctions…, Thème V : Image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique…Thème VI : Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé, EXP : Exemples (effectif : 43 exemples), ER : Exercices résolus (effectif : 31 exercices).

Comme le manuel propose beaucoup d'exemples (ou exercices) à la suite des notions présentées, il nous semble indispensable de prendre en compte la répartition générale des exercices par thèmes. Selon le tableau précédent, les thèmes II, III et IV sont les thèmes plus fréquents. Nous constatons que le pourcentage des exercices qui concernent la définition ensembliste de la notion de fonction est de 14%. Pour les thèmes V et VI il s'agit presque du même pourcentage et ils sont les thèmes les moins fréquents des exercices du manuel.

Quand on regarde la répartition des exercices résolus par thèmes, près de la moitié des exercices concernent le thème III. Il est suivi du thème V (image d'un nombre) avec un taux de 19%. Par ailleurs il s'agit du même pourcentage (13%) pour les thèmes I et IV. Le nombre des exercices qui concernent la représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormé est assez modeste, tandis que le thème II a totalement disparu.

A partir de ces résultats, nous pouvons dire que le manuel accorde une place importante à la composition des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles. Cela est peut-être dû au fait que cette dernière contient également plusieurs applications du cours : l'inverse de la fonction, l'image d'un nombre et elle est l'un des thèmes les plus importants du concours.

2.9.1 Thème I : Définition ensembliste de la fonction et ensembles correspondant (3 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Application de la définition ensembliste de la notion de fonction (1 exercice) : il s'agit de travailler sur les correspondances définies sur un sous-ensemble fini et discret par une liste de couples. L'élève est amené à choisir celle qui n'est pas une fonction. En faisant appel à la définition ensembliste de la fonction (cf. la comptine $\mathbf{C_o}$) l'élève doit à la fois chercher s'il y a des éléments vacants et des éléments qui aient plus d'une image dans l'ensemble de définition parmi les correspondances proposées.

ii) Déterminer les ensembles (ensemble de définition, ensemble d'arrivée et ensemble image) correspondant à la notion de fonction (2 exercices) : dans un exercice on demande de déterminer l'ensemble image d'une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. L'élève doit calculer les images en mettant à la place de x les éléments de l'ensemble de définition de la fonction. Inversement le deuxième exercice fait déterminer l'ensemble de définition d'une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. L'élève doit donc calculer les antécédents en égalisant la formule algébrique de la fonction à chaque élément de l'ensemble image. La résolution d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail.

2.9.2 Thème III : Composition des fonctions (14 exercices)

Voici les catégories des exercices selon la tâche prescrite :

i) Composition des fonctions (4 exercices) : dans un exercice il s'agit de montrer l'égalité $(fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$. Il y a plusieurs étapes. L'élève doit d'abord trouver la composée des deux fonctions affines définies sur |R et son inverse, ensuite il doit trouver les inverses des fonctions et leur composée. Enfin il lui reste à vérifier si ces deux composées sont égales. Le deuxième exercice fait trouver, à partir des deux fonctions affines définies sur |R, pour quelle valeur de m on a $f^{-1}(m)+g(m)=(fog)(m)$. L'élève doit d'abord trouver la composée des fonctions et l'inverse de la fonction f à partir de la recette $\mathbf{R_a}$, ensuite les images de m par les fonctions. La résolution d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Dans le troisième exercice il s'agit de calculer l'image d'un nombre réel par la composée des deux fonctions polynômes définies par morceaux sur |R. L'élève rencontre pour la première fois ce type d'exercice qui présente un travail prématuré pour lui. Car les fonctions définies par morceaux relèvent du programme de la classe de terminale. L'élève doit calculer l'image demandée «fonction par fonction» sans trouver la formule générale de la composée. Dans le dernier exercice il est nécessaire de trouver la valeur m si la fonction f est définie sur |R par *f(x)=3x+m* et *(fof)(x)=9x+8*. L'élève doit d'abord composer la fonction f avec elle-même et ensuite trouver la valeur m en utilisant l'égalité des polynômes. Il faut cependant indiquer que cette dernière est une notion qui appartient à l'un des chapitres suivants (les polynomes). C'est la raison pour laquelle nous pouvons dire qu'il s'agit d'un travail prématuré pour ce niveau des élèves.

ii)Décomposition implicite des fonctions (6 exercices) : dans un exercice on propose de trouver la fonction f définie sur |R à partir de la fonction *f(2x+5)= 3x-8*. Un point méthode est proposé par le manuel comme suit :

Etant donné les fonctions f, g et h définies sur |R. *Pour obtenir f(x) à partir de l'expression f[g(x)]=h(x), on met* $g^{-1}(x)$ *à la place de x dans la fonction h(x).*

Alors l'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction implicite *(2x+5)* et ensuite le mettre à la place de x dans la composée *f(2x+5)= 3x-8* pour trouver *f(x).* Le deuxième exercice fait calculer l'image de 1 par la fonction f définie sur |R si $f(\frac{x-2}{3})=1-3x$. Un point méthode est mis en place :

Etant donné les fonctions f,g et h définies sur |R. *Pour trouver facilement f(a) (a* $\in$ |R*) à partir de l'expression f[g(x)]=h(x), on met la valeur x qu'on a trouvée en résolvant g(x)=a, dans la fonction h(x)*

Deux solutions sont proposées. Ainsi, ou bien l'élève peut suivre la même procédure que dans l'exercice précédent et il peut trouver la fonction f et ensuite calculer l'image de 1, ou à partir de ce point méthode il peut trouver pour quelle valeur de x on a *2x+5=1* et ensuite mettre la valeur obtenue dans la composée. Dans le troisième exercice l'élève est aussi amené à calculer l'image de 3 par l'inverse de la fonction f définie sur |R si *f(3x-4)=4x+2*. Deux solutions sont proposées. La première demande de trouver la fonction f et son inverse, ensuite calculer l'image de 3 par f^{-1}. Dans la deuxième solution il n'est pas nécessaire de trouver la fonction f et son inverse. En utilisant la définition de la fonction inverse l'élève peut obtenir la fonction $f^{-1}(4x+2)=3x-4$ et ensuite calculer l'image de 3 par f^{-1} à partir du point méthode de l'exercice précédent. Le quatrième exercice propose de trouver la somme des inverses des fonctions f et g définies sur IR si $f(x-3)=3x-9$ et $g(2x+1)=2x+7$. L'élève doit d'abord trouver les fonctions f et g et ensuite leur inverse à partir de $\mathbf{R_a}$ pour exprimer $f^{-1}+g^{-1}$. Dans un autre exercice on demande de trouver pour quelle valeur de *a* on a *f(a)=-1* si $g(x+1)=2x-3$ et $(f^{-1}og)(x)=5-2x$, pour les fonctions f et g définies sur |R. Il s'agit de plusieurs étapes. L'élève doit tout d'abord trouver la fonction g. Ensuite en écrivant *g(x)* dans la composée il doit obtenir une autre décomposée implicite $f^{-1}[g(x)]=5-2x$. A nouveau il doit faire la même chose pour trouver $f^{-1.}$ Après avoir trouvé la fonction f il doit trouver l'image de *a* et ensuite la valeur de *a* . Le dernier exercice fait calculer l'image de –2 par la fonction g définie de |R vers |R-{-1,1} si la fonction f est définie sur |R par *f(2x)=2x-4 et (fog)(x)=*$\frac{3x}{x^2-1}$. Il y a aussi plusieurs étapes. L'élève doit d'abord trouver la fonction f comme dans les exercices précédents. Ensuite sans faire appel à l'inverse de la fonction f et la définition de la fonction identique il doit obtenir une équation en calculant l'image de g(x) par f. Enfin il doit calculer la fonction g en fonction de x et l'image de –2 par g.

iii)Décomposition des fonctions (4 exercices) : dans un exercice il s'agit de « décomposer » *(fog)(x)=4x+5* en utilisant *f(x)=3x-1* pour trouver la fonction g, dans le deuxième exercice de « décomposer » *(fog)(x)=3x-4* en utilisant *g(x)=2x+3* pour trouver la fonction f, dans le troisième exercice de « décomposer » $(gof^{-1})(x)=5-x$ en utilisant $f^{-1}(x)=3x-2$ pour trouver la fonction g et dans le dernier exercice de « décomposer » $(f^{-1}og^{-1})^{-1}(x)=1-3x$ en utilisant $g(x)=\frac{x+1}{3}$ pour calculer la valeur $f^{-1}(1)$. Dans le premier exercice deux solutions sont proposées. En mettant g(x) dans la fonction f l'élève peut obtenir une équation. Ensuite il doit calculer g(x) en fonction de x. Quant à la deuxième solution, l'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction f à partir de la recette $\mathbf{R_a}$ et ensuite la fonction g en utilisant la définition de la fonction identique. Dans le deuxième exercice en écrivant *g(x)* dans la fonction *f* l'élève est amené à obtenir une composée (implicite) *f(2x+3)=3x-4*. Il doit d'abord trouver l'inverse de la fonction g et ensuite le mettre à la place de x dans la composée (implicite). Dans le troisième exercice on invite aussi l'élève à obtenir une composée (implicite) *g(3x-2)=5-x* en écrivant f^{-1} dans la fonction g. Ensuite il doit trouver la fonction g comme dans l'exercice précédent. Quant au dernier exercice, à partir de l'inverse de la composée l'élève doit d'abord obtenir $gof(x)=1-3x$ et ensuite mettre *f(x)* dans la fonction g ($\frac{f(x)+1}{3}=1-3x$). Cela lui permet de trouver la fonction f sans faire appel à la décomposée. Enfin il doit calculer la fonction f en fonction de x et l'image de –1.

2.9.3 Thème IV :Recherche de l'inverse d'une fonction (5 exercices)

Dans le cours le manuel propose beaucoup d'exemples qui font chercher l'inverse des fonctions définies algébriquement. C'est pourquoi nous ne pouvons trouver que cinq exercices sur ce thème, et nous pouvons les classer en quatre catégories différentes selon la tâche prescrite :

i)Recours indispensable de l'inverse de la fonction pour la résolution d'une autre question (2 exercices) : dans un exercice l'élève est amené à trouver l'ensemble image de la fonction g définie par $g(x)=f(x)+3.f^{-1}(x)$ si la fonction f est définie sur |R par $f(x)=5x+1$. Il s'agit des trois étapes. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction f à partir de la recette $\mathbf{R_a}$ et ensuite la formule algébrique de la fonction g. La résolution d'équations à laquelle l'élève doit faire appel est un outil supposé disponible dans ce travail. Le deuxième exercice fait trouver l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée de la fonction définie d'un sou-ensemble fini de Z dans Z par $f(x)=\frac{5}{x-3}$. C'est un type de question du concours (Q43/1997 et Q44/1998). En sachant que l'ensemble d'arrivée d'une fonction est égal à l'ensemble de définition de l'inverse de cette fonction l'élève doit trouver pour quelles valeurs de x le dénominateur de la fonction et celui de son inverse sont égaux à zéro. Ainsi il doit trouver l'inverse de la fonction en utilisant la recette $\mathbf{R_a}$. Il faut cependant souligner que ce type de travail est tout à fait dans le programme de la classe de terminale.

ii) Recherche de l'inverse d'une fonction définie algébriquement (1 exercice) : on demande de trouver l'inverse de la fonction f bijective définie par $f(x)=\frac{x+2f(x)}{3x-1}$. C'est un exercice qui s'inspire beaucoup d'une des questions du concours (Q41/1997). L'élève doit d'abord calculer f(x) en fonction de x et ensuite trouver son inverse à partir de la recette $\mathbf{R_a}$.

iii) Recherche de l'inversibilité d'une fonction (1 exercice) : on demande de trouver laquelle des fonctions proposées au choix n'a pas d'inverse. Il s'agit donc de l'utilisation de la relation entre la bijectivité et la fonction inverse. A nouveau nous sommes face à un exercice semblable à l'une des questions du concours (Q3/1971). En sachant qu'une fonction doit être bijective pour avoir un inverse l'élève est amené à étudier la bijectivité de chacune des fonctions définies sur |R proposées au choix. Dans la résolution sans prendre en compte les autres fonctions on montre directement, à partir de la méthode de contre-exemple, que la fonction carré définie sur |R n'est pas bijective.

iv) Calculer le nombre des correspondances qui ne sont pas des fonctions (1 exercice) : un exercice fait calculer le nombre des correspondances qui ne sont pas des fonctions définies de

A vers B (A et B sont les sous-ensembles finis et discrets) si card(A)=2 et card(B)=4. L'élève doit utiliser la formule du calcul du nombre des correspondances définies de A vers B et celle du nombre des fonctions définies de A vers B et ensuite trouver leur différence.

2.9.4 Thème V : Image d'un nombre réel ou une expression algébrique par une fonction (6 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en quatre catégories différentes selon la tâche prescrite:

i) Utilisation indispensable de la formule générale des fonctions affines pour calculer l'image d'un nombre réel (1 exercice) : il s'agit de mettre en fonctionnement la formule générale de la fonction affine. Il faut d'emblée signaler que l'élève entend pour la première fois le nom de la fonction affine. De plus dans le programme il n'y a aucune indication qui concerne la fonction affine. Mais il y a des questions du concours (Q22/1987 et Q38/1996). Si on reprend l'exercice, on demande de calculer l'image d'un nombre réel par f^{-1} si $f(1)=2$ et $f(2)=3$, et si la fonction f est affine. Il y a plusieurs étapes. L'élève doit d'abord obtenir un système linéaire d'équations en calculant l'image de 1 et 2 par $f(x)=ax+b$. Après avoir trouvé la fonction f il doit trouver son inverse à partir de la recette $\mathbf{R_a}$ et ensuite calculer l'image demandée. La résolution du système linéaire d'équations paraît donc comme un outil supposé disponible dans ce travail.

ii) Trouver l'image d'un nombre réel à partir d'images connues (1 exercice) : on propose de déterminer la valeur $(f^{-1}og)^{-1}(6)$ en utilisant $f^{-1}(4)=6$ et $g(3)=4$ si les fonctions f et g définies sur |R sont bijectives. De l'application de l'inverse de la composée l'élève doit trouver $g^{-1}[f(6)]$. En utilisant la définition de la fonction inverse pour f et g il doit trouver $f(6)=4$ et $g^{-1}(4)=3$.

iii) Calculer l'image d'une expression algébrique en fonction de f(x) (1 exercice) : il s'agit de calculer l'image d'une expression algébrique en fonction de $f(x)$. C'est un type de question du concours (Q30/1990 et Q36/1995) qui est mis en place pour la première fois. L'élève est amené à calculer l'image de $3x+1$ par f en fonction de $f(x)$ si la fonction f est définie sur |R par $f(x)=4x-1$. Il doit d'abord calculer l'image de $3x+1$ par f. Ensuite il doit aussi calculer x en fonction de $f(x)$ et le mettre à la place de x dans l'image de $3x+1$. La résolution d'équations est un outil supposé disponible dans ce travail.

iv) Calculer l'image d'un nombre réel à partir d'expérimentations numériques (3 exercices) : dans un exercice on demande de calculer la valeur $f(1)$ si $2f(x)+xf(-x)=-3x^2+7x+2$, pour la fonction f définie sur |R. L'élève doit d'abord obtenir un système linéaire d'équations en mettant respectivement 1 et –1 à la place de x dans l'expression et ensuite le résoudre. Alors les connaissances antérieures concernant la résolution du système linéaire d'équations sont des outils supposés disponibles dans ce travail. Le deuxième exercice fait trouver la valeur *f(1)-f(6)* si *f(3x)+f(2x-1)=5x+1*, pour la fonction f définie sur |R. L'élève doit mettre respectivement les valeurs numériques 1 et 2 à la place de x dans l'expression. Ensuite il doit résoudre le système linéaire d'équations de manière à obtenir la différence *f(1)-f(6)*. Dans le dernier exercice il est nécessaire de calculer l'image de 17 par f si $f(x)=\frac{x}{3}f(4x+1)$ et $f(\frac{3}{4})=1$, pour la fonction f définie sur |R. Pour calculer l'image demandée l'élève a besoin de trouver l'image de 4 et pour cette dernière l'image de $\frac{3}{4}$. Alors il doit calculer ces images en mettant les nombres 4 et $\frac{3}{4}$ à la place de x dans l'expression.

<u>2.9.5 Thème VI :Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (3 exercices)</u>

Nous constatons qu'il n'y a que trois exercices qui concernent la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé . Dans chacun d'eux il s'agit de lire et interpréter cette dernière. L'élève doit prendre en compte qu'on repère les éléments de l'ensemble de définition sur l'axe des abscisses et ceux de l'ensemble d'arrivée sur l'axe des ordonnées.

Dans un exercice comprenant quatre parties les deux premières parties font déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée d'une fonction *f* à partir de sa représentation graphique dans un repère orthonormé . En ce qui concerne les deux dernières parties, l'élève est amené à déterminer graphiquement l'image de nombres réels par f, f^{-1} ou certaines composées (fof, fof^{-1}…etc.). L'élève doit prendre en compte que la représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormé et également celle de son inverse (en échangeant les axes). Dans le deuxième exercice il s'agit de calculer la valeur $f^{-1}(4)+g(0)-(fog^{-1})(3)$ graphiquement à partir des représentations graphiques dans un même repère orthonormé des fonctions f et g définies sur |R. Le dernier exercice demande de trouver, dans les intervalles où la fonction f^{-1}est définie, la valeur $\frac{f(2)+f^{-1}(2)}{(f^{-1}of)(3)}$ à partir de la représentation graphique de la fonction f définie de [0,5] vers [-2,2].

2.10 Synthèse

Constatons tout d'abord que le manuel aborde toutes les notions qui figurent dans le programme. Conformément aux manuels précédents celui-ci commence par mettre en évidence différentes utilisations du mot « fonction » dans la vie courante et en mathématiques. De plus il propose un exemple introductif dont le but principal est de présenter la comptine $\mathbf{C_o}$ qui aidera à la reconnaissance de la définition ensembliste de la notion de fonction. Mais il est difficile de le considérer comme une activité introductrice.

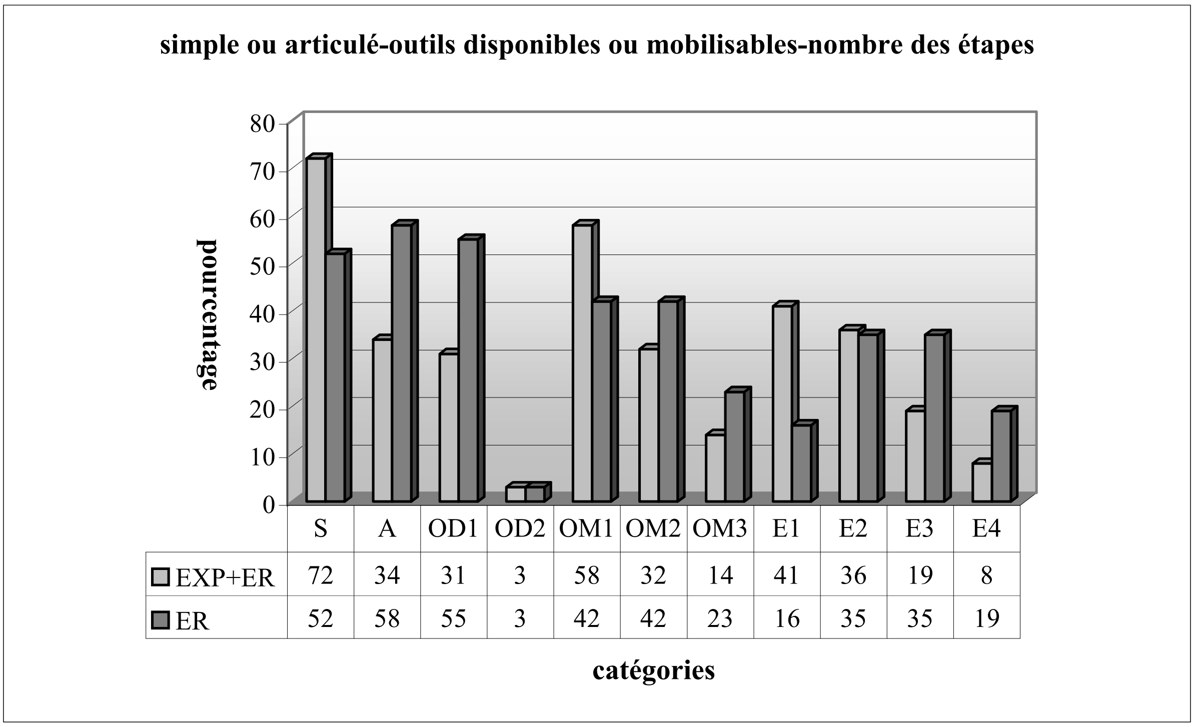
Par ailleurs, la définition ensembliste de la notion de fonction est la seule définition utilisée pour introduire les fonctions. En ce qui concerne la méthode privilégiée pour trouver la fonction inverse, nous pouvons trouver les deux méthodes : méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ et recette $\mathbf{R_a}$. Mais ce manuel se différencie des autres manuels par l'attribution d'un titre à la recette $\mathbf{R_a}$ dans le cours. Ainsi après avoir traité quelques exemples avec la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$, la recette $\mathbf{R_a}$ est introduite sous le titre « trouver l'inverse de certaines fonctions par des démarches courtes ». A partir de là la méthode plus mathématisée a totalement disparu.

Il est cependant très intéressant que les trois manuels présentent une grande diversité dans l'utilisation de certaines formules pour le calcul du nombre des correspondances, des correspondances qui sont des fonctions, des correspondances qui ne sont pas des fonctions, des fonctions injectives, non-injectives définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre…etc. Ainsi dans le manuel Tutibay nous ne retrouvons aucune formule. Le manuel Altın met en place presque toutes les formules dans des exercices résolus. Tandis que le manuel Aydın ne présente que celle qui consiste à calculer le nombre des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre grâce à une remarque. Comme dans le programme il n'y a aucune indication qui concerne ces formules, nous nous demandons d'où viennent-t-ils ces formules ?

Dans la collection d'Aydın l'influence du concours est assez forte. Et elle ne se limite pas à la recette $\mathbf{R_a}$. Par exemple la « décomposée » implicite *(f(ax+b)=dx+c)* est un des thèmes plus fréquents du concours. Dans sa résolution proposée par le manuel on demande à l'élève de trouver d'abord l'inverse de *ax+b* et ensuite le mettre à la place de x dans *f(ax+b)=dx+c*. Il nous semble que ce type de solution ne permet pas à l'élève de reconnaître qu'il s'agit d'une décomposée, *ax+b* est une fonction et on utilise aussi ici la définition de la fonction identique. Le manuel met en place beaucoup d'exercices de ce type. En plus lorsqu'il s'agit d'une décomposée normale[1] l'élève est toujours amené à la rendre en décomposée implicite et à

[1] Lorsqu'on donne la composée comme la suite gof(x)=3x+2 et l'une des fonctions f(x)=2x+1, on demande de trouver l'autre fonction.

privilégier la résolution décrite plus haut. Nous pouvons trouver plusieurs types de questions du concours dans les exercices résolus. Par ailleurs cet intérêt du concours force également les auteurs à s'éloigner du programme de la classe de seconde. Par exemple l'élève peut rencontrer pour la première fois un exercice concernant la fonction définie par morceaux qui est en principe dans le programme de terminale ou bien la formule générale de la fonction affine dont on ne parle jamais pendant le cours. Le tableau ci-dessous montre très bien que les investissements au concours paraissent plutôt dans les exercices résolus.



	S	A	OD1	OD2	OM1	OM2	OM3	E1	E2	E3	E4
EXP+ER	72	34	31	3	58	32	14	41	36	19	8
ER	52	58	55	3	42	42	23	16	35	35	19

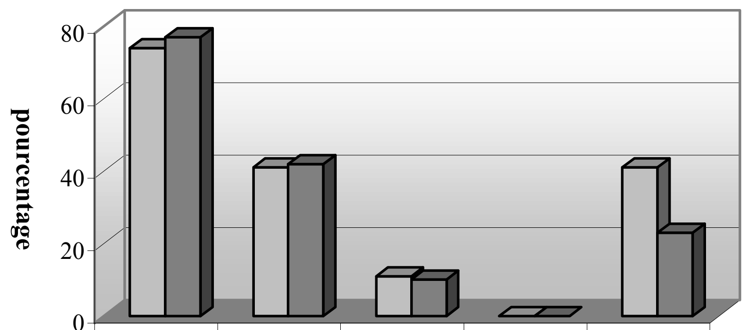
S :Simple, A :Articulé, OD1 :Outil disponible 1, OD2 :Outil disponible 2, OM1 :Outil mobilisable 1, OM2 :Outil mobilisable 2,OM3 :Outil mobilisable 3,E1 :Etape 1, E2 :Etape 2, E3 :Etape 3, E4 :Etape 4, EXP :Exemples (effectif :43 exemples), ER :Exercices résolus (effectif :31 exercices)

Quand on prend en compte tous les exemples et exercices du manuel, nous constatons que la plupart des exercices demandent des applications directes du cours (Simple :S). Tandis que seuls plus du tiers d'entre eux portent sur plusieurs connaissances antérieures des élèves (Articulé :A). Pour 31% des exercices l'élève doit faire appel à une connaissance déjà acquise. D'un très faible pourcentage s'agit- il dans les exercices qui demandent deux outils devant être disponibles pour le travail. En ce qui concerne la répartition des outils mobilisables, la moitié des exercices demandent de mobiliser un seul outil contre 32% des exercices deux outils et 14%, trois outils. Par ailleurs 77% des exercices peuvent être résolus en une ou deux étapes[2]. Tandis que le taux des exercices nécessitant trois ou quatre étapes est de 27%.

Comme nous l'avons déjà dit, l'influence du concours est plus évidente dans les exercices résolus. Le tableau ci-dessus[3] montre que la plupart des exercices portent sur plusieurs connaissances antérieures des élèves. Tandis que dans 52% des exercices il s'agit des applications directes du cours. Plus de la moitié demandent à l'élève de faire appel à un seul outil disponible contre un très petit nombre, deux outils disponibles. Quant aux outils mobilisables, 65% des exercices invitent l'élève à mobiliser plusieurs connaissances directement liées à la fonction ou ses composantes (OM2+OM3). Par ailleurs, dans la grande majorité des exercices l'élève peut arriver à la bonne réponse en plusieurs étapes (E2+E3+E4 :89%).

En ce qui concerne les cadres d'utilisation dans tous les exercices du manuel, comme le montre bien le tableau suivant, le cadre majoritairement mobilisé est le cadre algébrique. Il est suivi du cadre numérique (il intervient plutôt lors du calcul des images des nombres réels) et cadre de la théorie élémentaire des ensembles (il intervient lorsqu'il s'agit des fonctions définies de manière ensembliste et leur représentation en diagrammes sagittaux) avec un taux de 41%. Seuls 11% des exercices utilisent le cadre analytique. Tandis que le cadre géométrique est totalement absent. Comme les deux manuels précédents, celui-ci est aussi géométriquement très pauvre.

Répartition des cadres d'utilisation dans les exercices du manuel Aydin



	CA	CN	CAn	CG	CE
EXP+ER	74	41	11	0	41
ER	77	42	10	0	23

cadres

---

[2] Puisque le manuel propose, pour certains exercices, deux solutions qui se différencient par le nombre des étapes et par les outils mobilisables ou disponibles, la somme des répartitions du nombre des étapes ou des outils dépasse 100%.

[3] Idem

Si l'on prend en compte la répartition des cadres d'utilisation dans les exercices résolus, à part le cadre de la théorie élémentaire des ensembles, ces taux ne changent presque pas. Ainsi le taux des exercices qui utilisent le cadre de la théorie élémentaire des ensembles descend à 23%.

Annexe I-3 : analyse du manuel de préparation au concours Uğur

Dans la collection d'Ugur la notion de fonction est présentée dans le chapitre intitulé « correspondance et fonction ». Contrairement aux manuels de lycée ce manuel distingue donc la notion de loi de composition interne des notions de fonction et de correspondance.
Il n'y a aucune activité préparatoire. Les auteurs du manuel commencent directement par le cours en présentant la définition de la notion de fonction de manière ensembliste.

3.1 Définition ensembliste de la notion de fonction

La définition ensembliste de la notion de fonction est introduite de la manière symbolique.

Soient A et B deux ensembles non-vides et f une correspondance définie de A vers B. La correspondance f est une fonction définie de A vers B, si

i) $\forall x \in A,\ \exists y,\ y \in B\ \ (x, y) \in f$

ii) $(x, y) \in f$ *et* $(x, z) \in f \ \Rightarrow y=z$

On écrit $f : A \rightarrow B$

$x \rightarrow y=f(x)$

A la suite de cette définition nous constatons que figurent la représentation d'une fonction *f* en diagramme sagittal et quatorze exemples (ou exercices résolus) dont la plupart ne concernent pas directement la définition.
Dans le premier exemple il s'agit de déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image d'une fonction définie en diagramme sagittal. Le passage du diagramme sagittal à l'écriture par une liste de couples est mobilisé.
L'introduction de la comptine $\mathbf{C_o}$ suit cet exemple comme une remarque :

REMARQUE N°1[1] *: Pour que la correspondance f puisse être une fonction, il faut que chaque élément de l'ensemble de définition ait une image et que chaque élément ait une seule image.*

Le deuxième exemple est une application directe de cette remarque. L'élève est amené à étudier si trois correspondances définies par une liste de couples d'un sous-ensemble discret fini dans un autre sont des fonctions. Dans les deux exemples suivants on demande de chercher si une correspondance définie algébriquement sur |R est une fonction. Pour le premier exemple de ce groupe l'élève est amené à constater que pour tout x réel, $f(x)=3x-1$ est aussi réel. Alors cette correspondance est une fonction. Pour le deuxième comme un

[1] Dans le manuel les remarques ne sont pas numérotées.

élément de l'ensemble de définition a plus d'une image (par exemple x=0), la correspondance f définie sur |R par $|y|=x+2$ n'est pas une fonction. Le cinquième exemple demande de déterminer l'ensemble image d'une fonction rationnelle définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z et d'écrire la fonction sous forme de liste de couples.

En ce qui concerne les exemples restant, comme nous l'avons déjà indiqué, ils ne font pas référence directe à la définition et sont plutôt destinés à calculer l'image d'un nombre réel. C'est pourquoi nous les analyserons dans la partie des exercices résolus.

3.2 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé

La définition de la représentation graphique des fonctions est suivie d'un certain nombre d'exercices et de deux remarques. Dans le premier exemple il s'agit de représenter graphiquement une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. L'élève doit d'abord déterminer les couples puis les placer dans un repère orthonormé. Le but du deuxième exemple est de montrer pour quelles valeurs ou quels intervalles une fonction définie sur |R et représentée graphiquement dans un repère orthonormé est négative, positive ou nulle. En ce qui concerne le troisième exemple qui est une question à choix multiple (QCM), il s'agit de lire et d'interpréter la représentation graphique d'une fonction définie par morceaux. L'élève doit chercher en déterminant graphiquement quelques images mises en jeu si cinq propositions sont vraies.

Avant de passer aux exemples suivants, une remarque est proposée comme suit :

REMARQUE N°2 : Dans la représentation graphique d'une fonction son ensemble de définition se repère sur l'axe des abscisses, son ensemble d'arrivée sur l'axe des ordonnées.

Le quatrième exemple illustre cette remarque. A partir de la représentation graphique dans un repère orthonormé l'élève doit déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble image et l'ensemble d'arrivée d'une fonction définie d'un sous-intervalle de |R dans un autre. Les connaissances liées aux intervalles que l'élève doit faire fonctionner sont des outils supposés disponibles dans ce travail.

A la suite de cet exemple nous constatons qu'il y a une autre remarque qui peut être qualifiée de point méthode pour chercher graphiquement si une correspondance est une fonction.

REMARQUE N°3 : Si chaque droite tracée parallèle à l'axe des ordonnées et la représentation graphique d'une correspondance se coupent au plus en un point, la représentation graphique est celle d'une fonction. Si au moins un droite tracée parallèle à l'axe des ordonnées et la représentation graphique se coupent en plusieurs points, la représentation graphique n'est pas celle d'une fonction mais celle d'une correspondance.

Le manuel illustre cette remarque avec deux exemples. L'élève est amené à chercher en traçant des parallèles à l'axe des ordonnées si les représentations graphiques données sont celle d'une fonction.

3.3 Quatre opérations sur les fonctions

Il faut tout d'abord signaler que les quatre opérations sur les fonctions figurent dans le programme de la classe de terminale. Il n'y a aucune explication ni démonstration. Le manuel cite simplement les quatre opérations sur les fonctions de manière symbolique. Ensuite deux exemples sont proposés. Le premier exemple demande de calculer la valeur *(f+g) (-8)+(f.g)(27)* en utilisant les fonctions f et g définies par :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1;\ x<1 \\ x-10;\ x>1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x)=\sqrt[3]{x}-5\,.$$

Les signes d'inéquations et la racine cubique auxquels l'élève doit faire appel sont les outils supposés disponibles dans ce travail. Le deuxième exemple demande de déterminer les fonctions $f+2g$ et $\frac{f}{g}$ en utilisant les fonctions f et g définies par une liste de couples (f={(-1,2), (1,3), (2,-4)} et g={(-1,1), (2,2), (3,1)}). L'élève doit faire attention au fait qu'il ne peut faire ces opérations que pour les éléments communs aux ensembles de définition des deux fonctions.

3.4 Egalité des fonctions

La définition de l'égalité des fonctions est illustrée par un seul exemple au cours duquel l'élève est amené à chercher si les fonctions f et g définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par $f(x)=3|x|$ et $g(x)=x^2$ sont égales. L'élève doit calculer les images par chacune des fonctions ensuite vérifier qu'elles sont égales. La valeur absolue paraît comme outil devant être disponible dans ce travail.

3.5 Propriétés particulières des fonctions

Nous pouvons trouver toutes les propriétés particulières des fonctions qui figurent dans le programme de la classe de seconde. La définition de la notion de fonction non surjective est suivie de deux exemples dont l'un illustre la définition avec la représentation en diagramme sagittal d'une fonction non surjective définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Quant au deuxième exemple, l'élève est amené à chercher si la fonction f définie sur |R par $f(x)=x^2+1$ est non surjective. En sachant que pour tout x réel, $x^2+1\geq 1$ l'élève doit s'apercevoir que dans l'ensemble d'arrivée il y a des éléments vacants.

Après avoir défini la surjectivité des fonctions, quatre exemples sont proposés. Le premier présente la représentation en diagramme sagittal d'une fonction surjective définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Dans les deux exemples suivants il s'agit d'étudier la surjectivité d'une fonction affine définie sur |R et sur |R. L'élève doit chercher s'il est toujours possible de trouver un antécédent réel et naturel pour tout y réel et naturel.

Avant le dernier exemple pour chercher si une fonction représentée graphiquement dans un repère orthonormé est surjective le manuel donne la remarque suivante :

REMARQUE N°4 : Si chaque droite parallèle à l'axe des abscisses qu'on trace par un point de l'ensemble d'arrivée d'une fonction f définie sur |R *coupe la représentation graphique de f, la fonction f est surjective.*

En ce qui concerne le dernier exemple, l'élève est amené à déterminer l'intervalle de définition et l'intervalle d'arrivée d'une fonction représentée graphiquement dans un repère orthonormé pour qu'elle soit surjective ou non surjective.

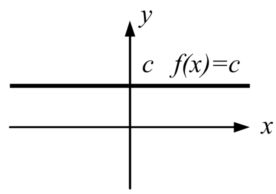
L'écriture symbolique et un certain nombre d'exemples accompagnent la définition de l'injectivité des fonctions. Le premier exemple présente la représentation en diagramme sagittal d'une fonction injective définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Dans le deuxième exemple on demande de chercher si une fonction affine définie sur |R est injective. L'utilisation de l'écriture symbolique de la bijectivité est mise en jeu. Cet exemple est suivi d'une remarque destinée à chercher si une fonction définie sur |R est injective à partir de sa représentation graphique dans un repère orthonormé :

REMARQUE N°5 : Si chaque droite parallèle à l'axe des abscisses qu'on trace par un point de l'ensemble image d'une fonction f définie sur |R *coupe la représentation graphique de f, la fonction f est injective*

Le manuel illustre cette remarque avec deux exemples.
La définition de la notion de fonction bijective est introduite et illustrée avec deux exemples dans lesquels on présente la représentation en diagramme sagittal d'une fonction bijective et d'une fonction non bijective, définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre.
Par ailleurs le manuel propose trois exemples pour illustrer la définition des fonctions constantes. Le but du premier exemple est de montrer la représentation en diagramme sagittal d'une fonction constante définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Les deux exemples suivants reposent sur l'utilisation de l'inexistence de variable dans l'expression de l'image des fonctions constantes. Le premier exemple de ce groupe invite l'élève à calculer la différence de a et b si la fonction f définie sur |R par $f(x)=(a-2)x^2+(b+1)x+5$ est constante. Deux solutions sont proposées. L'une demande d'utiliser l'inexistence de variable dans les fonctions constantes. Ainsi l'élève doit égaliser tous les coefficients de x à zéro. Et l'autre propose de trouver la différence demandée en sachant que l'image de chaque élément de l'ensemble de définition d'une fonction constante est identique. En envisageant qu'elles sont identiques l'élève est amené à calculer les trois valeurs f(0), f(1) et f(2). Ensuite il doit obtenir et résoudre un système linéaire d'équations. Ce dernier paraît donc comme un outil devant être disponible dans ce travail. En ce qui concerne le deuxième exemple, il nécessite de calculer le produit de a et b si la fonction f définie sur |R par $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+4}{3x^2+x+2}$ est constante.

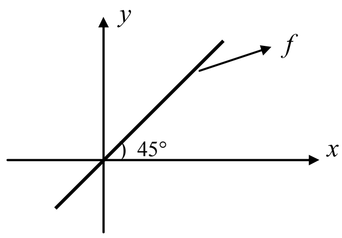
Deux solutions sont proposées. La première est la deuxième solution de l'exemple précédent. Quant à la deuxième elle s'appuie sur le fait que les coefficients de x du numérateur et du dénominateur soient proportionnels s'il s'agit d'une fonction rationnelle et constante. Le manuel énonce simplement ce point méthode et il n'y a aucun raisonnement qui l'accompagne. Cette partie qui concerne les fonctions constantes se termine par la remarque suivante :

REMARQUE N°6 : La représentation graphique de la fonction constante dans un repère orthonormé est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



Enfin nous trouvons la définition de la fonction identique, ensuite un exemple et une remarque qui suivent. L'exemple consiste à trouver la valeur *(b+c-a)* si la fonction *f* définie sur |R par $f(x)=(a+4)x^3+(b-3)x+c-1$ est la fonction identique. Deux solutions sont proposées. La première se base sur le fait que l'image de chaque élément de l'ensemble de définition de la fonction identique est égale à cet élément lui-même. L'élève est amené à calculer les valeurs *f(0)*, *f(1)* et *f(2)* et à obtenir un système linéaire d'équations. Ainsi les connaissances liées à la résolution de ce dernier que l'élève doit mettre en fonctionnement sont des outils devant être disponibles dans ce travail. La deuxième solution demande de faire fonctionner la formule algébrique de la fonction identique (*f(x)=x*). En faisant appel à l'égalité des polynômes l'élève doit égaliser le coefficient de x^3 le terme constant(*c-1*) à zéro et le coefficient de *x* à 1. L'égalité des polynomes paraît donc comme un outil devant être disponible dans ce travail. Au cours d'une remarque comme ci-dessous le manuel propose la représentation graphique de la fonction identique définie sur |R dans un repère orthonormé:

REMARQUE N°7 : Les points de la représentation graphique de la fonction identique se trouvent sur la droite y=x.



3.6 Fonctions de permutation

La définition des fonctions de permutation[2] qui figurent dans le programme de la classe de terminale est introduite et illustrée avec deux exemples dont l'un consiste à écrire une

[2] Soit $A\neq\phi$. Chaque fonction bijective définie sur A est appelée fonction de permutation.

fonction définie sur A par une liste de couples sous forme de matrice[3]. L'autre exemple demande de chercher si la fonction f définie sur A (un sous-ensemble fini de Z) par $f(x)=-x$ est une fonction de permutation.

A la suite de cette partie le manuel propose un certain nombre de formules qui concernent le calcul du nombre des fonctions définies de A vers B, des fonctions injectives ou bijectives définies de A vers B, des fonctions de permutation définies sur A, des fonctions de non-permutation définies sur A et des fonctions constantes définies de A vers B.

Nous ne trouvons aucun raisonnement ni démonstration qui accompagnent ces formules. Elles sont simplement énoncées. Il y a deux exemples proposés. Le premier exemple comporte six parties. A partir du diagramme sagittal, les deux premières parties demandent à l'élève de trouver le nombre des fonctions et des fonctions injectives définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre sans avoir recours aux formules. En ce qui concerne les parties suivantes, l'élève doit directement appliquer les formules. Les puissances et les factorielles sont les outils supposés disponibles dans ce travail. Dans le deuxième exemple on demande de calculer le nombre des fonctions de non-permutation définies sur A si le nombre des correspondances définies sur A est de 16^9. Il y a trois étapes. L'élève doit d'abord trouver le cardinal de l'ensemble A en utilisant le nombre des correspondances définies sur A. Ensuite calculer le nombre de toutes les fonctions et de toutes les fonctions de non-permutation définies sur A. Enfin il doit trouver la différence entre ces derniers. Les puissances et les factorielles auxquelles l'élève doit faire appel sont les outils devant être disponibles dans ce travail.

3.7 Définition de l'inverse d'une fonction

Avant de présenter la définition de l'inverse d'une fonction, il y a un exemple dans lequel on met en évidence qu'une fonction doit être bijective pour qu'elle soit inversible. Il s'agit des deux correspondances définies d'un ensemble fini et discret dans un autre par une liste de couples. L'élève est d'abord invité à chercher si ces correspondances sont des fonctions et ensuite si ces fonctions sont inversibles. Enfin il doit s'apercevoir que la fonction ayant une inverse est bijective. La remarque suivante contextualise ce qui est fait plus haut :

---

[3] $f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix}$

REMARQUE N°8 : La correspondance inverse d'une fonction f est aussi une fonction si et seulement si f est bijective.

La définition de l'inverse d'une fonction est suivie de sa représentation en diagramme sagittal, de son écriture symbolique, d'un certain nombre d'exemples et de remarques. Le manuel donne la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ grâce à la remarque suivante :

REMARQUE N°9 : En général lorsqu'on trouve l'inverse d'une fonction définie algébriquement, on écrit d'abord x à la place de y, y à la place de x ensuite on calcule y en fonction de x.

Il y a un exemple qui applique directement cette remarque. L'élève est amené à trouver l'inverse d'une fonction affine définie sur |R. A la suite de cet exemple, la recette $\mathbf{R_a}$ qui concerne les fonctions affines est mise en place comme une remarque et un certain nombre d'exemples sont proposés. Nous avons encadré cette remarque et les exemples qui l'illustrent comme suit :

REMARQUE N°10 : Si $a \neq 0, f(x) = ax + b,\ f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$.

i) $y=3x+5 \Rightarrow y^{-1}=\frac{x-5}{3}$ ii) $y=4x \Rightarrow y^{-1}=\frac{x}{4}$

iii) $y=-x+2 \Rightarrow y^{-1}=\frac{x-2}{-1}=-x+2$ iv) $y=\frac{x}{3} \Rightarrow y^{-1}=3x$

Le manuel propose un autre exemple destiné à trouver l'inverse d'une fonction bijective et rationnelle à partir de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Ensuite la recette $\mathbf{R_a}$ qui concerne les fonctions rationnelles est repris dans une remarque. Nous avons encadré cette remarque et les exemples qui l'illustrent :

REMARQUE N°11 : Si f :|R-$\{-\frac{d}{c}\} \rightarrow$ |R-$\{\frac{a}{c}\}$ *et* $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d},\ f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$

i) $y=\frac{2x-5}{x-4} \Rightarrow y^{-1}=\frac{4x-5}{x-2}$ ii) $y=\frac{x}{2x+3} \Rightarrow y^{-1}=\frac{-3x}{2x-1}$

iii) $y=\frac{3}{x-1}=\frac{0x+3}{x-1} \Rightarrow y^{-1}=\frac{x+3}{x}$ iv) $y=\frac{1}{x}=\frac{0x+1}{x+0} \Rightarrow y^{-1}=\frac{1}{x}$

v) $y=\frac{x+2}{5}=\frac{x+2}{0x+5} \Rightarrow y^{-1}=\frac{-5x+2}{-1}=5x-2$

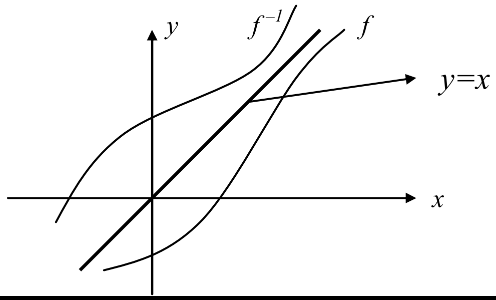
Par ailleurs le manuel propose les fonctions qui ne permettent pas d'appliquer $\mathbf{R_a}$ dans les exemples suivants. Le premier exemple demande de trouver l'inverse de la fonction bijective définie d'un sous-ensemble fini de |R dans un autre par $f(x)=(x-2)^5+1$. L'utilisation de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ est indispensable. Les racines cinquièmes s'avèrent un outil supposé disponible dans ce travail. Dans les deux exemples suivantes, il est aussi très difficile d'utiliser la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. L'un demande de calculer la valeur $f^{-1}(17)$ si la fonction f est définie de |R vers $(1,\infty)$ par $f(x)=2^{x-3}+1$. En faisant appel à la définition de l'inverse d'une fonction l'élève doit obtenir *f(x)=17*. Ainsi le travail se ramène à la résolution d'une équation exponentielle très particulière. En ce qui concerne l'autre exemple, on demande de trouver pour quelle valeur de *x* on a $f^{-1}(x)=2$ si la fonction *f* est bijective et définie par $f{:}A\to B$, $f(x)=3^x+2^{x-1}$. L'utilisation de la définition de l'inverse d'une fonction permet à l'élève d'obtenir *f(2)=x*. Pour trouver la bonne réponse il ne lui reste donc qu'à calculer l'image de 2. Dans le quatrième exemple on demande de trouver l'inverse de la fonction f définie de $[1,+\infty)$ vers $[-6,+\infty)$ par $f(x)=x^2-2x-5$. L'élève doit utiliser la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. La résolution d'équations du second degré et la factorisation auxquelles l'élève doit faire appel sont les outils supposés disponibles dans ce travail. Dans la dernière partie l'élève doit faire attention à son choix ($y_1=-1+\sqrt{x+6}$ *ou* $y_2=-1-\sqrt{x-6}$) par rapport à l'ensemble de définition de *f* (ou l'ensemble d'arrivée de f^{-1}). Le cinquième exemple consiste à trouver la valeur *a* si la fonction *f* bijective est définie sur |R par $f(x)=x^3+x^2+ax-3$ et la représentation graphique de la fonction f^{-1} passe par le point (4,1). En sachant que l'image de 4 par f^{-1} est 1 l'élève doit faire appel à la définition de l'inverse d'une fonction et obtenir *f(1)=4*. La résolution d'équations s'avère un outil supposé disponible dans ce travail. Dans l'exemple suivant, il faut déterminer l'inverse d'une fonction de permutation définie sous forme de matrice sur un sous-ensemble fini et discret. L'exemple qui concerne les fonctions affines précède une remarque au cours de laquelle la formule générale des fonctions affines est introduite :

REMARQUE N°12 : Si f(x)=ax+b, f est une fonction affine.

Le septième exemple se base sur l'application de cette remarque. L'élève doit calculer la valeur *f(4)* si la fonction *f* est affine et *f(2)=5*, $f^{-1}(2)=1$. En utilisant la définition de l'inverse d'une fonction l'élève doit obtenir f(1)=2, puis un système linéaire d'équations à partir de la formule générale des fonctions affines. La résolution du système d'équations dont l'élève doit se servir est un outil supposé disponible dans ce travail.

Avant de proposer le dernier exemple qui demande de déterminer graphiquement la valeur $f(0)+f^{-1}(5)+f^{-1}(0)$ à partir de la représentation graphique d'une fonction, le manuel met en place la treizième remarque destinée à mettre en évidence la relation entre la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction *f* et celle de son inverse :

REMARQUE N°13 : Les représentations graphiques des fonctions $y=f(x)$ et $y=f^{-1}(x)$ sont symétriques par rapport à la droite $y=x$.



3.8 Composition des fonctions

L'interprétation en diagramme sagittal et un exemple en trois parties accompagnent la définition de la composition des fonctions. Dans les deux premières parties de l'exemple l'élève est amené à trouver les deux types de composition (*fog* et *gof*) d'une fonction affine et une fonction du second degré. Quant à la dernière partie, on y demande de trouver l'image d'un nombre réel par gof. Une identité remarquable paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail de la deuxième partie.

Enfin le manuel termine le cours en citant simplement certaines propriétés de la composition des fonctions sans rien démontrer : non-commutativité, associativité, inverse de la composition des fonctions, relation entre la fonction identique et la composition, inverse de l'inverse d'une fonction, composée d'une fonction et son inverse, « décomposition ».

3.9 Exercices résolus (65 exercices)

Dans la collection Uğur les exercices résolus sont mis en place généralement à la fin du chapitre. Mais il y a aussi certains exercices qui figurent dans le cours. Comme ces exercices ne font pas référence directe aux notions qui les précédent, il nous a semblé préférable de les analyser dans cette partie. De plus nous trouvons deux tests proposant des exercices en forme de QCM à la fin du chapitre. Puisque les résolutions de ces exercices sont aussi proposées, nous les analyserons ici.

3.9.1 Thème I : Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles (4 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Utilisation directe de la définition ensembliste (1 exercice) : il s'agit de travailler sur des correspondances définies de manière ensembliste. L'élève doit repérer parmi ces correspondances celle qui n'est pas une fonction. L'utilisation de la définition ensembliste de la fonction (cf. la comptine $\mathbf{C_0}$) est donc mobilisée.

ii) Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée ou l'ensemble image d'une fonction (2 exercices) : à partir de l'ensemble image l'élève est amené à trouver la somme des éléments de l'ensemble de définition d'une fonction affine définie sur un sous-ensemble fini de Z dans un autre. La résolution d'équations à laquelle l'élève doit faire appel est un outil supposé disponible dans ce travail. Dans le deuxième exercice on demande aussi de déterminer l'ensemble de définition A d'une fonction affine et bijective définie de A vers [-8,2]. En sachant que pour $x\in A$, $-8\leq f(x)<2$ l'élève doit obtenir l'inéquation $-8\leq -5x-3<2$ et la résoudre. Ainsi les connaissances portant sur les intervalles et la résolution d'inéquations que l'élève doit faire fonctionner sont des outils devant être disponible dans ce travail.

iii) Calculer le nombre des correspondances définies de A vers B fonctions ou non-fonctions (1 exercice) : il s'agit de calculer le nombre des correspondances définies de A vers B qui ne sont pas de fonctions en utilisant card (A)=4 et card(B)=2. En mettant en fonctionnement les formules concernées, l'élève doit d'abord trouver le nombre des correspondances puis celui des fonctions définies de A vers B, et enfin leur différence.

3.9.2 Thème II : Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières (2 exercices)

Dans cette partie nous pouvons trouver deux exercices pour lesquels on demande de déterminer des valeurs à partir des formules algébriques de certaines fonctions particulières.

Dans un exercice on invite l'élève à déterminer la somme de *a* et *b* si la fonction *f* définie par $f(x)=(a-b)x+2a-3b$ est identique. En sachant que $f(x)=x$ si *f* est identique, l'élève doit égaliser le coefficient de *x* à 1 et le terme constant à zéro. L'égalité des polynômes paraît donc comme un outil supposé disponible dans ce travail. En ce qui concerne le deuxième exercice l'élève doit trouver la valeur $a+b+f(x)$ si la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{ax^2-x+3}{4x^2-2x+b}+\dfrac{3}{2}$ est constante. En utilisant le fait que les coefficients ($\frac{a}{4}=\frac{-1}{-2}=\frac{3}{b}$) sont proportionnels si *f* est constante, l'élève doit trouver *a* et *b* puis $f(x)$.

<u>3.9.3 Thème III : Recherche de l'inverse d'une fonction définie algébriquement (4 exercices)</u>

Nous pouvons classer les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Trouver directement l'inverse d'une fonction (1 exercice) : un exercice demande de trouver l'inverse de la fonction *f* si $xf(x)-2=\frac{2x+f(x)}{3}$. L'élève doit d'abord calculer la fonction *f* en fonction de *x* ensuite trouver son inverse en utilisant la recette $\mathbf{R_a}$. La résolution d'équations est un outil devant être disponible dans ce travail.

ii) Calcul de l'inverse d'une fonction pour la résolution d'une autre question (3 exercices) : dans un exercice il s'agit de trouver la valeur réelle *a* si la fonction f est définie par $f(x)=\frac{4ax}{3x-2}$, pour tout $x\in$|R-{2}et $f(x)=f^{-1}(x)$. L'élève doit trouver l'inverse de la fonction *f* à partir de $\mathbf{R_a}$, ensuite la valeur *a* en utilisant l'égalité des polynomes rationnels. Cette dernière paraît donc comme un outil devant être disponible dans ce travail. Dans le deuxième exercice on propose de trouver la valeur *x* si la fonction *f* bijective est définie de [2,+∞] vers [-3, +∞) par $f(x)=x^2-4x+1$ et $f^{-1}(x)+f^{-1}(-2)=6$. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction *f* en utilisant la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Ensuite calculer l'image de –2. La résolution d'équations et la racine carrée sont les outils devant être disponibles dans ce travail. Par ailleurs dans la résolution la représentation graphique de la fonction *f* dans un repère orthonormé est aussi présente. Mais elle ne fait pas référence directe à la résolution. En ce qui concerne le dernier exemple de ce groupe, on demande de trouver la valeur $f^{-1}(-1)+f(3)$ à partir d'une fonction f définie par morceaux (pour tout $x\geq 2$, $f(x)=x^2-4x+5$ et pour tout $x<2$, $f(x)=2x-3$). L'élève doit trouver l'image de 3 par f en utilisant $f(x)= x^2-4x+5$. Ensuite il doit obtenir $f(x)=-1$ en faisant appel à la définition de l'inverse d'une fonction. Dans la résolution l'élève est directement conduit à utiliser $f(x)=2x-3=-1$. Il n'y a aucun raisonnement. Par contre la représentation graphique de la fonction *f* dans un repère orthonormé est donnée, mais on ne sait pas à quoi elle sert.

<u>3.9.4 Thème IV : Composition des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles (22 exercices)</u>

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Composition des fonctions (6 exercices) : dans un exercice l'élève est amené à trouver la composée *fog* en utilisant la fonction *f* définie sur IR par morceaux (pour tout $x\geq 2$, $x-1$ et pour tout x<2, x^2-1) et la fonction *g* affine définie sur |R par $g(x)=x+1$. L'élève doit remplacer la fonction *g* dans la fonction de *f* en prenant en compte l'intervalle de définition. Une identité remarquable est un outil devant être disponible dans ce travail. Dans le deuxième exercice, on propose de trouver la somme de *a* et *b* si les fonctions f et g sont définies sur |R par *f(x)=ax+3, g(x)=2x+b* et *fog=I.* L'élève doit d'abord trouver la composée *fog.* En faisant appel à la formule de la fonction identique et à l'égalité des polynomes il doit déterminer la somme de *a* et *b*. Dans le troisième exercice il s'agit de la même tâche. Ainsi l'élève est amené à trouver la valeur *a* si les fonctions *f* et *g* sont définies sur |R par *f(x)=3x-4*, $g(x)=2ax+\frac{4}{3}$ et *fog=I.* En ce qui concerne le quatrième exercice, l'élève doit trouver ce que peut être la valeur *f(1)* si la fonction f définie sur |R est affine et *(fof)(x)=25x-6*. En sachant que la formule générale des fonctions affines est *f(x)=ax+b* l'élève doit composer la fonction f avec elle-même. Ensuite à l'aide de l'égalité des polynomes il doit déterminer les valeurs *a* et *b*. Cela lui permet d'obtenir deux fonctions et deux images différentes. Dans un autre exercice il s'agit de composer l'inverse d'une fonction définie par morceaux et une fonction affine. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction définie par morceaux à partir de $\mathbf{R_a}$ en prenant en compte aussi le changement des intervalles de définition, ensuite trouver la composée demandée. Les connaissances liées aux inéquations dont l'élève doit se servir sont des outils supposés disponibles dans ce travail. Le dernier exercice demande de déterminer l'ensemble image de la composée d'une fonction définie par morceaux d'un sous-ensemble fini de Z dans Z (si *x* est premier, *2x-1* et si *x* n'est pas premier, *2x*) et d'une fonction affine définie sur Z. Sans trouver la composition des fonctions l'élève est amené à calculer les images «fonction par fonction ». Les connaissances antérieures portant sur les nombres premiers sont des outils devant être disponibles dans ce travail.

ii) Décomposition des fonctions (9 exercices) : dans un exercice on propose de déterminer la fonction *g* en utilisant *f(x)=3x-1* et *fog(x)=6x+8.* L'élève doit d'abord trouver l'inverse de *f* en appliquant $\mathbf{R_a}$. Ensuite il doit utiliser la définition de la fonction identique et déterminer *g*. Dans un autre exercice l'élève est aussi amené à déterminer la fonction g en utilisant la fonction f définie par $f(x)=\frac{-x+4}{2}$ et la composée *(fog)(x)=3x-1*. Il s'agit de la même tâche que dans l'exercice précédent. Le troisième exercice demande de déterminer la fonction *f* en utilisant les fonctions suivantes : $g(x)=\frac{1}{x-2}$ et $(gof^{-1})^{-1}(x)=x+2$ (pour les valeurs où elles sont définies[4]). L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la composée et obtenir fog^{-1}. Ensuite en faisant appel à la définition de la fonction identique, il peut trouver la fonction *f*. Dans un autre exercice on demande de trouver la valeur *g(3)* si la fonction f est définie par $f(x)=-x+1$ et $(fog^{-1})^{-1}(x)=x^2-1$. L'élève doit aussi mettre en fonctionnement la propriété de l'inverse et la composition comme dans l'exemple précédent. Ensuite il doit « décomposer » gof^{-1} en utilisant *f* et calculer l'image de 3. Dans le cinquième exercice on demande à l'élève de trouver pour quelle valeur de *x* on a $g(x)=1$ si la fonction f est définie par $f(x)=2x-1$ et $(f+g)og^{-1})(x)=5x+9$. En mettant en fonctionnement la distributivité de la composition sur l'addition et la définition de la fonction identique l'élève doit obtenir la composée fog^{-1}. Sans faire fonctionner la décomposition il doit mettre $g^{-1}(x)$ à la place de *x* dans la fonction *f* et calculer g^{-1} en fonction de *x*. Enfin il doit trouver l'inverse de g^{-1} à partir de $\mathbf{R_a}$ et trouver l'antécédent de 1. La résolution d'équations est un outil supposé disponible dans ce travail. Dans deux exercices suivants on travaille sur la décomposition des fonctions de permutations définies sur un sous-ensemble fini et discret par une forme de matrices. Dans le huitième exercice l'élève doit déterminer la fonction g si la fonction f est définie par $f(x)=\frac{ax}{2x-1}$ et $(fof)(x)=x$, $(gof)(x)=2x$ (pour les valeurs où les fonctions sont définies). En sachant que la fonction f est égale à son inverse si $(fof)(x)=x$ l'élève doit trouver l'inverse de f à partir de $\mathbf{R_a}$ et ensuite trouver la valeur *a*. Enfin il lui reste à « décomposer » la fonction gof et trouver g. Dans le dernier exemple on demande de trouver la valeur *g(2)* en utilisant la fonction *f* définie par $f(x)=3-2x$ et $(f^{-1}og)(x)+3=xf(x)$.L'élève doit d'abord mettre *2* à la place de *x* dans l'expression $(f^{-1}og)(x)+3=xf(x)$ et calculer l'image de *2* par *f*, ensuite trouver l'inverse de *f* à partir de $\mathbf{R_a}$. En mettant *g(2)* dans la fonction f^{-1} il doit obtenir une équation et la résoudre.

iii) Décomposition implicite des fonctions (7 exercices) : dans un exercice on demande de calculer l'image de 9 si $f(2x+1)=x^2-3$. Sans utiliser la décomposition l'élève est conduit à trouver pour quelle valeur de *x* on a $2x+1=9$. Ensuite il doit mettre la valeur qu'il a trouvée dans la composée (implicite) $f(2x+1)=x^2-3$. La résolution d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Dans le deuxième exercice on demande de trouver la fonction *g* si $f(\frac{2}{x})=x+3$ et $(f^{-1}og)(x-2)=3x-2$, pour les valeurs où les fonctions sont définies. Il s'agit des deux composées (implicites). L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction

[4] Ce sont les termes du manuel.

implicite $\frac{2}{x}$ ensuite en remplaçant x par cette valeur dans la première composée $f(\frac{2}{x})=x+3$ il doit trouver la fonction *f*. La même procédure est valable pour la deuxième composée. Enfin il lui reste à « décomposer »

$\overset{-1}{f}og$ en utilisant *f*. Dans les deux exercices suivants l'élève est amené à calculer la valeur $f(\frac{1}{x})$ pour l'un en utilisant $f(1-\frac{1}{x})=3x+1$ et pour l'autre, $f(\frac{2x}{x-3})=2x+1$. Il doit d'abord faire la décomposée (implicite) comme dans les exercices précédents. Ensuite trouver la fonction *f* et l'image demandée. Le cinquième exercice consiste à trouver la différence (*b-a*) si $f(2x-3)=4x+1$ et $f(x)=ax+b$.L'élève doit trouver la fonction f en faisant la décomposée implicite. En utilisant l'égalité des polynomes il doit trouver les valeurs a et b ensuite leur différence. Dans un autre exercice on donne $f(x)=3x+a$, $g(2x-1)=3x-7$ et $(fog)(3)=1$ et on demande de trouver la valeur *a*. L'élève est d'abord invité à calculer l'image de *3* par *g* en déterminant pour quelle valeur de *x* on a $2x-1=3$. Ensuite il doit obtenir une équation en remplaçant l'image de *3* dans la fonction *f* et résoudre pour trouver la valeur *a*. Le septième exercice propose aussi de trouver la valeur *a* en donnant $f(2x-1)=3x+1$ et $\overset{-1}{f}(3a-2)=7$. En faisant appel à la définition de l'inverse d'une fonction l'élève doit d'abord obtenir $f(7)=3a-2$. Ensuite à partir de la composée implicite il doit calculer l'image de *7* et trouver pour quelle valeur de *x* on a $2x-1=7$. La résolution d'équations dont l'élève doit se servir est un outil supposé disponible dans ce travail.

3.9.5 Thème V : Image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique par une fonction (22 exercices)

Voici les catégories des exercices de cette partie selon la tâche prescrite :

i) Calculer l'image d'un nombre réel par des fonctions définies indirectement (6 exercices) : dans un exercice on demande de trouver la différence $f(10)-f(1)$ si la fonction f est définie sur |R et $f(x+1)=f(x)+3x$. L'élève doit d'abord obtenir $f(x+1)-f(x)=3x$, ensuite donner à la place de x les valeurs numériques entières de 1 à 9. Enfin par addition il doit obtenir la différence demandée. Dans le deuxième exercice l'élève doit trouver la valeur $f(21)$ en utilisant $f(1)=3$ et $f(x)=2+f(x-1)$. La procédure à suivre n'est pas très différente de l'exercice précédent. L'élève doit donner à la place de x les valeurs numériques variées de 2 à 21, ensuite trouver la différence de l'image de 21 et celle de 1 par addition. Enfin en utilisant l'image de 1 il doit déterminer l'image de 21. Dans un autre exercice on demande de trouver la valeur $f(25)$ en utilisant *f(x+1)=xf(x)* et *f(1)=2*. L'élève doit donner à la place de x les valeurs numériques entières de 1 à 24 dans l'expression *f(x+1)=xf(x)*. Après les trois premières expérimentations numériques il est amené à reconnaître la relation entre l'antécédent et l'image. Les connaissances antérieures liées à la notion de factorielle sont des outils supposés disponibles dans ce travail. Dans le quatrième exercice il s'agit de calculer l'image de 2 en utilisant *f(x+1)-f(x)=x+2* et *f(4)=2*. En donnant à la place de x les valeurs 3 et 2 l'élève doit obtenir un système linéaire d'équations, ensuite trouver la différence f(4)-f(2) par addition et l'image demandée. En ce qui concerne le cinquième exercice, il s'agit de trouver la différence *f(5)-f(2)* si $f(x+2)-f(x+1)=x^2+1$, pour tout x naturel. L'élève doit d'abord donner à la place de x les valeurs entières 1, 2 et 3 et obtenir la différence demandée par addition. Le dernier exercice qui demande de calculer l'image de 2 par *f* si $f(n)=\frac{n}{3}f(n+1)$ et $f(5)=\frac{9}{16}$ est une question du concours (cf. analyse des thèmes du concours, (Q13/1978)).

ii) Calculer l'image d'une expression algébrique en fonction de f(x) (5 exercices) : dans un exercice on demande de calculer *f(3x+1)* en fonction de *f(x)* si la fonction f est définie par $f(x)=2x-5$. L'élève doit d'abord calculer l'image de *3x+1* par *f*. Ensuite il doit calculer x en fonction de *f(x)* et le mettre en x dans l'image de *3x+1*. La résolution d'équations est un outil supposé disponible dans ce travail. Dans le deuxième exercice on propose aussi de calculer $f(\frac{x}{x-1})$ en fonction de f(x) si la fonction f est définie par $f(x)=\frac{x+1}{2x-3}$. Dans un autre exercice l'élève est amené à calculer l'image de *2x+1* par f en fonction de *f(x)* si la fonction f est définie par $f(x)=3^{5x-1}$. Le quatrième exemple fait trouver la valeur *f(3x+2)* en fonction de *f(x)* si la fonction f est définie par $f(2x-1)=3x+1$. Dans ces trois derniers exemples la procédure que l'élève doit suivre est tout à fait identique à celle du premier exercice. Pour les exercices qui concernent les fonctions exponentielles la résolution d'équations exponentielles très particulières à laquelle l'élève doit faire appel est un outil supposé disponible dans ce travail. En ce qui concerne le dernier exemple, il est nécessaire de calculer $f(\frac{x}{2})$ en fonction de *f(x)* si $f(2x)=\frac{2x}{2x+1}$. En faisant appel à la « décomposition », l'élève doit d'abord déterminer la fonction *f*. Ensuite il doit refaire ce qu'il a fait dans les exercices précédents.

iii) Calculer l'image d'un nombre réel par une fonction définie algébriquement (11 exercices) : dans un exercice il s'agit de trouver la somme des images de trois nombres réels par une fonction définie par morceaux. Le deuxième exercice qui est une des questions du concours demande de trouver *f(1)* parmi plusieurs choix si *f(ab)=f(a)+f(b)* (cf. analyse des thèmes du concours (Q20/1985)). Dans un autre exercice on propose de calculer la valeur $f(\sqrt[3]{2}-1)$ si la fonction f est définie sur |R par $f(x)=x^3+3x^2+3x+4$. En faisant appel à l'identité remarquable $(a+b)^3$ l'élève est amené à obtenir $f(x)=(x+1)^3+3$ et à trouver l'image demandée. Une identité remarquable et les connaissances antérieurs liées aux racines (ou puissances) sont donc des outils supposés disponibles dans ce travail. Dans le quatrième exercice on demande de trouver la somme des images des nombres 3 et 7 par la fonction $2^{f(x)}=x+1$. En donnant à la place de x les valeurs 3 et 7 dans la fonction l'élève doit obtenir des équations exponentielles très particulières et les résoudre. Ainsi la résolution d'équations exponentielles très particulières paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. En ce qui concerne le cinquième exercice, il consiste à calculer $f^{-1}(9)$ si la fonction f est affine avec $f^{-1}(5)=1$ et $f(-1)=1$. L'utilisation de la formule générale des fonctions affines est indispensable pour la résolution. L'élève doit d'abord utiliser la définition de l'inverse d'une fonction et trouver *f(1)=5*. En sachant que si *f* est une fonction affine, *f(x)=ax+b*, il doit déterminer *a* et *b* à l'aide des images connues. La résolution du système linéaire d'équations est un outil supposé disponible dans ce travail.

Dans un autre exercice on donne $f(x)=2^{x-1}$, $f(x+2)+kf(x+1)=f(x)$ et on demande de trouver la valeur *k*. En calculant les images des expressions algébriques l'élève doit obtenir une équation exponentielle très particulière et la résoudre. Dans les deux exercices suivants il s'agit de calculer l'image des couples par les fonctions définies de |Rx|R vers |R à l'aide des notions de maximum et minimum. Ainsi l'un des exercices demande de trouver la somme *f(1,-3)+ g(-3,2)* en utilisant $f(x,y)=\max(x,x-y)$ et $g(x,y)=\min(x^2,y+1)$. Et l'autre consiste à calculer la valeur *f(f(1,2),g(2,2))* à partir des fonctions *f* et *g* définies par $f(x,y)=\min(x+y^2,2y-x)$, $g(x,y)=\max(-2x,-3y)$. Les notions de maximum et minimum que l'élève doit mettre en fonctionnement sont les outils devant être disponibles pour ce travail. Dans le neuvième exercice, il s'agit de déterminer une fonction f définie par morceaux (*si x<2, f(x)=1-2ax et si x>2,f(x)= ax+b*) à l'aide des deux images connues (*f(1)=5 et f(3)=1*) et de trouver la somme *a+b*. La résolution d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. En ce qui concerne le dixième exercice, on donne la fonction *f* définie par morceaux sur |R de la manière suivante : si $x\geq 0$, *f(x)=3-x,* si *x<0*, *f(x)=4+x* et on demande de trouver pour combien de valeurs entières de x on a $f(x)>0$. En prenant en compte les intervalles de définition l'élève doit trouver, par expérimentations numériques, pour quelles valeurs de x on a $f(x)>0$. Les connaissances antérieures portant sur les inéquations sont des outils supposés disponibles dans ce travail.

Dans le dernier exemple on demande de trouver $2g-3f$ en utilisant les fonctions f et g qui sont définies par une liste de couples ($f=\{(1,2),(2,1),(3,0)\}$ et $g=\{(1,-1),(2,0),(3,-2)\}$). Il s'agit de l'application directe des propriétés des opérations sur les fonctions données dans le cours.

3.9.6 Thème VI :Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (11 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Lire et interpréter la représentation graphique des fonctions (4 exercices) : dans trois exercices l'élève est amené à déterminer graphiquement certaines images et à les utiliser dans des opérations proposées. Ainsi le premier d'entre eux demande de déterminer $(fof)(3)$ et $(fof)(4)+(fof)(-2)$ à partir de la représentation graphique de la fonction f définie sur IR. Dans le deuxième exercice il s'agit de trouver $(fof)(0)$ en utilisant les représentations graphiques des fonctions gof et g dans un même repère orthonormé. En ce qui concerne le dernier exemple l'élève doit trouver la valeur $\frac{3f(4)+f(-3)}{1+f^{-1}(2)}$ à partir de la représentation graphique de l'inverse de la fonction f définie par morceaux. Dans un autre exercice en utilisant la représentation graphique de la fonction f définie d'un intervalle dans un autre (de A vers B, sous-ensembles de |R) l'élève est conduit à trouver combien de nombres entiers il y a dans l'ensemble B-A. Il doit d'abord déterminer les intervalles A et B, ensuite leur différence. Les connaissances antérieures correspondant aux ensembles et aux intervalles sont des outils disposés disponibles dans ce travail.

ii) Recours indispensable à la représentation graphique des fonctions pour la résolution d'une autre question (5 exercices) : dans un exercice en faisant appel à la représentation graphique de la fonction f bijective et définie sur |R on demande de trouver la valeur a si $f^{-1}(x-2)f(x)=a+1-f^{-1}(x)$. L'élève doit d'abord déterminer $f(0)=4$ et $f(4)=2$ ensuite obtenir $f^{-1}(4)=0$ et $f^{-1}(2)=4$ en utilisant la définition de l'inverse d'une fonction. La résolution d'équations apparaît comme un outil devant être disponible dans ce travail. Le deuxième exercice consiste à trouver pour quelles valeurs entières de x on a $2\leq f(\frac{x}{2})\leq 4$ et à exprimer leur somme, à partir de la représentation graphique de la fonction f définie sur |R. L'élève est amené à s'apercevoir que $2 \leq f(x) \leq 4$ pour $0 \leq x \leq 2$ ensuite qu'il est possible d'avoir $2 \leq f(\frac{x}{2}) \leq 4$ pour les nombres entiers 1,2,3 et 4. Dans un autre exercice à l'aide de la représentation graphique de la fonction f l'élève doit calculer le nombre des sous-ensembles de l'ensemble A qui contient les nombres réels pour lesquels la fonction g définie par $g(x)=xf(x).\overset{-1}{f}(x)$ est nulle. En prenant en compte qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs au moins est nul, l'élève doit obtenir $x=0$ *ou* $f(x)=0$ *ou* $f^{-1}(x)=0$ ensuite déterminer graphiquement les éléments de A et calculer le nombre des sous-ensembles de A. Dans le quatrième exercice demande de trouver, à partir de la représentation graphique de f , pour combien de nombres entiers x on a $xf(x)>0$. En ce qui concerne le dernier exercice de cette partie l'élève est amené à déterminer $(go\overset{-1}{f})(-4)+(\overset{-1}{f}og)(0)$ à partir des représentations graphiques des fonctions f et g. Pour la résolution l'élève doit d'abord trouver l'équation de la droite qui désigne la représentation graphique de la fonction f affine ensuite son inverse en utilisant $\mathbf{R_a}$.

iii) Travailler sur les fonctions définies géométriquement (2 exercices) : dans un exercice on demande de trouver pour quelle valeur de x on a $fog(x)=72$ si la fonction f est définie sur |R par $f(x)=3x$ et la fonction g définie par *g(x)= « Aire du triangle rectangle de AOB »*. L'élève doit d'abord déterminer la fonction g en calculant l'aire du triangle rectangle dont l'hypoténuse se trouve sur la représentation graphique de f ensuite la composée *fog* et la valeur x. L'aire du triangle rectangle à laquelle l'élève doit faire appel est un outil devant être disponible dans ce travail. Dans le deuxième exercice il s'agit aussi de trouver une fonction définie par l'aire d'un triangle dans un carré. En mettant en fonctionnement les connaissances antérieures liées à l'aire du triangle et au carré l'élève doit déterminer la fonction demandée.

3.10 Synthèse

Dans le manuel Uğur la notion de fonction est présentée avec celle de correspondance. Les auteurs du manuel introduisent les fonctions de la manière ensembliste. Ainsi la seule définition des fonctions qui existe est la définition ensembliste. Au cours d'une remarque la comptine $\mathbf{C_0}$ est introduite. Dans le cours nous trouvons aussi des exercices résolus qui ne correspondent pas directement aux notions qui les précédent comme dans le manuel Güvender.

Par ailleurs ce manuel met en place un certain nombre de remarques (treize) au cours desquelles on introduit des connaissances indispensables pour les exercices qui suivent.

Nous constatons que la plupart des notions qui apparaissent dans le programme de seconde sont abordées. Mais nous rencontrons cependant certaines notions qui relèvent du programme des classes suivantes. Par exemple les quatre opérations sur les fonctions, les fonctions de permutation et les fonctions définies par morceaux.

En ce qui concerne les méthodes pour trouver l'inverse des fonctions, la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ est introduite comme une remarque. Et elle n'est mobilisée que pour deux fonctions pour lesquelles on peut utiliser aussi $\mathbf{R_a}$. A part pour les fonctions pour lesquelles l'utilisation de $\mathbf{M_{xfy}}$ est indispensable (par exemple fonctions exponentielles), c'est toujours $\mathbf{R_a}$ qui est utilisé.

Dans la collection d'Uğur nous pouvons aussi constater que figurent la plupart des questions du concours ou des questions très ressemblantes comme dans la collection de Güvender. Dans le chapitre l'élève peut rencontrer plusieurs fois un même type d'exercices. Comme les exercices encadrés ci-dessous nous semblent assez représentatifs, nous les présentons :

Si $f(x)=2x-5$, quelle est la valeur $f(3x+1)$ en fonction de $f(x)$?(exercice résolu)

Si $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-3}$, quelle est la valeur $f(\dfrac{x}{x-1})$ en fonction de $f(x)$?(exercice résolu)

Si $f(2x)=\dfrac{2x}{2x+1}$, quelle est la valeur $f(\dfrac{x}{2})$ en fonction de $f(x)$? (exercice résolu)

Si $f(x)=3^{5x-1}$, quelle est la valeur $f(2x+1)$ en fonction de $f(x)$?(exercice résolu)

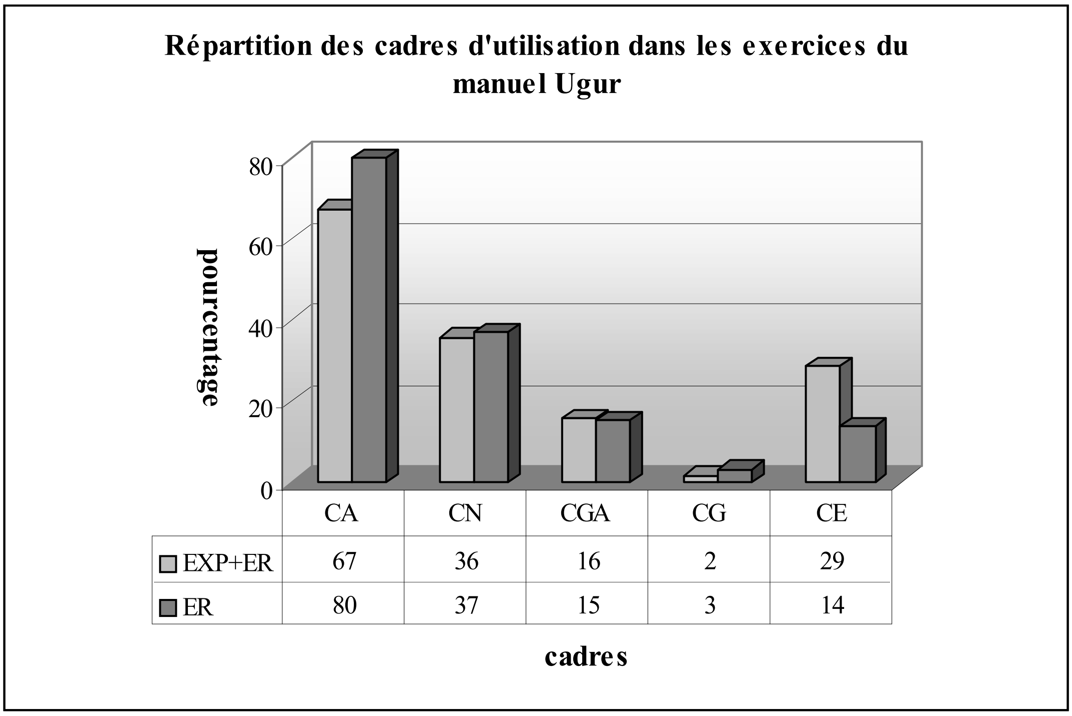
Si $f(x)=2^{x-1}$, quelle est la valeur $f(3x+2)$ en fonction de $f(x)$? (exercice résolu)

Si $f(x)=3^{2x-1}$, quelle est la valeur $f(3x)$ en fonction de $f(x)$? (Test 3, exercice non résolu)

Si $f(x)=5^{2x-1}$, quelle est la valeur $f(3x+1)$ en fonction de $f(x)$? (Test 6, exercice non résolu)

Si $f(x)=e^{x}-e^{-x}$, quelle est la valeur $f(3x)$ en fonction de $f(x)$? (Test 6, exercice non résolu)

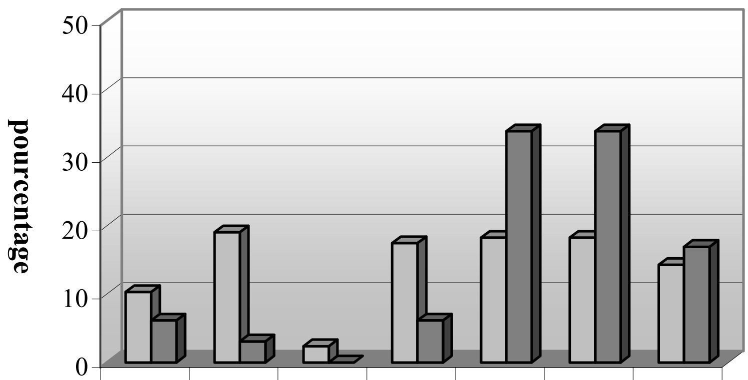
Par ailleurs le tableau ci-dessous montre que la grande majorité des exercices résolus utilisent le cadre algébrique. Ce dernier est suivi par le cadre numérique avec un taux de 37%. Le cadre analytique et le cadre de la théorie élémentaire des ensembles sont les cadres peu fréquents des exercices résolus du manuel Uğur. Il y a seulement 3% des exercices au cours desquels l'élève doit travailler dans le cadre géométrique. D'un point de vue des cadres nous pouvons dire que le manuel Uğur est algébriquement très riche et géométriquement pauvre.



CA :Cadre Algébrique, CN :Cadre Numérique, CGA :Cadre Géométrie Analytique, CG :Cadre Géométrique, CE :Cadre de la Théorie Elémentaire des Ensembles, EXP :Exemple(effectif :61exemples), ER :Exercices résolus(effectif :65 exercices)

Nous constatons que tous les thèmes qui existent dans les questions du concours sur la notion de fonction figurent dans le manuel. Selon le tableau suivant, les thèmes V et VI sont les thèmes plus fréquents des exercices résolus comme dans le manuel Güvender. Le thème III est totalement absent des exercices résolus. Bien que le manuel propose beaucoup d'exercices qui concernent les propriétés des fonctions et fonctions particulières dans le cours, un très petit nombre d'exercices résolus sont rattachés à ce thème II. C'est peut-être dû au fait que le thème II n'est pas très important pour le concours mais important pour le lycée et que les auteurs du manuel considèrent que des questions sur ce thème pourraient être proposées dans le concours suivant. Par ailleurs dans 17% des exercices il s'agit de travailler sur la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (thème VII). Il y a beaucoup d'exemples qui font référence directe à l'inverse des fonctions dans le cours mais la plupart des exercices des autres thèmes la font intervenir seulement indirectement aussi, le thème IV est l'un des thèmes plus marginaux des exercices résolus du manuel Uğur.

Répartition des exercices du manuel Ugur par les thèmes

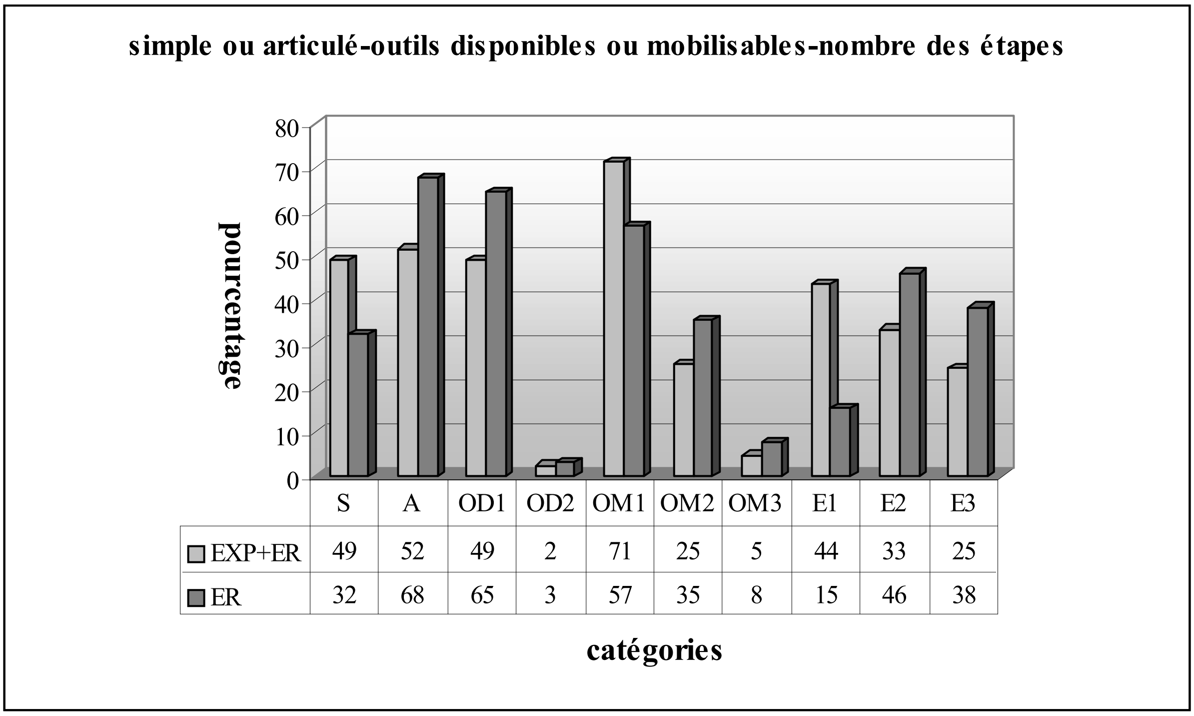


	Thème I	Thème II	Thème III	Thème IV	Thème V	Thème VI	Thème VII
EXP+ER	10	19	2	17	18	18	14
ER	6	3	0	6	34	34	17

thèmes

Thème I :Définition ensembliste de la notion de fonction…Thème II : Propriétés particulières des fonctions…Thème III : Quatre opérations sur les fonctions, Thème IV :Recherche de l'inverse d'une fonction, Thème V :Composition des fonctions, Thème VI :Image d'un nombre réel…Thème VII :Représentation graphique des fonctions…

Comme nous l'avons déjà dit, dans le manuel Uğur nous pouvons trouver la plupart des questions du concours ou des questions ressemblantes soit dans le cours soit dans les exercices résolus. D'après le tableau suivant nous constatons que la plupart des exercices résolus portent sur plusieurs connaissances antérieures des élèves. Tandis que dans 32% des exercices il s'agit d'applications directes du cours. Plus de la moitié demandent à l'élève de faire appel à un seul outil disponible contre un très petit nombre deux outils disponibles. Dans plus de la moitié des exercices l'élève doit faire appel à un seul outil mobilisable pour le travail. Tandis que 43% des exercices invitent l'élève à mobiliser plusieurs connaissances qui font référence directe à la notion de fonction ou ses composantes (OM2+OM3). Par ailleurs, dans la grande majorité des exercices l'élève peut arriver à la bonne réponse en plusieurs étapes (E2+E3:84%).



	S	A	OD1	OD2	OM1	OM2	OM3	E1	E2	E3
EXP+ER	49	52	49	2	71	25	5	44	33	25
ER	32	68	65	3	57	35	8	15	46	38

S :Simple, A :Articulé, OD1 :Outil disponible 1, OD2 :Outil disponible 2, OM1 :Outil mobilisable 1, OM2 :Outil mobilisable 2,OM3 :Outil mobilisable 3,E1 :Etape 1, E2 :Etape 2, E3 :Etape 3

Annexe I-5 : analyse du manuel de préparation au concours Zafer

5.1 Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant

Le manuel Zafer présente les fonctions avec les correspondances entre ensembles dans un même chapitre. La seule définition qui existe pour l'introduction des fonctions est la définition ensembliste. Mais nous constatons cependant qu'on parle très brièvement du sens de la notion de fonction en terme de variable en citant qu'à partir de la notation $y=f(x)$, y est appelé variable dépédante et x variable indépendante. La présentation des ensembles correspondant (ensemble de définition, ensemble d'arrivée et ensemble image) est suivie de la comptine $\mathbf{C_0}$ qui s'avère une remarque et d'une quinzaine d'exemples dont la plupart ne font pas référence directe à la définition ensembliste des fonctions.

Il y a donc cinq exemples qui font travailler sur la définition. Le premier exemple comprend quatre parties. Dans chaque partie l'élève doit chercher si une correspondance définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre est une fonction. Il s'agit donc de l'utilisation directe de la définition ensembliste (cf. la comptine $\mathbf{C_0}$). La représentation en diagramme sagittal est aussi utilisée. Dans le deuxième exemple il s'agit de travailler sur une fonction f définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre par un diagramme sagittal. L'élève est amené à déterminer les ensembles correspondant à la fonction f et à écrire f sous forme de liste de couples. L'exemple suivant demande de chercher si une correspondance f affine définie sur |R est une fonction. L'élève doit reconnaître que pour tout x réel on a $f \in$|R. Dans le quatrième exemple on demande aussi de chercher si la correspondance f définie sur |R par $|y|=x$ est une fonction. A partir d'une expérimentation numérique l'élève doit montrer qu'il y a deux images de 1. Le dernier exemple demande d'écrire une fonction f rationnelle définie de A (A est le sous-ensemble fini de Z) vers |R sous forme de liste de couples et de trouver l'ensemble image de f. L'élève doit calculer toutes les images pour trouver l'ensemble image et écrire la fonction sous forme de liste de couples.

5.2 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé

A la suite de la définition de la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé quatre exemples et deux remarques sont proposés. Le premier exemple fait représenter une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans |R. L'élève doit d'abord calculer les images et ensuite placer les points des coordonnées dans un repère orthonormé. L'écriture sous forme de liste de couples est aussi utilisée. Dans les deux exemples suivants il s'agit de lire et interpréter la représentation d'une fonction définie sur |R.

Ainsi l'un amène l'élève à repérer quelle est fausse parmi des propositions données à partir de la représentation graphique de la fonction. L'élève doit déterminer graphiquement les images dont il s'agit et ensuite vérifier si les propositions sont vraies (par exemple f(-5)+f(-2)=3). Et l'autre demande de trouver graphiquement pour quelles valeurs de x on a x.f(x)>0 et d'exprimer leur somme. Après ces exemples il y a deux remarques qui sont consécutivement mises en place. Dans la première on indique que les éléments de l'ensemble de définition sont repères sur l'axe des abscisses et ceux de l'ensemble d'arrivée sur l'axe des ordonnées. Quant à la deuxième remarque, elle consiste à mettre en évidence une méthode dont l'élève se servira de chercher si la représentation graphique d'une correspondance dans un repère orthonormé est celle d'une fonction (cf. analyse du manuel Uğur, remarque n°3). Un exemple dans lequel il s'agit de travailler sur la représentation graphique de cinq correspondances illustre la deuxième remarque. En traçant des parallèles à l'axe des ordonnées l'élève doit chercher si ces parallèles coupent les représentations graphiques en un seul point unique.

5.3 Quatre opérations sur les fonctions $(\mp,\times,\div)$

Il n'y a aucune explication ni démonstration. Le manuel cite simplement les quatre opérations sur les fonctions et la multiplication d'une fonction par un nombre réel de manière symbolique. Ensuite trois exemples comprenant plusieurs parties sont proposés. Dans le premier exemple il est nécessaire de déterminer les fonctions $f+g$, $2f-g$, $f.g$, $\frac{g}{f}$ en utilisant les fonctions f et g définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par une liste de couples. Le deuxième exemple fait trouver la fonction (f.g+3.f)(x) à partir des fonctions f et g affines définies sur |R. Dans le dernier exemple l'élève est amené à trouver quelle peut être la valeur f(3) en faisant fonctionner les fonctions $(\frac{f}{g})(x)=x^2+2x+5$ et $(f.g)(x)=x^4-2x^3+x^2-12x+20$. L'élève doit d'abord calculer $(\frac{f}{g})(3)$ et $(f.g)(3)$, ensuite les multiplier pour obtenir $[f(3)]^2=20^2$. Cela lui permet de trouver les deux valeurs possibles de l'image de 3 par f.

5.4 Egalité des fonctions

La définition des fonctions égales est suivie d'un seul exemple dans lequel on demande de chercher si une fonction du second degré et une fonction affine définies d'un sous-ensemble fini de Z dans un autre sont égales.

5.5 Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières

Il y a deux exemples qui illustrent la définition des fonctions non surjectives. Dans le premier exemple on demande de chercher si une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z est non-surjective. La représentation en diagramme sagittal est aussi mise en fonctionnement. En ce qui concerne le deuxième exemple, il faut chercher si une fonction du second degré définie sur |R est non-surjective.

La définition des fonctions surjectives est suivie de quatre exemples et d'une remarque. Dans les deux premiers exemples il s'agit de chercher la surjectivité d'une fonction affine définie sur Z et d'une fonction affine définie sur |N. A la suite de ces exemples, la remarque grâce à laquelle on présente la méthode dont l'élève se servira pour chercher si la représentation graphique d'une fonction est celle d'une fonction surjective est mise en place (cf. analyse du manuel Uğur, remarque n°4). Dans le troisième exemple à partir de sa représentation graphique on demande de chercher les intervalles pour lesquels la fonction f est non-surjective et surjective. Le dernier exemple fait utiliser la remarque suivante : en utilisant sa représentation graphique l'élève doit chercher si une fonction f définie sur |R est surjective.

En ce qui concerne la définition des fonctions injectives, l'écriture symbolique, quatre exemples et une remarque accompagnent la définition. Dans le premier exemple il s'agit de travailler sur les trois fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre par les diagrammes sagittaux. L'élève doit chercher quel est le type de propriétés de ces fonctions. L'exemple suivant fait chercher le type de propriété d'une fonction f affine définie sur |R. Après cet exemple la remarque dans laquelle on introduit la méthode qui consiste à chercher graphiquement l'injectivité d'une fonction (cf. idem, remarque n°5). Dans le dernier exemple qui fait appliquer cette remarque en traçant les parallèles à l'axe des abscisses dans la représentation graphique de trois fonctions l'élève est amené à chercher si ces parallèles couplent les représentations graphiques en un seul point unique.

Après avoir défini les fonctions bijectives, le manuel propose deux exemples dont l'un demande de chercher la bijectivité de trois fonctions définies d'un sou-ensemble fini et discret dans un autre par les diagrammes sagittaux et l'autre fait chercher si une fonction f du second degré définie de |R vers $[2,+\infty)$ est bijective.

Quant aux exemples qui illustrent la définition des fonctions constantes, ils sont au nombre de six. Le premier exemple présente la représentation en diagramme sagittal d'une fonction constante définie d'un sou-ensemble fini et discret dans un autre. Dans les trois exemples suivants on demande de trouver $(a-b+f(x))$ si la fonction f définie sur |R par

$f(x)=(a-2)x^{2}+(b+3)x+7$ est constante, de trouver la valeur a si la fonction f définie de |R-{2} vers |R par $f(x)=\frac{ax+3}{x-2}$ est constante, de trouver $(a+b+f(x))$ si la fonction f définie sur |R par $f(x)=\frac{ax^{2}+bx+3}{3x^{2}-2x+1}$ est constante. Dans le premier exemple de ce groupe deux solutions sont proposées. L'une fondée sur l'inexistence de variable dans l'expression de l'image des fonctions constantes : ainsi l'élève doit égaliser a-2 et b+3 à zéro pour trouver a, b et f(x). Et l'autre sur le fait que les images de chaque élément de l'ensemble de définition des fonctions sont identiques. L'élève est amené à mettre en fonctionnement f(0)=f(1) pour trouver a et b. Dans le deuxième exemple on propose aussi les mêmes solutions. Dans la première solution l'élève doit reconnaître que si la fonction f rationnelle est constante on doit donc simplifier les variables x qui se trouvent dans le numérateur et le dénominateur. En ce qui concerne le dernier exemple de ce groupe, il s'agit aussi de deux solutions. La deuxième solution de l'exemple précédent est toujours proposée. Dans l'autre solution sans commentaire on énonce simplement que si la fonction f est constante, les coefficients du dénominateur et du numérateur sont proportionnels. Il ne reste à l'élève qu'à appliquer ce point de méthode pour trouver a et b. La remarque qui indique la représentation graphique des fonctions constantes est une droite parallèle à l'axe des abscisses est présentée à la suite de ces exemples. Enfin il y a deux exemples dans lesquels la représentation graphique d'une fonction f constante définie de |R vers {2} et d'une fonction f constante définie de |R vers {-1}est mise en place.

La représentation en diagramme sagittal, la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction identique et d'un exemple sont suivis de sa définition. Dans l'exemple l'élève doit trouver (a-b+c) si la fonction f définie sur |R par $f(x)=(a-3)^{2}+(b+2)x+c-4$ est une fonction identique. Deux solutions sont proposées. L'une se fonde sur l'utilisation de la formule générale de la fonction identique et l'autre sur le fait que l'image de chaque élément de l'ensemble de définition est égale à cet élément lui-même.

Par ailleurs le manuel présente aussi la définition des fonctions de permutation et des fonctions paires ou impaires. Chacune de ces définitions est illustrée par un exemple. Dans l'exemple des fonctions de permutation il s'agit de présenter deux fonctions de permutation définies sur un sous-ensemble fini et discret. En ce qui concerne l'exemple des fonctions paires ou impaires, il consiste à chercher si une fonction du cinquième degré et deux fonctions du second degré sont paires ou impaires.

5.6 Définition de l'inverse des fonctions

Avant la définition il y a deux exemples grâce auxquels on met en évidence que si une fonction est bijective, elle est inversible. L'élève est amené à trouver l'inverse de deux fonctions définies d'un sou-ensemble fini de Z dans Z par une liste de couples et à reconnaître si ces fonctions sont bijectives et si leur inverse est une fonction. Le manuel propose ensuite le bilan de ces exemples comme une remarque (cf. idem, remarque n°8).

La définition de l'inverse des fonctions à partir des éléments est suivie d'une remarque dans laquelle on introduit la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ (cf. idem, remarque n°9) et d'une dizaine d'exemples. Le premier exemple fait trouver l'inverse de la fonction définie sur |R par $f(x)=ax+b$, $(a\in IR, b\in IR, a\neq 0)$ en utilisant la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Dans cet exemple le manuel propose aussi de trouver l'inverse de cinq fonctions affines à partir de la recette $\mathbf{R_a}$.

* $y=2x+5 \Rightarrow y^{-1}=\frac{x-5}{2}=\frac{1}{2}(x-5)$
* $y=-3x+1 \Rightarrow y^{-1}=\frac{x-1}{-3}=\frac{1}{3}(-x+1)$
* $y=x+2 \Rightarrow y^{-1}=x-2$
* $y=-x+3 \Rightarrow y^{-1}=\frac{x-3}{-1}=-x+3$
* $y=5x \Rightarrow y^{-1}=\frac{x}{5}$

Dans le deuxième exemple nous constatons aussi l'articulation entre la recette $\mathbf{R_a}$ et la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. On demande d'abord de trouver l'inverse de la fonction f rationnelle définie de |R-$\{-\frac{d}{c}\}$ vers |R-$\{\frac{a}{b}\}$ par $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ à partir de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$. Ensuite comme dans l'exemple précédent il y a cinq exemples dans lesquels la recette $\mathbf{R_a}$ est utilisée pour les fonctions rationnelles.

* $y=\frac{2x-3}{x-5} \Rightarrow y^{-1}=\frac{5x-3}{x-2}$
* $y=\frac{3x}{2x+1} \Rightarrow y^{-1}=\frac{-x}{2x-3}$
* $y=\frac{4}{2x-3}=\frac{0x+4}{2x-3} \Rightarrow y^{-1}=\frac{3x+4}{2x-0}=\frac{3x+4}{2x}$
* $y=\frac{2x+1}{3}=\frac{2x+1}{0x+3} \Rightarrow y^{-1}=\frac{-3x+1}{0x-2}=\frac{-3x+1}{-2}=\frac{3x-1}{2}$
* $y=3-\frac{2}{x}=\frac{3x-2}{x+0} \Rightarrow y^{-1}=\frac{0x-2}{x-3}=\frac{-2}{x-3}$

Les exemples suivants font trouver l'inverse des fonctions qui ne relèvent pas de la recette $\mathbf{R_a}$. Ainsi le troisième exemple demande de trouver l'inverse de la fonction f bijective, définie de A vers B (A et B ne sont pas indiqués). Nous supposons qu'ils sont les sous-ensembles finis de Z) par $f(x)=\sqrt{x+1}-2$. L'utilisation de $\mathbf{M_{xfy}}$ est indispensable. La résolution d'équations de racine carrée s'avère un outil devant être disponible dans ce travail. Dans le quatrième exemple il s'agit de trouver la valeur $f^{-1}(9)$ si la fonction f est définie de |R vers $(1,+\infty)$ par $f(x)=2^{2x-1}+1$. En mettant en fonctionnement la définition de l'inverse des fonctions l'élève trouver *f(x)=9* et ensuite obtenir une équation exponentielle très particulière pour trouver la valeur demandée. L'exemple suivant demande de trouver pour quelle valeur de x on a $f^{-1}(x)=3$ si la fonction f est bijective et définie de A vers B (A et B ne sont pas indiqués) par $f(x)=2^{x}+2^{x-1}$. L'application de la définition de l'inverse des fonctions et de la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ est mise en jeu. Le sixième exemple fait trouver l'inverse de la fonction f définie de $[-1,+\infty)$ vers $[-5, +\infty)$ par $f(x)=x^{2}+2x-4$. La résolution d'équations du second degré dont l'élève doit se servir est un outil supposé disponible dans ce travail. Dans la dernière étape de la résolution où l'élève doit choisir l'inverse de la fonction f parmi les inverses possibles il doit prendre en compte que l'ensemble de définition de f contient des nombres positifs supérieurs à 1. Dans l'exemple suivant l'élève est amené à trouver $f^{-1}(26)$ si la fonction f est bijective et $f(x^{2}+3)=x^{3}-1$. En faisant fonctionner la définition de l'inverse des fonctions l'élève doit obtenir $f^{-1}(x^{3}-1)=x^{2}+3$ et ensuite trouver pour quelle valeur de x on a $x^{3}-1=26$ pour calculer $f^{-1}(26)$. La résolution d'équations du troisième degré paraît comme un outil devant être disponible dans ce travail. Le huitième exemple consiste à faire calculer $f^{-1}(1)$ en utilisant la fonction f définie sur |R par $f(x)=x^{3}-16x+1$. L'élève doit d'abord utiliser la définition de l'inverse des fonctions et trouver f(x)=1. Cela lui permet d'obtenir une équation du troisième degré. Enfin il doit résoudre cette équation pour trouver les images de 1 par f^{-1}. Dans l'exemple suivant on demande de trouver l'inverse d'une fonction de permutation définie sur un sous-ensemble fini et discret de manière ensembliste. En ce qui concerne le dernier exemple, il consiste à faire trouver la valeur a si la fonction f est définie sur |R par $f(x)=x^{3}+2x^{2}+ax-5$ et si la représentation graphique de f^{-1} se passe par le point (-1,2). Le recours à la définition de l'inverse des fonctions est aussi indispensable dans cet exemple. En utilisant le point des cordonnées l'élève doit trouver f(2)=-1. Cela lui permet d'obtenir une équation pour trouver la valeur demandée. Cette partie se termine par une remarque qui met en évidence la relation entre la représentation graphique d'une fonction et celle de son inverse (cf. idem, remarque n°13).

5.7 Composition des fonctions

La représentation en diagrammes sagittaux, deux exemples et certaines propriétés suivent la définition ensembliste de la composition des fonctions. Dans le premier exemple on demande de trouver $(gof)(1), (fog)(2)$ et $(fof)(-1)$ en utilisant les fonctions f et g définies par $f(x)=2x+3$, $g(x)=x^2-5$. Sans trouver la formule générale des compositions demandées l'élève est amené à calculer les images « fonction par fonction ». Le deuxième exemple fait déterminer fog, gof et gog en utilisant une fonction f du second degré et une fonction g affine définies sur |R. Une identité remarquable que l'élève doit mettre en fonctionnement s'avère un outil supposé disponible dans ce travail.

Enfin le manuel termine le cours en présentant certaines propriétés de la composition des fonctions : non-commutativité (pas démontrée mais illustrée par un exemple), associativité (pas démontrée mais illustrée par un exemple), composée de la fonction identique et une fonction (démontrée mais pas d'exemple), composée d'une fonction et son inverse (démontrée et illustrée par un exemple), inverse de la composition des fonctions (démontrée mais pas d'exemple), « décomposition » (démontrée et illustrée par un exemple) et inverse de l'inverse d'une fonction (pas démontrée mais illustrée par un exemple).

5.8 Exercices résolus (66 exercices[1])

Les exercices résolus sont généralement proposés à la fin du chapitre. Mais il y a aussi certains exercices qui figurent dans le cours. Comme ces exercices ne font pas référence directe aux notions qui les précédent, il est préférable de les analyser dans cette partie. De plus nous trouvons deux tests proposant des exercices en forme de QCM à la fin du chapitre. Puisque ces exercices sont aussi corrigés, nous les analyserons ici.

5.8.1 Thème I :Définition ensembliste des fonctions et ensembles correspondant (4 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Utilisation de la définition ensembliste des fonctions (1 exercice) : on demande de travailler sur des correspondances définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre par une liste

[1] il y a des exercices qui comprennent plusieurs parties. Parfois nous avons compté ces parties comme un exercice différent. C'est pourquoi l'effectif des exercices résolus dans les tableaux est 69.

de couples. L'élève doit repérer parmi ces correspondances celle qui n'est pas une fonction. L'utilisation de la définition ensembliste de la fonction (cf. la comptine $\mathbf{C_o}$) est donc mise en fonctionnement.

ii) Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée ou l'ensemble image d'une fonction (2 exercices) : dans un exercice il s'agit de trouver l'ensemble d'arrivée d'une fonction f affine, bijective défini de A vers B (A et B sont les sous-ensembles finis de Z) à partir de l'ensemble de définition. Le deuxième exercice fait trouver l'ensemble de définition d'une fonction f affine, bijective définie de A vers B (A et B sont les sous-intervalles de |R) en utilisant B=[5,14). Les connaissances antérieures liées aux intervalles et inéquations sont des outils supposés disponibles dans ce travail.

iii) Calculer le nombre des correspondances définies de A vers B qui sont des fonctions ou qui n'en sont pas (1 exercice) : il s'agit de calculer le nombre des correspondances définies de A vers B (A et B sont les sous-ensembles finis et discrets) qui sont des fonctions en utilisant card (A)=4 et card(B)=2. L'élève doit simplement appliquer la formule concernée.

5.8.2 Thème II :Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières (3 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Déterminer des valeurs demandées à partir des formules générales de certaines fonctions particulières (1 exercice) : on demande à l'élève à déterminer la valeur $(a\text{-}b+n+g(2))$ si la fonction f définie par $f(x)=(a-2)x+b+1$ est identique et si la fonction g définie par $g(x)=(n-5)x+4$ est constante. En sachant que $f(x)=x$ si f est identique, l'élève doit égaliser le coefficient de x à 1 et le terme constant à zéro. L'égalité des polynomes paraît donc comme un outil supposé disponible dans ce travail. Pour trouver n et g(2) l'élève doit égaliser n-5 à zéro en raison de l'inexistence de variable x dans l'expression de l'image des fonctions constantes.

ii) Trouver le nombre des fonctions injectives, bijectives, surjectives… définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre (2 exercices) : il y a un exercice qui comprend quatre parties dont la première fait trouver le nombre des correspondances qui sont des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. La deuxième partie demande de trouver le nombre des fonctions injectives, la troisième partie de trouver le nombre des fonctions bijectives et la quatrième partie de trouver le nombre des fonctions constantes définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Dans le deuxième exercice il s'agit aussi de trouver le nombre des fonctions bijectives, le nombre des fonctions non bijectives et le nombre des fonctions qui associe à l'élément de l'ensemble de définition *a* et l'élément de l'ensemble d'arrivée *d*, définies sur un sous-ensemble fini et discret. Avant ces exemples le manuel encadre toutes les formules dont l'élève doit se servir sous le titre « nombre des fonctions ». Il reste donc à l'élève à les appliquer simplement. Par ailleurs pour pouvoir appliquer ces formules l'élève doit disposer des connaissances antérieures liées aux factorielles, puissances et permutations.

5.8.3 Thème III :Recherche de l'inverse d'une fonction définie algébriquement (5 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Trouver directement l'inverse d'une fonction (2 exercices) : dans un exercice on définit une fonction f de la manière suivante : $(y=f(x)$ *et* $x=2t-1, y=t+5)$ et on demande de trouver l'inverse de la fonction f. Pour ce faire l'élève doit d'abord déterminer la fonction f en calculant t en fonction de x et en mettant cette valeur obtenue à la place de x dans y. Ensuite il doit trouver l'inverse de f en utilisant $\mathbf{R_a}$. L'élève rencontre pour la première fois ce type de fonctions définies paramétriquement. Un autre exercice fait trouver f^{-1} si la fonction f est bijective et définie par $x.f(x)-3=2[f(x)]^2+x$. L'élève doit d'abord échanger x et $y=f(x)$ et ensuite il doit calculer y en fonction de x pour trouver l'inverse de *f*.

ii) Utilisation de la définition de l'inverse des fonctions à partir des éléments (2 exercices) : dans un exercice on demande de trouver la valeur m si la fonction f est définie de A vers B (A et B sont les ensembles finis de Z) par $f(x)=\frac{x+m}{x-1}$ et $(5,2)\in f.^{-1}$ En appliquant la définition de l'inverse des fonctions l'élève doit obtenir f(2)=5 et ensuite une équation pour trouver la valeur demandée. Un autre exercice fait trouver la valeur $f^{-1}(8)$ si $f(x^2+2x)=5x^2+10x-2$. En posant $y=x^2+2x$ l'élève est amené à déterminer la fonction f. Ensuite il doit mettre en fonctionnement la définition de l'inverse des fonctions et obtenir f(x)=8 (soit $f^{-1}(8)=x$) pour trouver la valeur demandée.

iii) Utilisation de la relation entre la bijectivité et l'inversibilité des fonctions (1 exercice) : il y a un exercice dans lequel il s'agit de travailler sur les correspondances définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par une liste de couples. L'élève doit repérer quelles sont les correspondances qui sont à la fois des fonctions et inversibles parmi des correspondances proposées. La définition ensembliste des fonctions et la relation entre la bijectivité et l'inversibilité des fonctions sont mises en fonctionnement.

5.8.4 Thème IV :Composition des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles (27 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Composition des fonctions (15 exercices) : dans un exercice on demande de composer une fonction f polynome définie sur |R par morceaux et une fonction g affine définie sur |R pour trouver fog. Une identité remarquable paraît comme un outil devant être disponible dans ce travail. Le deuxième exercice fait composer une fonction de permutation f et l'inverse d'une fonction de permutation g définies sur un sous-ensemble fini de Z de manière ensembliste. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de g en utilisant la définition de l'inverse des fonctions à partir des éléments et ensuite la composée demandée. Le troisième exercice fait trouver la fonction (gof^{-1}) en utilisant les fonctions f et g définies sur |R par $f(x)=\sqrt[3]{x-5}$, $g(x)=2x-7$. En appliquant la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ l'élève doit d'abord trouver l'inverse de f et ensuite la composée demandée. La résolution d'équations du troisième degré est un outil supposé disponible dans ce travail. Dans un autre exercice il faut calculer (fof)(2) si les fonctions f et g sont bijectives et $(fog^{-1})(x)=2x-3$, $(gof)(x)=5x-1$. Composer ces deux composées données permet à l'élève d'obtenir la fonction fof et l'image demandée. La définition de la fonction identique est utilisée. Dans le cinquième exercice on demande de trouver la différence a-b si la composée fog est identique et si les fonctions f et g sont définies sur |R par $f(x)=ax+1$, $g(x)=3x+b$, dans le sixième exercice de trouver le produit m.n si la composée fog est identique et les fonctions f et g sont définies sur |R par $f(x)=2x+m$, $g(x)=nx+1$. Pour ces deux exercices l'élève doit d'abord trouver la composée fog et ensuite en faisant fonctionner l'égalité des polynomes il doit déterminer les valeurs m et n (ou a et b) pour exprimer le produit (ou la différence) demandé. Le septième exercice consiste à faire trouver quelle peut être la valeur f(2) si la fonction f affine est définie par $f(x)=ax+b$ et $(fof)(x)=4x-15$. L'élève doit d'abord composer la fonction f avec elle-même et ensuite trouver a et b en appliquant l'égalité des polynomes. Cela lui permet de définir les fonctions *f* possibles et de calculer les images de 2. Dans un autre exercice il est nécessaire de trouver la somme a+b si les fonctions f et g sont définies par $f(x)=nx+2$, $g(x)=\frac{3x+m}{2}$ et $(fog)(x)=\frac{3x-1}{3}$. L'égalité des polynômes dont l'élève doit se servir est un outil supposé disponible dans ce travail comme dans les exercices précédents. L'élève doit d'abord composer f et g pour trouver fog et ensuite les valeurs m et n à partir de l'égalité des composées. Le neuvième exercice demande de trouver la valeur n si la fonction f est définie par $f(x)=\frac{3x+n}{x-2}$ et $(fof)(x)=\frac{8x-1}{x+3}$. Il s'agit de la même procédure que dans les exercices précédents. Dans un autre exercice l'élève est amené à trouver la valeur n si les fonctions f et g sont définies par $f(x)=3x+2, g(x)=2x+n$ et $fog=gof$. Il doit d'abord trouver les deux composées et ensuite obtenir une équation pour exprimer la valeur n. La résolution d'équations s'avère un outil devant être disponible dans ce travail. Dans le onzième exercice il s'agit de calculer (fog)(-1)+(gof)(2) en utilisant les fonctions polynomes f et g définies sur |R par morceaux, dans le douzième exercice de calculer (fof)(2) en utilisant une fonction polynome f définie par morceaux, dans le treizième exercice de déterminer $(fog)(3)-(gof)(4)$ en utilisant les fonctions f et g définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par une liste de couples, dans le quatorzième exercice de trouver (fog^{-1})({-1,2,3}) en utilisant une fonction polynôme f définie sur |R par morceaux et une fonction affine g définie sur |R, dans le quinzième exercice de calculer $(gof^{-1})(1)$ en mettant en fonctionnement une fonction f affine définie sur |R et une fonction g du second degré définie sur |R. Dans ces cinq derniers exercices l'élève doit calculer (ou déterminer) les valeurs demandées « fonction par fonction » sans trouver la formule générale des composées. Dans les exercices quatorze et quinze l'élève doit aussi trouver l'inverse des fonctions concernées.

ii) Décomposition des fonctions (4 exercices) : dans un exercice on demande de « décomposer » $(gof)(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ en utilisant $g(x)=x+3$ pour trouver f. Deux solutions sont proposées. La première solution consiste à « décomposer » *fog* en utilisant la définition de la fonction identique et de l'inverse de la fonction *g*. Quant à la deuxième solution, l'élève doit mettre *f(x)* à la place de *x* dans la fonction *g* et obtenir une équation. Il lui reste à calculer *f(x)* en fonction de *x*. Le deuxième exercice fait « décomposer » une fonction de permutation fog définie sur A (A est un sous-ensemble fini et discret) en utilisant une fonction de permutation f définie sur A. Dans un autre exercice il s'agit de déterminer *g(2)+g(4)* en utilisant les fonctions de permutation f et fog définies sur un sous-ensemble fini de Z. L'élève doit « décomposer » fog en utilisant f pour trouver g et les images concernées. Le quatrième exercice consiste à faire trouver g en utilisant les fonctions f et $(fog^{-1})^{-1}$ définies pour les valeurs où elles sont définies par $f(x)=3x-1, (fog^{-1})^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x-3}$. En faisant fonctionner la propriété de l'inverse de la composition des fonctions l'élève doit d'abord trouver gof^{-1} et ensuite il doit « décomposer » gof^{-1} en utilisant *f* pour trouver *g*.

iii) Décomposition implicite des fonctions (8 exercices) : dans un exercice il s'agit de calculer $f(8)$ si $f(2^{2x-1})=x^3+4x$, pour la fonction f définie sur |R, dans le deuxième exercice de calculer f(5) si $f(2x-1)=\sqrt{x^2-5}+5$, pour la fonction f définie sur |R. Dans le premier exemple l'élève doit d'abord trouver pour quelle valeur de x on a $2^{2x-1}=8$. Ensuite il doit mettre cette valeur à la place de *x* dans la composée (implicite) pour trouver l'image demandée. La même procédure est aussi valable pour le deuxième exercice. Le troisième exercice fait trouver $f(3)+f(-7)$ en utilisant la composée (implicite) définie par morceaux de la manière suivante : (si x<1, $f(2x-1)=2x+1$; si x$\geq$1, $f(2x-1)=x^2-x$). L'élève doit d'abord trouver pour quelles valeurs de x on a $2x-1=3$ et $2x-1=-7$. Ensuite il doit mettre ces valeurs à la place de x dans la composée (implicite) en prenant en compte les intervalles de définition. Dans le quatrième exercice il est nécessaire de trouver f^{-1} en utilisant $f(2^{6x-1})=2x+1$. L'élève est d'abord amené à trouver $f^{-1}(2x+1)=2^{6x-1}$ en mettant en fonctionnement la définition de l'inverse des fonctions. Puis il doit trouver l'inverse de la fonction implicite *2x+1* à partir de $\mathbf{R_a}$ et ensuite le mettre à la place de x dans la composée (implicite). Dans le cinquième exercice on demande de trouver $f(\frac{1}{x})$ si $f(\frac{1}{x-2})=\frac{x}{3x-1}$, dans le sixième exercice de trouver $f(-\frac{1}{x})$ si $f(\frac{1}{2x-3})=3x+1$. Dans ces deux derniers exercices l'élève doit d'abord trouver l'inverse des fonctions implicites et ensuite le mettre à la place de x dans la composée (implicite) pour trouver f et les images demandées. Le septième exercice consiste à faire trouver la valeur k si $f(2x-1)=6x-1$ et $f(3k+1)=23$, pour les valeurs qui conviennent. L'élève doit d'abord trouver la fonction f comme il a déjà fait dans la plupart des exercices précédents et ensuite il doit obtenir une équation en calculant f(3k+1) pour trouver la valeur demandée. La résolution d'équations dont l'élève doit se servir est un outil supposé disponible dans ce travail. Dans le dernier exercice il s'agit de trouver pour quelle valeur de x on a $(gof)(x)=-4$ si $g(x)=x-1$ et $f(\sqrt{x}-1)=x-3$, pour les valeurs où elles sont définies. L'élève doit d'abord trouver la fonction f et ensuite composer f et g pour obtenir une équation. Enfin il ne lui reste qu'à résoudre cette équation pour déterminer la valeur x demandée. La résolution d'équations du second degré paraît comme un outil devant être disponible dans ce travail.

5.8.5 Thème V : Image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique par une fonction (20 exercices)

Voici les catégories des exercices de cette partie selon la tâche prescrite :

i) Calculer l'image d'un nombre réel par des fonctions définies indirectement (6 exercices) : dans un exercice il s'agit de trouver f(5) si $f(x+1)=xf(x)-4$ et f(2)=3, pour la fonction f définie sur |R, dans le deuxième exercice de trouver f(15) si $f(x+1)=xf(x)$ et f(3)=5, dans le troisième exercice de f(20) si $f(x+1)=3xf(x)$ et f(2)=5, dans le quatrième exercice de trouver $f(7)-f(1)$ si $f(x+1)=f(x)+2x$, pour la fonction f définie sur |R, dans le cinquième exercice de trouver f(25) si $f(x)=5+f(x-1)$. Dans le premier exercice l'élève doit mettre à la place de x les valeurs numériques 2,3 et 4 pour obtenir l'image demandée. Dans le deuxième exercice l'élève doit donner à la place de x les valeurs numériques entières de 3 à 14 dans l'expression *f(x+1)=xf(x)*. Après les trois premières expérimentations numériques il est amené à reconnaître la relation entre l'antécédent et l'image. Les connaissances antérieures liées à la notion de factorielle sont des outils supposés disponibles dans ce travail. Dans le troisième exercice l'élève doit mettre à la place de x les valeurs numériques de 2 à 19 et ensuite par multiplication il doit trouver l'image demandée. Dans le quatrième exercice l'élève doit d'abord réécrire l'expression donnée de manière suivante $f(x+1)-f(x)=2x$ et mettre à la place de x les valeurs numériques de 6 à 1 et ensuite par addition il doit obtenir la différence demandée. Dans le cinquième exercice il est aussi nécessaire de donner à x les valeurs numériques de 2 à 25 et ensuite par addition d'obtenir la différence $f(25)-f(1)$. Cela permet à l'élève de trouver la valeur *f(25)*. En ce qui concerne le dernier exercice, on y demande de déterminer f(0) parmi plusieurs possibilités si $f(x+y)=2f(x).f(y)$, pour la fonction f définie de |R vers $|R^+$. Mettre zéro à la place de x dans l'expression donnée amène l'élève à trouver l'image de 0 par f. La résolution d'équations du second degré s'avère un outil devant être disponible dans ce travail.

ii) Calculer l'image d'une expression algébrique en fonction de f(x) (5 exercices) : dans un exercice on demande de calculer *f(2x)* en fonction de *f(x)* si la fonction *f* est définie pour les valeurs où elle est définie par $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$, dans le deuxième exercice de calculer *f(2x+1)* en fonction de *f(x)* si la fonction *f* est définie pour les valeurs où elle est définie par $f(x)=3^{2x-1}$, dans le troisième exercice de calculer *f(3x)* en fonction de *f(x)* si la fonction *f* est définie par $f(x)=x^2-2$, dans le quatrième exercice de calculer *f(2x+2)* en fonction de *f(x)* si la fonction *f* est définie par $f(x)=3.^{x-1}$ Dans tous ces exercices la procédure que l'élève doit suivre est tout à fait identique. L'élève doit d'abord calculer l'image demandée par f et ensuite x en fonction de f(x). Enfin il doit mettre cette valeur de x à la place de x dans l'image demandée. Pour les exercices qui concernent les fonctions exponentielles la résolution d'équations exponentielles très particulières à laquelle l'élève doit faire appel est un outil supposé disponible dans ce travail. Et pour les autres la résolution d'équations s'avère un outil devant être disponible dans ce travail.

iii) Calculer l'image d'un nombre réel par une fonction définie algébriquement (10 exercices) : dans un exercice on demande de calculer $f(\sqrt[3]{5}+1)$ si la fonction f est définie sur IR par $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$, dans le deuxième exercice de calculer $f(1+\sqrt[3]{5})$ si la fonction f est définie sur |R par $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$. Dans le premier exercice il s'agit une identité remarquable. L'élève est amené à mettre en fonctionnement cette identité remarquable pour trouver l'image demandée. En ce qui concerne le deuxième exercice l'élève doit aussi obtenir la même identité remarquable en ajoutant 2. Cela facilite le travail et réduit le risque d'erreurs. Dans le troisième exercice il est nécessaire de calculer f(1) si f(2)=5 et f(3)=8, pour la fonction f affine, dans le quatrième exercice de trouver le produit a.b si la fonction f est définie par $f(x)=ax+b$ et $f^{-1}(9)=3, f^{-1}(5)=2.$ Dans ces deux derniers exercices il s'agit de l'utilisation de la formule générale des fonctions affines. L'élève doit utiliser cette formule et obtenir un système linéaire d'équations, ensuite il doit déterminer la fonction dont il s'agit pour trouver l'image de 1 dans le premier exercice et pour le produit a.b dans le deuxième exercice. Par ailleurs la résolution du système linéaire d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail des deux exercices et l'application de la définition de l'inverse des fonctions est mise en jeu dans le deuxième exercice. Le cinquième exercice demande de trouver f(3)+f(75) si la fonction f est définie par $3^{f(x)}=x+6$, le sixième exercice de trouver de calculer g(4)-2.f(5,-1) si la fonction f est définie de $|R^2$ vers |R par $f(x,y)=x.y-y$ et si la fonction g est définie sur |R par $g(x)=2x-3$, le septième exercice de trouver la valeur $f(-2,-3)+2.g(2,-5)$ si les fonctions f et g sont définies de $|R^2$ vers |R par $f(x,y)=\max(x^2+1,xy+2)$ et $g(x,y)=\min(x+y,x-y)$. Dans le cinquième exercice en mettant les valeurs numériques 3 et 75 à la place de x dans la fonction l'élève doit obtenir deux équations exponentielles très particulières et ensuite les résoudre pour exprimer la somme des images concernées. Dans les exercices six et sept l'élève doit calculer les images nécessaires par des fonctions définies |R^2 vers |R. Ces deux exercices se distinguent par l'utilisation des notions maximale et minimale dans le septième exercice. Le huitième exercice consiste à faire trouver pour quelles valeurs de x on a f(x)>0 et elles sont combien si la fonction f est définie sur |R par morceaux de la manière suivante : (si x<1, $f(x)=x+5$ si $x \geq 1$, $f(x)=-x+9$). En prenant en compte les intervalles de définition l'élève doit résoudre les inéquations pour $x<1$, $x+5>0$ et pour $x \geq 1$, $-x+9>0$. Les connaissances antérieures portant sur les inéquations sont des outils supposés disponibles dans ce travail. Dans le neuvième exercice il faut calculer $g^{-1}(5)$ si les fonctions f et g sont définies sur |R par $f(x)=2x-3$, $y=g(x)$ et $(f.g)(x)=2x^2-7x+6$. En appliquant les opérations (multiplication et division) sur les fonctions l'élève doit déterminer g et ensuite il doit trouver l'inverse de g en faisant fonctionner la recette $\mathbf{R_a}$ pour trouver l'image demandée. Dans le dernier exercice on donne une fonction f définie sur |R par $f(x)=kx$, pour $k \in$ |R et on demande à l'élève de chercher quelles sont vraies parmi des propositions suivantes : $f(a+b)=f(a)+f(b)$, $f(2a)=2f(a)$, $f(a-b)=f(a)-f(b)$ et $f(a.b)=f(a).f(b)$. Cet exercice est l'un des exercices qui figurent à la suite de la définition des fonctions. Alors l'élève rencontre pour la première fois la linéarité au cours d'un exercice. Et il est amené à démontrer les propriétés d'une fonction linéaire. Par ailleurs dans l'énoncé les auteurs du manuel ne parlent pas de la linéarité et des fonctions linéaires.

5.8.6 Thème VI :Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (6 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Lire et interpréter la représentation graphique des fonctions (5 exercices) : il y a un exercice qui comprend trois parties. Dans les deux premières parties on demande de déterminer graphiquement $(fof)(3)$ et $(fof)(-7)$, dans la dernière partie de trouver pour quelles valeurs de x on a $(fof)(x-2)=-2$ et d'exprimer la somme de ces valeurs à partir de la représentation graphique de la fonction f. Dans le deuxième exercice il s'agit de déterminer $(fof)(0)$ à partir de la représentation graphique de l'inverse de la fonction f, dans le troisième exercice de trouver la valeur $\dfrac{f^{-1}(3)+2.f(-1)}{f(2)+f(0)}$ à partir de la représentation graphique de la fonction f définie par morceaux. Dans le quatrième exercice on donne deux représentations graphiques dans un même repère orthonormé et il y a deux points dont l'un (r, b) se trouve sur la représentation graphique de g et l'autre (x, b) sur la représentation graphique de f. On demande de déterminer l'abscisse x en fonction de r. Le dernier exercice fait trouver l'intervalle pour lequel on a $(fog)(x)\leq 4$ à partir des représentations graphiques des fonctions f et g dans deux différents repères orthonormés. L'élève doit déterminer graphiquement pour $x\geq 2,\ g(x)\leq 1$ et pour $x\leq 1,\ f(x)\leq 4$ et ensuite obtenir pour $x\geq 2, (fog)\leq 4$.

ii) Recours indispensable à la représentation graphique des fonctions pour la résolution d'une autre question (1 exercice) : dans un exercice on donne la représentation graphique de la fonction f et $(gof)(x)=3e^{2x}-2$ puis on demande de trouver la fonction g. L'élève est amené à reconnaître à partir de la représentation graphique de f que si $f(0)=1$ et $f(1)=e$, f est une fonction définie par $f(x)=e^{x}$. Ensuite il doit « décomposer » gof en utilisant f pour trouver g. La méthode du changement de variable est utilisée. Comme les fonctions exponentielles sont introduites dans la classe de première, il s'agit donc d'un travail qui relève du programme de cette classe.

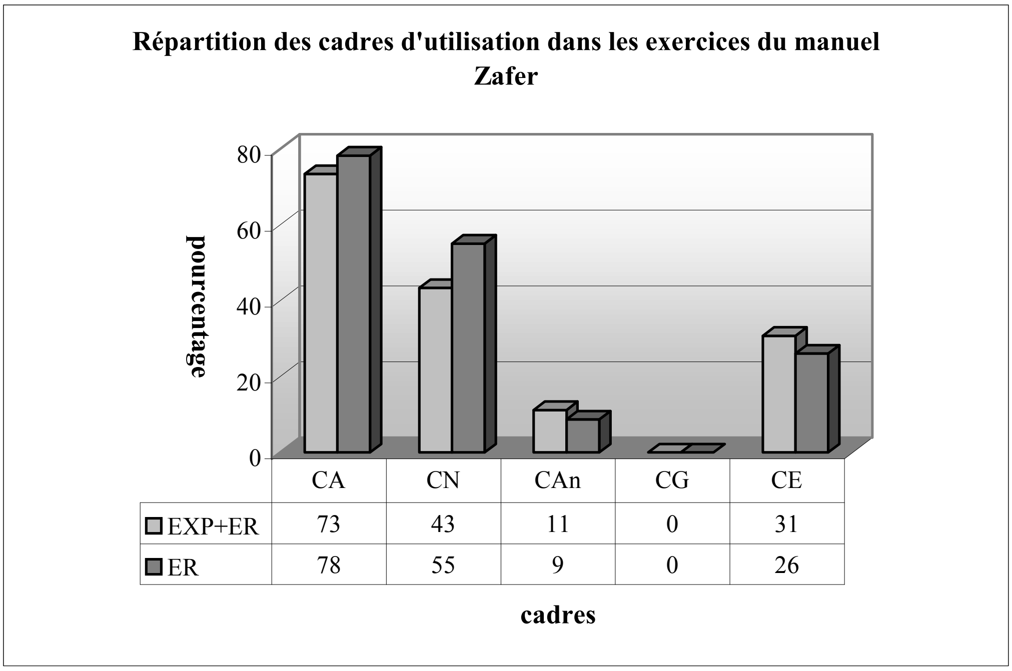
5.9 Synthèse

Les fonctions sont présentées avec celle de correspondance comme dans le manuel Uğur. A partir de la définition ensembliste la notion de fonction est introduite. Cependant on parle très brièvement du sens de la notion de fonction en terme de variable. Au cours d'une remarque la comptine $\mathbf{C_o}$ est introduite. Dans le cours nous trouvons aussi des exercices résolus qui ne correspondent pas directement aux notions qui les précédent comme dans les autres manuels de préparation au concours.

Le manuel propose un certain nombre de remarques (dix) grâce auxquelles on introduit des connaissances indispensables pour les exercices qui suivent. La plupart des notions qui apparaissent dans le programme de seconde sont abordées. Mais il y a cependant certaines notions qui relèvent du programme des classes suivantes. Par exemple les fonctions paires ou impaires, les quatre opérations sur les fonctions, les fonctions de permutation et les fonctions définies par morceaux.

Dans la collection de Zafer nous constatons les deux méthodes pour trouver l'inverse des fonctions, la méthode $\mathbf{M_{xfy}}$ est d'abord introduite dans une remarque. Et elle n'est mobilisée que pour deux fonctions pour lesquelles on peut utiliser aussi $\mathbf{R_a}$. A part pour les fonctions pour lesquelles l'utilisation de $\mathbf{M_{xfy}}$ est indispensable (par exemple fonctions exponentielles), c'est toujours $\mathbf{R_a}$ qui est utilisé.

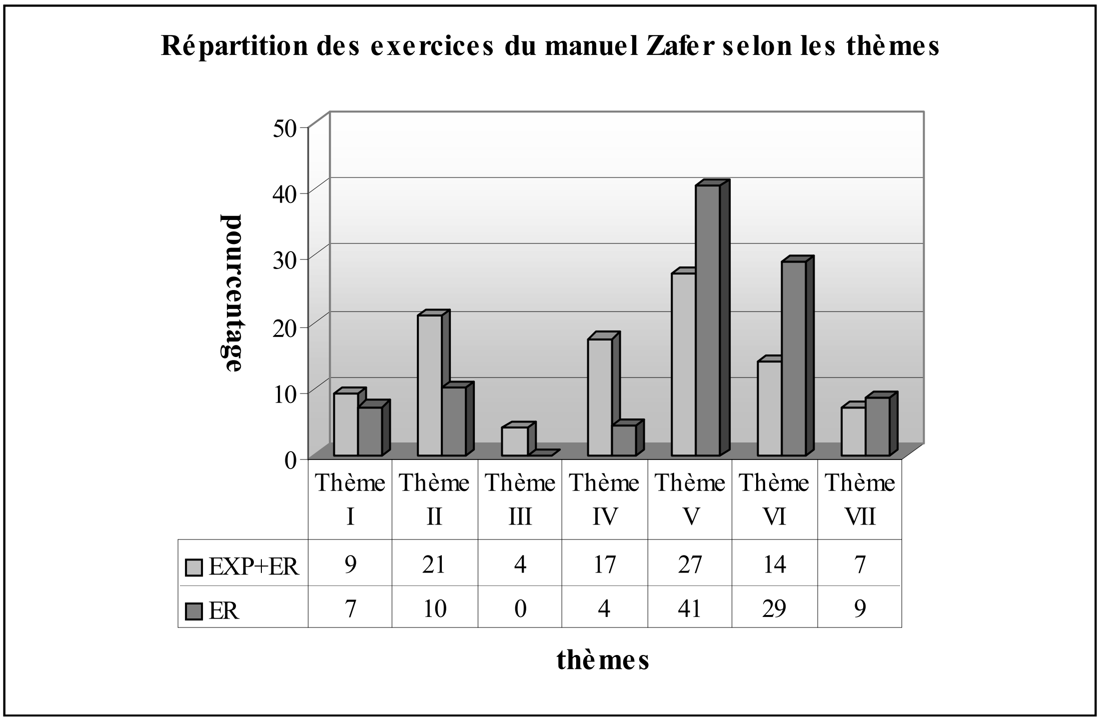
Par ailleurs le manuel propose la plupart des questions du concours ou des questions très ressemblantes comme dans les manuels Güvender et Uğur. Le tableau ci-dessous montre que la grande majorité des exercices résolus utilisent le cadre algébrique. Ce dernier est suivi par le cadre numérique avec un taux de 55%. Il y a 26% des exercices dans lesquels l'élève doit utiliser le cadre de la théorie élémentaire des ensembles. Le cadre analytique est le cadre le moins fréquent des exercices résolus du manuel Zafer. Le cadre géométrique est totalement absent. D'un point de vue des cadres nous pouvons dire que le manuel Zafer est algébriquement très riche et géométriquement pauvre comme la plupart des manuels que nous avons analysés.



	CA	CN	CAn	CG	CE
EXP+ER	73	43	11	0	31
ER	78	55	9	0	26

CA :Cadre Algébrique, CN :Cadre Numérique, CAn :Cadre Analytique, CG :Cadre Géométrique, CE :Cadre de la Théorie Elémentaire des Ensembles, EXP :Exemples(Effectif :74 exemples), ER :Exercices résolus (Effectif :69 exercices)(EXP+ER, total :143 exercices)

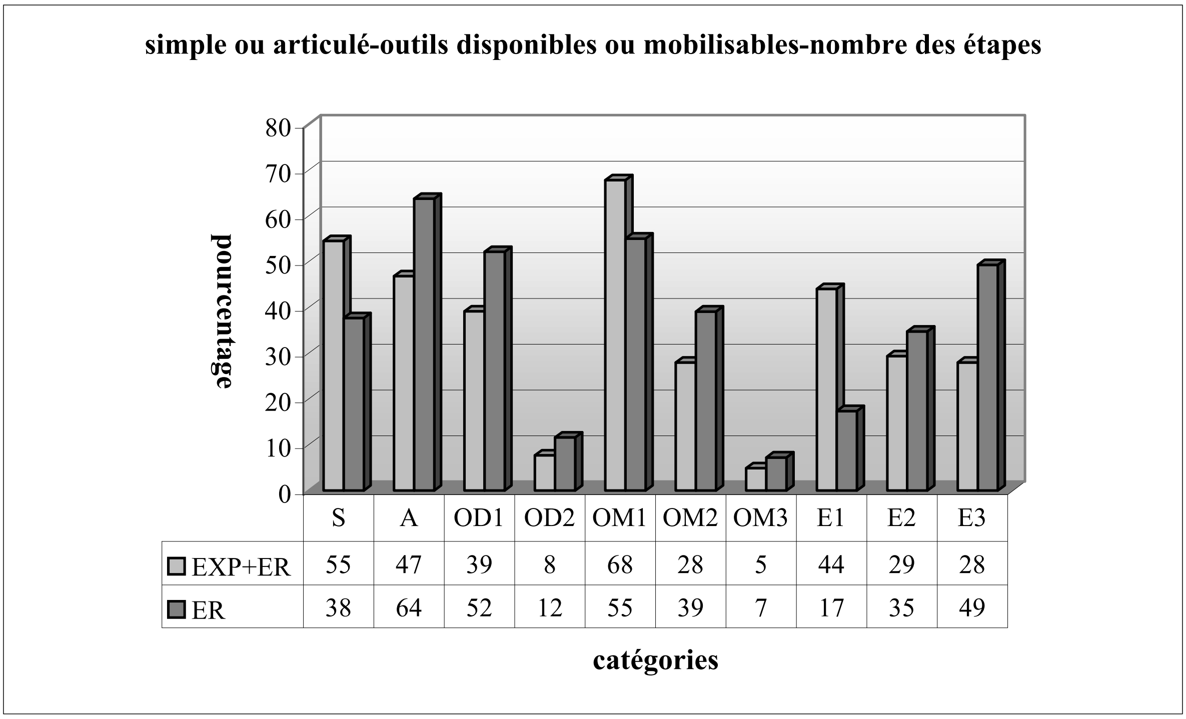
Nous constatons que tous les thèmes qui existent dans les questions du concours sur la notion de fonction figurent dans le manuel. Selon le tableau suivant, les thèmes V et VI sont les thèmes plus fréquents des exercices résolus comme dans les manuels Güvender et Uğur. Le thème III est totalement absent des exercices résolus. Par ailleurs il y a seulement 9% des exercices où il s'agit de travailler sur la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (thème VII). Ce taux est aussi valable pour les exercices portant sur les propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières (thème II). Dans un très petit nombre des exercices l'élève doit trouver l'inverse des fonctions ou utiliser la définition de l'inverse des fonctions (thème IV). Tandis que 7% des exercices demandent d'utiliser la définition ensembliste de la notion de fonction ou de déterminer les ensembles correspondant.



	Thème I	Thème II	Thème III	Thème IV	Thème V	Thème VI	Thème VII
EXP+ER	9	21	4	17	27	14	7
ER	7	10	0	4	41	29	9

Thème I :Définition ensembliste de la notion de fonction…Thème II :Propriétés particulières des fonctions…Thème III :Quatre opérations sur les fonctions, Thème IV :Recherche de l'inverse d'une fonction, Thème V :Composition des fonctions, Thème VI :Image d'un nombre rée…Thème VII :Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé EXP :Exemples(Effectif :74 exemples), ER :Exercices résolus (Effectif :69 exercices)(EXP+ER, total :143 exercices)

Comme nous l'avons déjà indiqué, dans le manuel Zafer nous pouvons trouver la plupart des questions du concours ou des questions ressemblantes soit dans le cours soit dans les exercices résolus. Selon le tableau suivant 64% des exercices résolus font utiliser plusieurs connaissances antérieures des élèves. Tandis que dans 38% des exercices il s'agit d'applications directes du cours. Plus de la moitié demandent à l'élève de faire appel à un seul outil disponible contre un petit nombre deux outils disponibles. Dans plus de la moitié des exercices l'élève doit faire appel à un seul outil mobilisable pour le travail. Tandis que 46% des exercices amènent l'élève à mobiliser plusieurs connaissances qui font référence directe à la notion de fonction ou ses composantes (OM2+OM3). Par ailleurs, dans la grande majorité des exercices l'élève peut arriver à la bonne réponse en plusieurs étapes (E2+E3:84%).



	S	A	OD1	OD2	OM1	OM2	OM3	E1	E2	E3
EXP+ER	55	47	39	8	68	28	5	44	29	28
ER	38	64	52	12	55	39	7	17	35	49

S :Simple, A :Articulé, OD1 :Outil disponible 1, OD2 :Outil disponible 2, OM1 :Outil mobilisable 1, OM2 :Outil mobilisable 2,OM3 :Outil mobilisable 3,E1 :Etape 1, E2 :Etape 2, E3 :Etape 3

Quatre pages du manuel de préparation au concours Zafer

ÇÖZÜM $f(x) = kx$

i) $f(a + b) = k(a + b) = k.a + k.b = f(a) + f(b)$ dir. Doğrudur.

ii) $f(2a) = k(2a) = 2(ka) = 2f(a)$ Doğrudur.

iii) $f(a - b) = k(a - b) = ka - kb = f(a) - f(b)$ Doğrudur.

iv) $f(a . b) = kab$

$f(a) . f(b) = (k.a)(k.b) = k^2a.b \neq k(ab) = f(a.b)$

O halde $f(a.b) \neq f(a) . f(b)$ dir.

ÖRNEK $f : R \to R$, $f(2) = 3$, $f(x + 1) = x\,f(x) - 4$ ise **f(5) kaçtır?**

ÇÖZÜM $x = 2 \Rightarrow f(2 + 1) = f(3) = 2.f(2) - 4 = 2 . 3 - 4 \Rightarrow f(3) = 2$

$x = 3 \Rightarrow f(3 + 1) = f(4) = 3.f(3) - 4 = 3.2 - 4 \Rightarrow f(4) = 2$

$x = 4 \Rightarrow f(4 + 1) = f(5) = 4.f(4) - 4 = 4.2 - 4 \Rightarrow f(5) = 4$

ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x + 1) = f(x) + 2x$ ise **f(7) – f(1) değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM $f(x + 1) - f(x) = 2x$

$x = 6 \Rightarrow f(7) - f(6) = 2.6 = 12$

$x = 5 \Rightarrow f(6) - f(5) = 2.5 = 10$

$x = 4 \Rightarrow f(5) - f(4) = 2.4 = 8$

....

$x = 1 \Rightarrow + \ \underline{f(2) - f(1) = 2.1 = 2}$

$f(7) - f(1) = 12 + 10 + ... + 2 = 2(6 + 5 + ... + 1) = 2 . \frac{6.7}{2} = 42$

ÖRNEK $f(x) = 5 + f(x - 1)$ ve $f(1) = 2$ ise **f(25) nedir?**

ÇÖZÜM $f(x) = 5 + f(x - 1) \Rightarrow f(x) - f(x - 1) = 5$

$x = 2 \Rightarrow f(2) - f(1) = 5$

$x = 3 \Rightarrow f(3) - f(2) = 5$

$x = 4 \Rightarrow f(4) - f(3) = 5$

....

$x = 25 \Rightarrow + \ \underline{f(25) - f(24) = 5}$

$f(25) - f(1) = 24.5 = 120$

$\Rightarrow f(25) = 120 + f(1) = 120 + 2 = 122$ dir.

II. Yol : $f(x) = (a - 3)x^2 + (b + 2)x + c - 4 = x$

$$\left.\begin{array}{l} a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \\ b + 2 = 1 \Rightarrow b = -1 \\ c - 4 = 0 \Rightarrow c = 4 \end{array}\right\} a - b + c = 3 - (-1) + 4 = 8$$

7. PERMÜTASYON FONKSİYON

TANIM : $A \neq \varnothing$ olmak üzere $A \to A$ tanımlanan 1 – 1 ve örten her fonksiyona permütasyon fonksiyon denir.

ÖRNEK A= {a, b, c, d } olsun.

f = { (a, b) , (b, c) , (c, a) , (d, d)}

$f : A \to A$ permütasyon fonksiyondur.

g = { (a, c) , (b, d) , (c, b) , (d, a) }

$g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix}$

$g : A \to A$ permütasyon fonksiyondur.

8. TEK VE ÇİFT FONKSİYONLAR :

TANIM : $f : A \to B$

$x \to f(x)$ fonksiyonu için,

a) $f(-x) = -f(x)$ ise $f(x)$ tek fonksiyondur denir.

b) $f(-x) = f(x)$ ise $f(x)$ çift fonksiyondur denir.

ÖRNEK **Aşağıdaki fonksiyonların tek veya çift fonksiyon olduklarını belirtiniz.**

a) $f(x) = x^5 - 2x$ b) $g(x) = x^2 + 3$ c) $h(x) = x^2 - x$

ÇÖZÜM a) $f(-x) = (-x)^5 - 2(-x) = -x^5 + 2x = -(x^5 - 2x) = -f(x)$, f(x) tek fonksiyondur.

b) $g(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = g(x)$, g(x) çift fonksiyondur.

c) $h(-x) = (-x^2) - (-x) = x^2 + x$

$h(-x) \neq -h(x)$ olduğundan h(x) tek fonksiyon değildir.

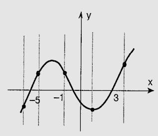
$h(-x) \neq h(x)$ olduğundan h(x) çift fonksiyon değildir.

O halde h(x) ne tek nede çift fonksiyondur.

NOT : Tek ve çift fonksiyonlar konusu özel tanımlı fonksiyonlarda geniş olarak incelenecektir.

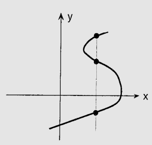
ÇÖZÜM

A)



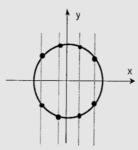
y – eksenine çizdiğimiz her paralel doğru grafiği yalnız bir noktada kestiği için verilen grafik fonksiyon grafiğidir.

B)



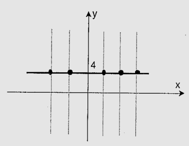
y eksenine çizdiğimiz en az bir paralel doğru grafiği birden fazla noktada kestiği için verilen grafik fonksiyon grafiği değildir.

C)



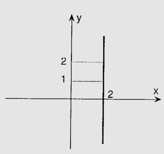
y – eksenine çizdiğimiz en az bir paralel doğru grafiği birden fazla noktada kestiği için verilen grafik fonksiyon grafiği değildir.

D)



y eksenine çizdiğimiz her parelel doğru grafiği yalnız bir noktada kestiği için grafik fonksiyon grafiğidir.

E)



x = 2 doğrusu çizildiğinden sonsuz noktada keser. Grafik fonksiyon grafiği değil (2, 1) , (2, 2) bir fonksiyonun elemanları olamaz.

ÖRNEK $f : R \to R$, f(x) doğrusal fonksiyon ise $f(x) = ax + b$ biçimindedir. f(x) doğrusal fonksiyon ve $(fof)(x) = 4x - 15$ ise **f(2) ne olabilir?**

ÇÖZÜM $(fof)(x) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b = 4x - 15$

$\Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$ dir.

$\Rightarrow ab + b = -15$ dir.

$a = 2 \Rightarrow ab + b = 2b + b = 3b = -15 \Rightarrow b = -5 \Rightarrow f(x) = 2x - 5$

$a = -2 \Rightarrow ab + b = -2b + b = -b = -15 \Rightarrow b = 15 \Rightarrow f(x) = -2x + 15$

$f(x) = 2x - 5 \Rightarrow f(2) = 2.2 - 5 = -1$ veya

$f(x) = -2x + 15 \Rightarrow f(2) = -2.2 + 15 = 11$ dir.

ÖRNEK A = {a, b, c, d, e} kümesinde tanımlı

$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & d & e & a & c \end{pmatrix}$ ve $fog = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & a & d & c & b \end{pmatrix}$ permütasyon fonksiyonları veriliyor.

Buna göre g fonksiyonu bulunuz.

ÇÖZÜM $fog = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & a & d & c & b \end{pmatrix} \Rightarrow f^{-1}ofog = f^{-1} o \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & a & d & c & b \end{pmatrix}$

$g = \begin{pmatrix} b & d & e & a & c \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & a & d & c & b \end{pmatrix}$

$g = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & a & e & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & a & d & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & d & b & e & a \end{pmatrix}$

ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 , & x > 1 \\ x^2 + 1 , & x \leq 1 \end{cases}$

$g : R \to R$, $g(x) = \begin{cases} x + 2 , & x > 0 \\ 2x - 1 , & x \leq 0 \end{cases}$ ise

(fog) (–1) + (gof) (2) nin toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM $(fog)(-1) = f(g(-1)) = f(2(-1) -1) = f(-3) = (-3)^2 + 1 = 10$

$(gof)(2) = g(f(2)) = g(2.2 + 1) = g(5) = 5 + 2 = 7$

$(fog)(-1) + (gof)(2) = 10 + 7 = 17$ dir.

ÖRNEK Tanımlı olduğu değerler için $f(x^2 + 2x) = 5x^2 + 10x - 2$ ise $f^{-1}(8)$ in değeri kaçtır?

ÇÖZÜM $f(x^2 + 2x) = 5(x^2 + 2x) - 2$

$y = x^2 + 2x \Rightarrow f(y) = 5y - 2 \Rightarrow f(x) = 5x - 2$ dir.

$f^{-1}(8) = x \Rightarrow f(x) = 8$

$\Rightarrow 5x - 2 = 8 \Rightarrow x = 2$ dir.

ANNEXE II

QUESTIONS PROPOSEES SUR LES FONCTIONS AU CONCOURS DE 1970 à 2003 EN TURQUIE

ANNEXE II : questions proposées sur la notion de fonction au concours d'entrée à l'université de 1970 à 2003 en Turquie

(Question n°1/Année1970) : Laquelle de ces fonctions ci-dessous est l'inverse de la fonction définie par $y=3x-4$?

A) $\frac{1}{3x-4}$ B) $y=\frac{1}{3}x+4$ C) $y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ D) $y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$ E) $y=-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$

(Q2/1970) : Etant donné la fonction f définie par $f(x)=2x^2$ et la fonction g définie par $g(x)=3x$. Laquelle de ces propositions est-t-elle vraie ?

A)$g(f(x))=f(g(x))$ B)$g(f(x))>f(g(x))$ C) $f(g(x))>g(f(x))$ D)$f(g(x))=18x$ E)$f(g(x))=9x^2$

(Q3/1971): Laquelle de ces propositions ci-dessous possède un inverse qui n'est pas une fonction?

A) $y=\frac{1}{x}$ B) $y=2x+1$ C) $y=x^3$ D) $y=x^2$ E)$y=x$

(Q4/1971): Soit la fonction f définie par $f(x)=3x^2-3$ et la fonction g définie par $g(x)=2x+1$. La quelle de ces fonctions est la fonction fog ?

A)$12x^2-3$ B)$12x^2+12x$ C) $6x^2$ D) $6x^2+12$ E)$12x^2$

(Q5/1973): Si les fonctions f et g sont définies par $f(x)=x^3-8$ et $g(x)=x+2$, laquelle de ces fonctions suivantes est la fonction fog ?

A)x^3+6x^2+12x B)x^3-6x^2+12x C)x^3+5x^2-12x D)x^3-6x^2-12x E)x^3-12x

(Q6/1973): On considère la fonction f définie par $f:x\rightarrow\frac{1}{2}x$, la fonction g définie par $g:x\rightarrow x^2+1$ et l'ensemble $A=\{2,4,8,16\}$. Lequel de ces ensembles qu'associe à l'ensemble A la fonction fog ?

A) $\{1,2,4,8\}$ B) $\{5,17,65,157\}$ C) $\{2,5,17,65\}$ D) $\{1,4,16,64\}$ E) Aucun

(Q7/1973): Laquelle de ces fonctions suivantes est l'inverse de la fonction définie par $y=\frac{3x-1}{2x+1}$?

A)$y=\frac{3-2x}{1+2x}$ B) $y=\frac{2x+1}{3x+1}$ C) $y=\frac{2x+1}{3x-1}$ D) $y=\frac{1+x}{3-2x}$ E) $y=\frac{3x+1}{2x+1}$

(Q8/1974) : Soit A={a,b,c} et B={5,6,7,8}. Laquelle de ces correspondances définies de A vers B ci-dessous présente une fonction ?

A) β_1={ (a,5),(a,6),(a,7),(b,7),(c,7)}

B) β_2={(a,6),(b,5),(c,5)}

C) β_3={(a,8),(b,7),(b,8),(a,5)}

D) β_4={(a,5),(b,6),(b,7),(c,8)}

E) β_5={(a,6),(c,5),(c,7)}

(Q9/1976): Si A={x :x=2n et n$\in$Z} et la fonction f est définie de A vers B par f(x)=$\frac{x+2}{2}$,

Trouver l'ensemble image B.

A) les nombres impairs

B) les nombres entiers relatifs

C) les nombres naturels privés de zéro

D) les nombres pairs

E) les nombres naturels

(Q10/1976): Etant donné (gof) (x)=(gof)(y)$\Rightarrow$g(f(x))=g(f(y)) $\Rightarrow$f(x)=f(y) $\Rightarrow$ x=y. Ce travail symbolique justifie laquelle de ces propositions suivantes ?

A) Si les fonctions f et g sont surjectives, la fonction gof est donc surjective

B) Si les fonctions f et g sont non-surjectives, la fonction gof est donc non-surjective

C) Si les fonctions f et g sont injectives, la fonction gof est donc injective

D) Si l'inverse de la fonction f est la fonction g, l'inverse de g n'est donc pas la fonction f

E) Si les fonctions f et g sont bijectives, la fonction gof est donc bijective

(Q11/1976) : Soient A=IR-{2}, B=IR-{3] et f définie de A vers B par f(x)=$\frac{3x-1}{x-2}$. Laquelle est l'inverse de la fonction f parmi les fonctions données ci-dessous ?

A) $\frac{x-3}{2x-1}$ B) $\frac{2x+1}{x+3}$ C) $\frac{2x-1}{x-3}$ D) $\frac{2-x}{1-3x}$ E) $\frac{1-2x}{x-3}$

(Q12/1977): Si les fonctions g et f sont définies par:

$$(a,b)\rightarrow f(a,b)=\min(a\sqrt{2},b\sqrt{3})$$

$$(a,b)\to g(a,b)=\max(3a,2b)$$

quelle est la valeur *f(f(3,2),g(2,3))* ?

A) $2\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{3}$ C)6 D) $3\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}$

(Q13/1978): Si $f(n)=\frac{n}{3}.f(n+1)$ et $f(5)=\frac{9}{16}$, quelle est la valeur *f(2)* ?

A) $\frac{3}{4}$ B)2 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

(Q14/1978) : On considère la fonction f définie sur IN par :

$$g : x \to g(x) \begin{cases} x/2 & \text{(si x est pair)} \\ 0 & \text{(si x est impair)} \end{cases}$$

Laquelle de ces fonctions ci-dessous est la fonction gog ?

A) $\begin{cases} 0 & \text{(si x est pair)} \\ 0 & \text{(si x est impair)} \end{cases}$

B) $\begin{cases} x/4 & \text{(si x est pair)} \\ 0 & \text{(si x est impair)} \end{cases}$

C) $\begin{cases} x/4 & \text{(si x est pair)} \\ x/2 & \text{(si x est impair)} \end{cases}$

D) $\begin{cases} x/4 & \text{(si x est multiple de 4pair)} \\ 0 & \text{(si x est impair)} \end{cases}$

E) $\begin{cases} x/2 & \text{(si x est multiple de 4)} \\ 0 & \text{(si x est multiple de 4)} \end{cases}$

(Q15/1980) : Les fonctions f et g sont les deux fonctions définies sur IR, (f et g $\in$ IR).

Si $f : x\to 6x-1$ et $(g^{-1}of) : x\to 2x+1$. Laquelle de ces fonctions est g ?

A) $2x+5$ B) $x-5$ C) $x+2$ D) $5x-1$ E) $3x-4$

(Q16/1981/II. Etape) : On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=\frac{-2x}{x+a}$.

Si $f(x)=f^{-1}(x)$, quelle est la valeur numérique de a ?

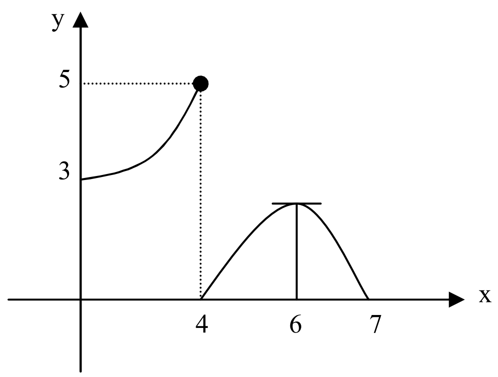
A)3 B) 2 C)1 D) –1 E) –2

(Q17/1982/II. Etape) : On considère que les fonctions *f* et *g* sont définies sur IN par :

$f : x \to \sum_{n=1}^{x} n$, $g : x \to \sum_{n=1}^{x} n^2$ Quelle est la valeur *(fog)(2)* ?

A)16 B)15 C)14 D)13 E)12

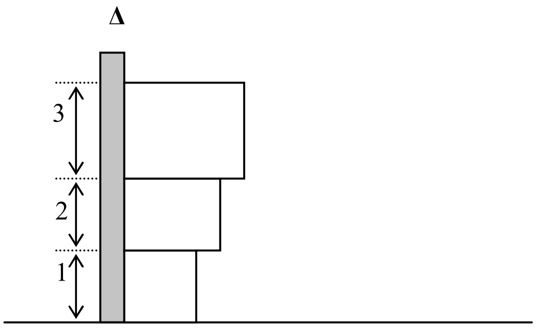
(Q18/1982/II. Etape) : Etant donné la fonction f représentée graphiquement ci-dessous :



Pour quelle valeur de *x* a-ton *f(f(x))=3* ?

A)3 B)4 C)5 D)6 E)7

(Q19/1982/II. Etape) :



On considère que les longueurs d'un côté des carrés voisins représentés ci-contre sont respectivement de 1,2 , 4 unités, la droite **Δ** change parallèlement à l'axe des ordonnées et la fonction f définie par *f :x→ f(x)=* « le calcul de la surface hachurée ». Alors quelle est la valeur *f(3)* ?

A)15 B)17 C)19 D)21 E)23

(Q20/1985/II. Etape): Si *f(a.b)=f(a)+f(b)*, quelle est la valeur *f(1)* ?

A) *a.b* B) *b* C) *a* D) 0 E)1

(Q21/1986/II. Etape): Si $f(2x+3) = x^2 + 1$, laquelle de ces fonctions est f ?

A) $\frac{x^2+6x+5}{4}$ B) $\frac{x^2-6x+13}{4}$ C) $\frac{9x^2}{4}+1$ D) $(2x+3)^2+1$ E) $\frac{x^2-2}{2}$

(Q22/1987/I. Etape): On considère que la fonction f est linéaire et *f(2)=3, f(3)=2*. Alors quelle est la valeur *f(1)* ?

A) 1 B)2 C)3 D)4 E)5

(Q23/1987/II. Etape): Si $f(2x+3)=3x+2$, quelle est la valeur $f(0)$?

A) $-\frac{5}{2}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) 0 E) $\frac{2}{3}$

(Q24/1988/I. Etape): Si la fonction f est définie par $x \to f(x)=x^3-3x^2+3x-1$, quelle est la valeur $f(x+1)$?

A) x^3+1 B) x^3-1 C) x^3 D) x^2 E) x^2+1

(Q25/1988/II. Etape): Laquelle de ces fonctions ci-dessous définies de l'ensemble {1,2,3} vers l'ensemble {10,11,12} possède une fonction inverse ?

A) {(1,11), (2,10),(3,12)}

B) {(1,12),(2,11),(3,11)}

C) {(1,10),(2,10),(3,11)}

D) {(1,10),(2,10),(3,10)}

E) {(1,12),(2,11),(3,12)}

(Q26/1988/II. Etape) : On considère la fonction fog définie par $fog(x)=\frac{x}{x^2+1}$ et la fonction g définie par $g(x)=x+1$. Laquelle de ces fonctions est la fonction f ?

A) $\frac{x+1}{x^2+2x+2}$ B) $\frac{x-1}{x^2-2x+2}$ C) $\frac{x^2+1}{x+1}$ D) $\frac{x^2+1}{x}$ E) $\frac{x}{x+1}$

(Q27/1989/II. Etape) : Si $f(\frac{x+1}{x-2})=\frac{x-2}{x+1}$, dans les conditions qui conviennent, laquelle de ces fonctions proposées est la fonction f ?

A) $\frac{x+1}{x}$ B) $\frac{x}{x-1}$ C) $\frac{1}{x}$ D) $\frac{1}{x+1}$ E) $\frac{1}{x-1}$

(Q28/1989/II. Etape) : On considère la fonction fog définie par $fog(x)=\frac{x}{x^2+1}$ et la fonction f définie par $f(x)=x+1$. Laquelle est la fonction g parmi les suivantes ?

A) $-\frac{x^2}{x^2+x+1}$ B) $\frac{x-1}{x^2-2x+2}$ C) $\frac{1}{x+1}$ D) $\frac{x}{x+1}$ E) $\frac{-x^2+x-1}{x^2+1}$

(Q29/1990/II. Etape): Etant donné la fonction f définie par $f(x)=\frac{2x+u}{x+1}$ et la fonction fof définie par $fof(x)=\frac{x-9}{3x-2}$. Quel est le nombre u ?

A)-3 B)-2 C)-1 D)0 E)1

(Q30/1990/II. Etape): On considère la fonction f suivante :

$$x \to f(x)=2^{3x-1}.$$

Laquelle de ces propositions désigne la valeur *f(2x)* en fonction de *f(x)* ?

A) $3f(x)$ B) $3[f(x)]^2$ C) $2f(x)$ D) $2[f(x)]^2$ E) $2[f(x)]^3$

(Q31/1991/II. Etape) : Soit la fonction f suivante :

$$\text{IR} \to \text{IR}$$

$$x \to f(x)=x.f(x+1), \quad f(x)=\frac{4}{3}$$

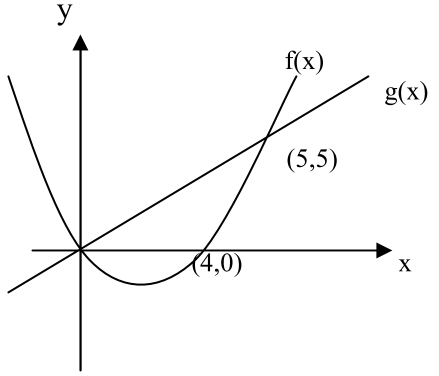
Quelle est la valeur *f(2)* ?

A)14 B)12 C)10 D)8 E)6

(Q32/1992/I. Etape): Si $f(2x+1)=\frac{x^2+3}{5}$, laquelle de ces fonctions ci-dessous est f ?

A) $\frac{4}{5}(x^2-x+1)$ B) $\frac{4}{5}(x^2+x+1)$ C) $\frac{x^2+3}{5}$ D) $\frac{x^2+2x+13}{12}$ E) $\frac{x^2-2x+13}{20}$

(Q33/1993/II. Etape) : On considère la courbe représentative de la fonction f parallèle à l'axe des ordonnées et la fonction f linéaire (5,5) et (0,0) les cordonnées de leurs points communs ci-dessous :



Quelle est la valeur $\frac{(fog)(8)}{(fof)(2)}$?

A)1 B)2 C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

(Q34/1994/I. Etape): Etant donné $f(x)=x^2+2x$ et $fog(x)=x^2+6x+8$. Laquelle de ces fonctions proposées peut être la fonction g ?

A) x^2+x B) x^2-2 C) x^2+2 D) $x-2$ E) $x+2$

(Q35/1994/II. Etape): Etant donné $f(x)=\log_2 x$, $(gof)(x)=x+2$. Laquelle de ces fonctions suivantes peut être la fonction g ?

A) 2^x B) 2^x-1 C) 2^x+1 D) 2^x+2 E) 2^x-2

(Q36/1995/I. Etape): On considère la fonction f suivante:

$$x \to f(x)=\frac{x}{x+1}$$

Parmi les suivantes, laquelle est la valeur $f(x-1)$ en fonction de $f(x)$?

A) $\frac{f(x)+1}{2f(x)}$ B) $\frac{f(x)+2}{2f(x)}$ C) $\frac{2f(x)+1}{2f(x)}$ D) $\frac{2f(x)+1}{f(x)}$ E) $\frac{2f(x)-1}{f(x)}$

(Q37/1995/II. Etape): Considérons la fonction f, $f: x \to 2x+1$ et la fonction g, $g: x \to \frac{2x-1}{x+5}$. Pour quelle valeur de x a-t-on $(g^{-1}of)(x)=-16$?

A)1 B)2 C)3 D)4 E)8

(Q38/1996/II. Etape): On considère la fonction f définie par $f: x \to ax+b$ et $f^{-1}(3)=4$, $f^{-1}(2)=5$. Quel est le produit de a et b ?

A) -7 B)-6 C)-5 D)3 E)6

(Q39/1996/II. Etape): Si $f(x)=3.f(x-2)$ et $f(5)=6$, quelle est la valeur $f(1)$?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D)1 E)2

(Q40/1997/I. Etape): On considère la fonction f suivante :

$$\mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$$

$$x \to f(x)=2x+1-f(x+1) \quad \text{et } f(4)=2$$

Quelle est la valeur $f(2)$?

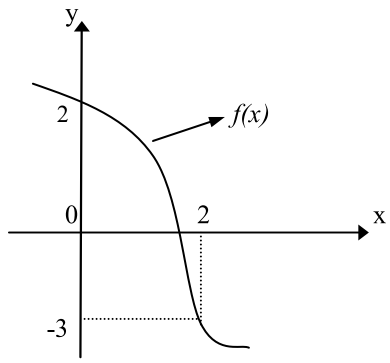
A)0 B)1 C)2 D)3 E)4

(Q41/1997/I. Etape) : On considère la fonction f définie de IR-{-1} vers IR-{3} et $x=\dfrac{f(x)+2}{3-f(x)}$.

Lequel est l'inverse de la fonction f parmi les suivants ?

A) $\dfrac{x-3}{x+1}$ B) $\dfrac{x+3}{x-2}$ C) $\dfrac{x+2}{3-x}$ D) $\dfrac{2x+1}{3-x}$ E) $\dfrac{2x+3}{3-x}$

(Q42/1997/II. Etape): On considère que la fonction f est bijective sur [0,2] et représentée graphiquement ci-dessous :



Quelle est la valeur $\dfrac{f(2)+f^{-1}(2)}{f(f(1))}$?

A) $-\dfrac{5}{2}$ B) $-\dfrac{3}{2}$ C) 0 D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{3}{2}$

(Q43/1997/II. Etape): Etant donné que la fonction f est définie de IR-{2} vers IR-{3} par $f(x)=\dfrac{ax-4}{3x-b}$ et bijective, lequel de ces couples donnés ci-dessous est le couple (a,b) ?

A) (5,4) B) (2,3) C) (2,6) D) (6,6) E) (9,6)

(Q44/1998/I. Etape) : Lequel de ces ensembles suivants est l'ensemble image de la fonction définie sur IR-{1} par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$?

A) IR B) IR-{3} C) IR-{2} D)IR-{1} E)IR-{0}

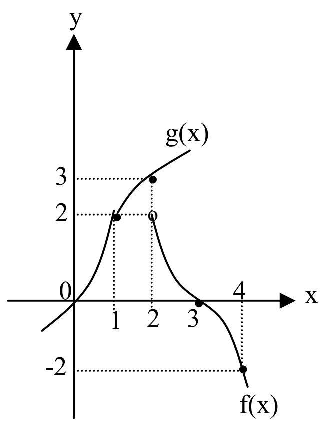
(Q45/1998/I. Etape) : On définit la fonction f comme la suivante « f est une fonction qui fait correspondance à chaque nombre entier positif la somme de ce nombre et son inverse ».
Laquelle de ces fonctions ci-dessous peut désigner cette fonction ?

A) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$ B) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ C) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ D) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ E) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

(Q46/1998/II. Etape): Si x<-3 et f(x)= x^2+6x-2, laquelle de ces fonctions est l'inverse de la fonction f ?

A) $-9-\sqrt{x+9}$ B) $-3-\sqrt{x+9}$ C) $-3-\sqrt{x+11}$ D) $6-\sqrt{x+11}$ E) $3+\sqrt{11x}$

(Q47/1998/II. Etape) :



La figure ci-contre indique les graphes de f(x) et g(x). A partir de ces informations, trouvez la valeur de $\dfrac{g(1)+(f\circ g)(2)}{f(4)}$!

A) $-\dfrac{1}{2}$ B)-1 C) 0 D)1 E) $\dfrac{1}{2}$

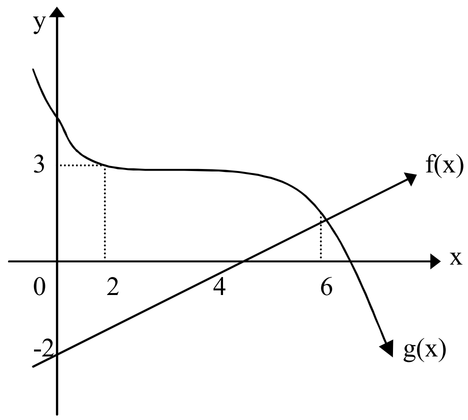
(Q48/1999/I. Etape): Si la fonction f suivante :

$$x \to f(x) = x^2 - x + 1$$

quelle est la valeur *f(1-x)-f(x)* ?

A)0 B)1 C) *1-x* D) x^2-1 E) x^2+1

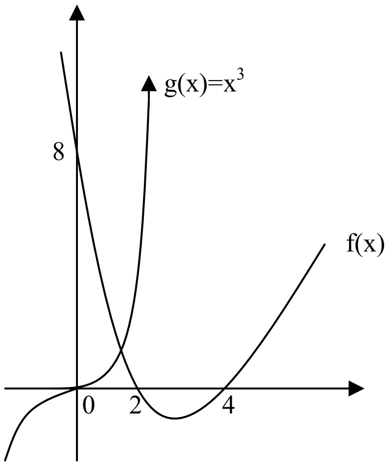
(Q49/1999/I. Etape) : Etant donné la fonction f linéaire et la fonction g représentées graphiquement ci-dessous :



Quelle est la valeur $(f^{-1}og(6))+(gof^{-1})(-1)$?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C)0 D)3 E)9

(Q50/2000/I. Etape) :



Dans la figure ci-contre, on a les graphes de *f(x)* et *g(x)=x³*.
A partir de ces graphes, trouvez la valeur de $(f \circ g^{-1} \circ f)(0)$

A) -4 B) –2 C) 0 D) 4 E) 8

(Q51/2003/I.Etape) : Etant donné la fonction f définie par $f(x)=|x-2|-|x|$, quelle est la somme $f(-1)+f(0)+f(1)$?

A)-4 B)-2 C)0 D)2 E)4

ANNEXE III

UN EXEMPLAIRE DU CONCOURS D’ENTREE A L’UNIVERSITE DE 2003

Annexe III :exemplaire du concours d'entrée à l'université de 2003

SAYISAL BÖLÜM

DİKKAT! BU BÖLÜMDE CEVAPLAYACAĞINIZ TOPLAM SORU SAYISI 90'DIR.

<u>İlk 45 Soru</u> "Matematiksel İlişkilerden Yararlanma Gücü",

<u>Son 45 Soru</u> "Fen Bilimlerindeki Temel Kavram ve İlkelerle Düşünme Gücü" ile ilgilidir.

Eşit Ağırlıklı ÖSS puanınızın yüksek olmasını istiyorsanız Sayısal Bölüme 90 dakika ayırmanız yararınıza olabilir. Sayısal Ağırlıklı ÖSS puanınızın yüksek olmasını istiyorsanız Sayısal Bölüme biraz daha fazla zaman ayırabilirsiniz.

Bu bölümdeki sorularla ilgili cevaplarınızı, cevap kâğıdınızdaki "SAYISAL BÖLÜM"e işaretleyiniz.

1.

$$\frac{3,3}{0,3}+\frac{22,2}{0,2}+\frac{0,05}{0,005}-111$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 1 B) 7 C) 9 D) 11 E) 21

2.

$$\frac{\left(0,005\cdot10^{35}\right)+\left(0,8\cdot10^{33}\right)}{10^{32}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 5 B) 8 C) 13 D) $4\cdot10^{32}$ E) $4\cdot10^{33}$

3.

$$a=\sqrt{2}+1$$

olduğuna göre, $a(a-1)(a-2)$ çarpımının sonucu kaçtır?

A) $\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) $3-2\sqrt{2}$ D) $3+2\sqrt{2}$ E) 1

4.

$$\sqrt{10}\left(\sqrt{6,4}+\sqrt{0,4}\right)$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\sqrt{3,8}$ B) $\sqrt{68}$ C) 6 D) 8 E) 10

Diğer sayfaya geçiniz.

5.

$$\frac{\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)}{\left(x^3-y^3\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) xy B) x + y C) x − y

D) $\frac{x-y}{x+y}$ E) $\frac{x+y}{x-y}$

6.

$$4-4^x+3^x \cdot 4^{x+1}=\frac{48}{12^{1-x}}$$

olduğuna göre, x kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

7. Kesişimleri boş küme olmayan M ve N kümeleri için,

s(N) = 4s(M)

s(N \ M) = 5s(M \ N)

olduğuna göre, N kümesi en az kaç elemanlıdır?

A) 12 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

8. Her x gerçel sayısı için,

$$2x-4=ax(x-1)+bx(x+1)+c\left(x^2-1\right)$$

olduğuna göre, a · b · c çarpımı kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

9. 3, 7 ve 8 ile kalansız bölünebilen 4000 den küçük sayıların en büyüğünün onlar basamağındaki rakam kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

10. a3bc ve a4bc dört basamaklı birer doğal sayıdır.

a3bc sayısı 15 e bölündüğünde kalan 6 olduğuna göre, a4bc sayısı 15 e bölündüğünde kalan kaç olur?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

Diğer sayfaya geçiniz.

11. $\frac{1}{2} < a < b < \frac{11}{4}$ sıralamasında birbirini izleyen sayılar arasındaki farklar eşittir.

Buna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{7}{4}$ C) $\frac{11}{4}$ D) $\frac{13}{4}$ E) 1

12. $a < 0 < b$ olmak üzere,

$$k = \frac{b-a}{a}$$

gerçel sayısı veriliyor.

Buna göre, k sayısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\frac{-4}{3}$ B) $\frac{-2}{3}$ C) -1 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

13.

$$f(x) = |x-2| - |x|$$

olduğuna göre, $f(-1) + f(0) + f(1)$ toplamı kaçtır?

A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

14.

$$|9 - x^2| = |x - 3|$$

olduğuna göre, x in alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 2 E) 4

15. Dik koordinat düzleminin noktaları üzerinde bir Δ işlemi,

$$(a, b)\ \Delta\ (c, d) = (ac + bd,\ ad - bc)$$

şeklinde tanımlanıyor.

Buna göre, $(x, y)\ \Delta\ (1, -1) = (3, 5)$ eşitliğini sağlayan (x, y) ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-3, 5)$ B) $(3, 5)$ C) $(1, -4)$ D) $(-1, -4)$ E) $(-1, 0)$

Diğer sayfaya geçiniz.

16. 1 den 54 e kadar olan tamsayılar soldan sağa doğru yan yana yazılarak

$a = 1\,2\,3\,4 \ldots 9\,10\,11\,12 \ldots 53\,54$

şeklinde 99 basamaklı bir a sayısı oluşturuluyor.

Buna göre, a nın soldan 50. rakamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 9

17. **1, 2, 3, 4 ve 5 rakamları kullanılarak yazılabilen, rakamları tekrarlı veya tekrarsız tüm iki basamaklı tek sayıların toplamı kaçtır?**

A) 495 B) 497 C) 503 D) 515 E) 523

18. Tek tür mal üreten bir atölyede makinelerden biri a saatte b birim mal üretiyor.

Aynı süre içinde bu makinenin c katı mal üreten başka bir makina, b birim malı kaç saatte üretir?

A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{a}{c}$ C) $\frac{b}{c}$ D) $\frac{ab}{c}$ E) $\frac{bc}{a}$

19. Bir gruptaki kız sporcuların yaş ortalaması 15, erkek sporcuların yaş ortalaması 24 tür.

Kızların sayısı erkeklerin sayısının 2 katı olduğuna göre, bu grubun yaş ortalaması kaçtır?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 20 E) 22

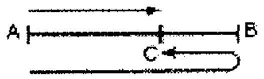
20. Oya 12 yaşında, Gül x yaşındadır.

Gül $3x+10$ yaşına geldiğinde, Oya kaç yaşında olur?

A) $x+10$ B) $x+14$ C) $x+24$ D) $2x+10$ E) $2x+22$

Diğer sayfaya geçiniz.

21.



Hızları saatte 60 km ve 120 km olan iki araç A kentinden B kentine doğru aynı anda hareket ediyor. Hızlı olan araç B ye varıp hiç durmadan geri dönüyor ve C noktasında diğer araçla karşılaşıyor.

Buna göre, $\frac{|BC|}{|AC|}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

22. A torbasındaki topların % 64 ü, B torbasındaki topların da % 36 sı beyazdır.

Bu iki torbadaki topların tümünün % 48 i beyaz olduğuna göre, A torbasındaki top sayısının, B torbasındaki top sayısına oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

23. % 30 u su olan a litrelik bir karışıma 20 litre daha su ilave ediliyor.

Elde edilen yeni karışımın % 50 si su olduğuna göre, a kaçtır?

A) 20 B) 25 C) 40 D) 50 E) 55

24. Taşımacılık yapan bir firma 300 milyar TL ödeyerek fiyatları 15 milyar, 25 milyar ve 30 milyar TL olan araçlardan toplam 12 adet satın alıyor.

Fiyatı 15 milyar ve 25 milyar TL olan araçlardan eşit sayıda alındığına göre, fiyatı 30 milyar TL olan araçtan kaç tane alınmıştır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Diğer sayfaya geçiniz.

25. Bir malın alış fiyatının 3 katı, satış fiyatının $\frac{5}{2}$ sine eşittir.

Bu mal, % kaç kârla satılmaktadır?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

26. Yükseköğrenim için A ve B ülkelerine gönderilmek üzere 5 öğrenci seçilmiştir.

Her iki ülkeye en az birer öğrenci gideceğine göre, bu 5 öğrenci kaç farklı gruplama ile gönderilebilir?

A) 10 B) 20 C) 25 D) 30 E) 40

27. Ali ile Burak, birlikte çalışarak 10 saatte bitirebilecekleri bir işi yapmaya başlıyorlar. İkisi birlikte 4 saat çalıştıktan sonra Ali işi bırakıyor.

Geriye kalan işi Burak 9 saatte bitirdiğine göre, bu işin tümünü Ali tek başına kaç saatte bitirebilirdi?

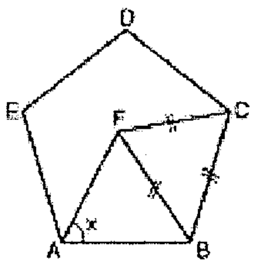
A) 30 B) 26 C) 25 D) 24 E) 18

28. Bir sınıfta matematik sınavında aldığı puan 2, 3 ve 4 olan öğrencilerden 8 kişilik bir grup oluşturulmuştur. Grupta bu üç puandan her birini alan en az bir öğrenci bulunmaktadır ve grubun puan ortalaması $\frac{25}{8}$ dir.

Bu grupta puanı 3 olan <u>en çok</u> kaç öğrenci bulunabilir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

29.



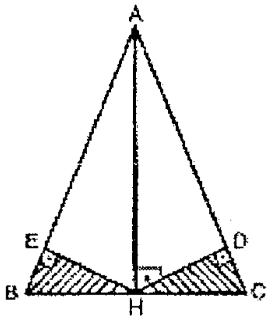
ABCDE bir düzgün beşgen
FBC bir eşkenar üçgen
$m(\widehat{FAB}) = x$

Yukarıdaki verilere göre, x kaç derecedir?

A) 60 B) 62 C) 66 D) 72 E) 74

Diğer sayfaya geçiniz.

30.



ABC ikizkenar üçgen

$|AB| = |AC|$

$[AH] \perp [BC]$

$[HD] \perp [AC]$

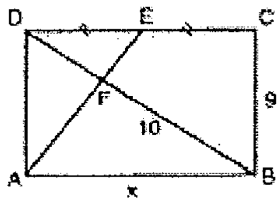
$[HE] \perp [AB]$

Yukarıdaki şekilde $|BC| = 4$ cm , $|AC| = 8$ cm olduğuna göre, taralı üçgenlerin toplam alanı kaç cm^2 dir?

A) 15 B) 17 C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

31.



ABCD bir dikdörtgen

$|DE| = |EC|$

$|BC| = 9$ cm

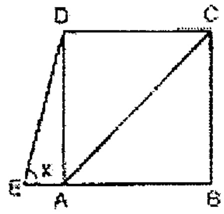
$|BF| = 10$ cm

$|AB| = x$

Yukarıdaki verilere göre, x kaç cm dir?

A) 6 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

32.



ABCD bir kare

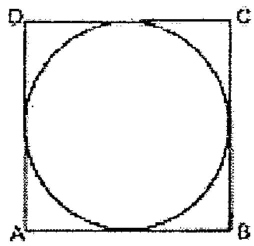
$m(\widehat{DEB}) = x$

Yukarıdaki şekilde $|AC| = |BE|$ olduğuna göre, x kaç derecedir?

A) 37,5 B) 45 C) 52,5

D) 60 E) 67,5

33.



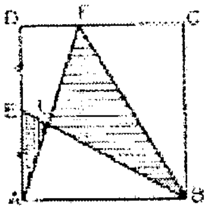
Şekildeki çember ABCD karesinin kenarlarına teğettir.

Çember üzerinde alınan bir P noktasının [AB] ve [AD] kenarlarına uzaklıkları sırasıyla 2 cm ve 1 cm olduğuna göre, çemberin yarıçapının alabileceği değerler toplamı kaç cm dir?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Diğer sayfaya geçiniz.

34.



ABCD bir kare

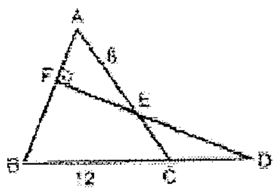
$[AF] \perp [ED]$

Şekildeki EAL üçgeninin alanı 5 cm^2, FLB üçgeninin alanı 25 cm^2 olduğuna göre, karenin bir kenarının uzunluğu kaç cm dir?

A) 8 B) 9 C) $2\sqrt{5}$

D) $4\sqrt{5}$ E) $5\sqrt{5}$

35.



$[DF] \perp [AB]$

$|BC| = 12$ cm

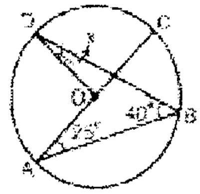
$|AE| = 6$ cm

Yukarıdaki şekilde ABC bir eşkenar üçgen olduğuna göre, $\dfrac{\text{Alan}(ECD)}{\text{Alan}(AFE)}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

36.



[AC], O merkezli çemberin çapı

$m(\widehat{DBA}) = 40°$

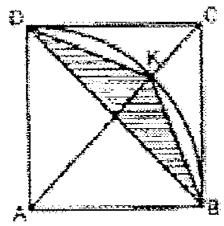
$m(\widehat{CAB}) = 25°$

$m(\widehat{ODB}) = x$

Yukarıdaki verilere göre, x kaç derecedir?

A) 25 B) 22 C) 20 D) 18 E) 15

37.



ABCD bir kare

[AC] ve [BD] köşegenler

Yukarıdaki şekilde, K noktası A merkezli, [AB] yarıçaplı çember ve [AC] köşegeni üzerindedir.

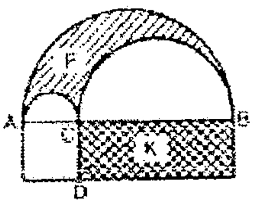
ABCD karesinin alanı 64 cm^2 olduğuna göre, BKD üçgeninin alanı kaç cm^2 dir?

A) 18 B) 16 C) 12

D) $32(\sqrt{2}-1)$ E) $16(\sqrt{2}-1)$

Diğer sayfaya geçiniz

38.

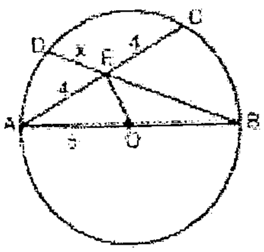


Şekildeki [AB] çaplı yarım çemberin içinde, [AC] ve [CB] çaplı yarım çemberlerin dışında kalan taralı P bölgesinin alanı p cm^2, kenar uzunlukları |CB| cm ve |CD| cm olan dikdörtgensel bölge K nın alanı k cm^2 dir.

|AC| = |CD| olduğuna göre, $\frac{p}{k}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) π E) 2π

39.



[AB], O merkezli çemberin çapı

|AE| = |EC| = 4 cm

|AO| = 5 cm

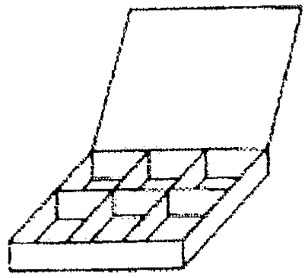
|DE| = x

Yukarıdaki verilere göre, x kaç cm dir?

A) $\frac{4\sqrt{13}}{13}$ B) $\frac{5\sqrt{15}}{15}$ C) $\frac{4\sqrt{17}}{17}$

D) $\frac{8\sqrt{17}}{17}$ E) $\frac{\sqrt{17}}{13}$

40.



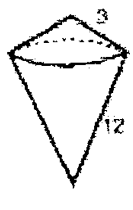
Şekildeki gibi 6 bölümlü ve tabanı kare olan kapaklı bir karton kutu yapılacaktır.

Bu kutunun yüksekliği 5 cm, tabanının bir kenarının uzunluğu 20 cm olacağına göre, kaç cm^2 karton gereklidir?

A) 1000 B) 1100 C) 1200

D) 1400 E) 1500

41.



Şekildeki gibi, koni biçiminde bir kapak ile koni biçiminde bir gövdeden oluşan kapaklı bir cisim yapılacaktır. Kapak koninin yanal ayrıtı 3 cm, yanal alanı 24 cm^2 dir.

Gövde koninin yanal ayrıtı 12 cm olduğuna göre, yanal alanı kaç cm^2 dir?

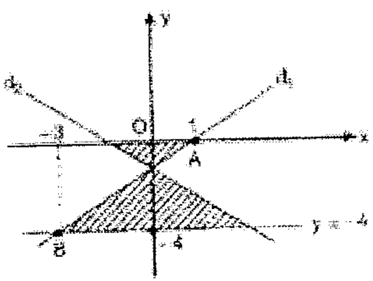
A) 96 B) 108 C) 116 D) 150 E) 384

Diğer sayfaya geçiniz.

42. Dik koordinat düzleminde, A(−5, 12) noktasının orijine göre simetriği A'(x, y) noktası olduğuna göre, A ile A' arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) 13 B) 26 C) 35 D) 45 E) 54

43.



Yukarıdaki şekilde, A(1, 0) ve B(−3, −4) noktalarından geçen d_1 doğrusu, bu doğrunun Oy eksenine göre simetriği olan d_2 doğrusu ve y = −4 doğrusu verilmiştir.

Buna göre, taralı bölgelerin toplam alanı kaç birim karedir?

A) 7,8 B) 9,5 C) 10 D) 12 E) 13

44. Her a gerçel sayısı için,

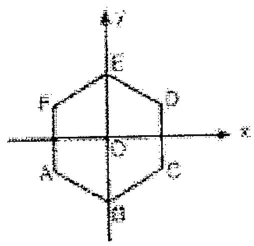
$$a(x+2) - x + y - 2 = 0$$

doğrusu, sabit bir P noktasından geçmektedir.

Buna göre, P noktasının Ox eksenine uzaklığı kaç birimdir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

45.



Yukarıdaki şekilde, ABCDEF düzgün altıgeninin merkezi orijindedir.

E noktasının ordinatı 10 olduğuna göre, D noktasının apsisi kaçtır?

A) $6\sqrt{3}$ B) $5\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

Diğer sayfaya geçiniz.

ANNEXE IV

PROGRAMME DE LA CLASSE DE SECONDE EN TURC ET EN FRANÇAIS

MATEMATİK
DERSİ PROGRAMI
(9-10-11. SINIF)

AÇIKLAMA:

Ders Geçme ve Kredi Sistemine göre dönemler esas alınarak hazırlanan ve halen Sınıf Geçme Sisteminde uygulanmakta olan bu program, 2455 ve 2470 sayılı Tebliğler Dergisindeki açıklamalar doğrultusunda sınıflar esas alınarak düzenlenmiş olup, uygulama bu doğrultuda yapılmaktadır.

Lise, Anadolu, Yab.Dil Ağır.Liselerinin tüm alanları ile Fen ve A.G.S.Liselerinin 9. Sınıflarında; Ort.Gen.Kül.Dersi, Fen Bilimleri, Türkçe-Mat. Alanları ile Fen Liselerinin 10 ve 11. Sınıflarında Alan Dersi, Sosyal Bil.Alanının 10. Sınıfında, Sanat (R/M), Spor Alanlarının 10. ve 11. Sınıfları ile A.G.S.Liselerinin Resim ve Müzik Bölümlerinde; Alan Seçmeli Ders

T.D.: 16.09.1991 - 2343
T.D.: 20.01.1992 - 2351
T.D.: 11.05.1992 - 2358

T.C.
MİLLİ EĞİTİM BAKANLIĞI
TALİM VE TERBİYE KURULU BAŞKANLIĞI

Karar Sayısı : 165 — Karar Tarihi: 07.09.1991
Karar Sayısı : 314 — Karar Tarihi: 25.12.1991
Karar Sayısı : 14 — Karar Tarihi: 28.01.1992

3.BÖLÜM : BAĞINTI, FONKSİYON, İŞLEM

AMAÇ 1: Kartezyen çarpımı ve analitik düzlemi kavrayabilme.

DAVRANIŞLAR :

1. Sıralı ikiliyi tanımlama.
2. Sıralı ikililerin eşitliğini tanımlama.
3. İki kümenin kartezyen çarpımını tanımlama.
4. Kartezyen çarpımının değişme özelliğinin olmadığını gösterme.
5. İki kümenin eleman sayıları ile bu iki kümenin kartezyen çarpımının eleman sayısı arasındaki ilişkiyi söyleme ve yazma.
6. Öklid çatısını (dik koordinat sistemini) tanımlama.
7. Analitik düzlemi tanımlama.
8. Analitik düzlemde bir noktanın koordinatlarını tanımlama.

AMAÇ 2: Kartezyen çarpım ve analitik düzlem ile ilgili uygulama yapa-bilme.

DAVRANIŞLAR :

1. Verilen eşit sıralı ikililerin bileşenlerindeki bilinmeyenleri bulma ve yazma.
2. Verilen en çok dörder elemanlı iki kümenin kartezyen çarpımını liste biçiminde yazma, şema üzerinde gösterme.

3. Verilen sonlu iki kümenin kartezyen çarpım kümesinin, eleman sayısını söyleme ve yazma.
4. A ve B gibi iki küme verildiğinde, AxB ve BxA kümeleri arasındaki ilişkiyi söyleme ve yazma.
5. Koordinatları verilen noktaları analitik düzlemde işaretleme.
6. Analitik düzlemde işaretlenen noktaların koordinatlarını Öklid çatısı üzerinde gösterme.

AMAÇ 3: Bağıntı, özellikleri ve çeşitleri bilgisi.

DAVRANIŞLAR :

1. İkili bağıntıyı tanımlama.
2. Bağıntının grafiğini tanımlama.
3. Bir bağıntının tersini (ters bağıntıyı) tanımlama.
4. Bir bağıntının yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme özelliklerini söyleme ve yazma.
5. Denklik bağıntısını tanımlama.
6. Denklik sınıflarını tanımlama.
7. Kısmi ve tam sıralama bağıntılarını tanımlama.

AMAÇ 4: Bağıntı ve özellikleriyle uygulama yapabilme.

DAVRANIŞLAR :

1. Ortak özellik yöntemiyle verilen bir bağıntıyı liste yöntemiyle yazma.
2. Verilen iki kümenin birinden diğerine kaç tane bağıntı yazılabileceğini bulma ve yazma.
3. Verilen bir bağıntının grafiğini çizme.
4. Verilen bir bağıntının tersini yazma.
5. Verilen bir bağıntının tersinin grafiğini çizme.
6. Verilen bir bağıntı ile tersinin grafiğini, aynı analitik düzlemde çizme ve aralarındaki ilişkiyi yazma.
7. Verilen bir bağıntının denklik bağıntısı olup olmadığını gösterme.
8. Verilen bir denklik bağıntısında denk elemanların oluşturduğu kümeleri yazma.
9. Verilen bir bağıntının kısmî sıralama bağıntısı olup olmadığını gösterme.
10. Verilen bir bağıntının tam sıralama bağıntısı olup olmadığını gösterme.

AMAÇ 5: Fonksiyonu, özelliklerini ve çeşitlerini kavrayabilme.

DAVRANIŞLAR :

1. Fonksiyonu tanımlama ve şema ile gösterme.
2. Bir fonksiyonun tanım kümesini, değer kümesini ve görüntü kümesini tanımlama.
3. Fonksiyonun grafiğini tanımlama.
4. İki fonksiyonun eşitliğini tanımlama.
5. Bire bir, örten, içine fonksiyonları tanımlama ve birbirlerine göre farklılıklarını belirtme.
6. Sonsuz kümeyi açıklama.
7. İki kümenin denkliğini açıklama.
8. Özdeşlik fonksiyonunu tanımlama.
9. Sabit fonksiyonunu tanımlama.
10. Sıfır fonksiyonunu tanımlama.

AMAÇ 6: Fonksiyonlar ve çeşitleri ile ilgili uygulama yapabilme.

DAVRANIŞLAR :

1. Verilen bir bağıntının fonksiyon olup olmadığını gösterme.
2. Verilen bir fonksiyonu şema ile gösterme.
3. Şema ile verilen bir fonksiyonu liste yöntemi veya kuralı ile yazma.
4. Verilen bir fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümelerini gösterme, grafiğini çizme.
5. Verilen iki fonksiyonun eşit olup olmadığını gösterme.
6. Verilen bir fonksiyonun türünü söyleme.
7. Verilen bir türden fonksiyon yazma.

AMAÇ 7: İşlem ve özelliklerini kavrayabilme

DAVRANIŞLAR :

1. İşlemi tanımlama.
2. İşlemin değişme özelliğini tanımlama.
3. İşlemin birleşme özelliğini tanımlama.
4. Bir işlemin diğer bir işlem üzerine dağılma özelliğini tanımlama.
5. İşleme göre birim (etkisiz) elemanı tanımlama.
6. İşleme göre bir elemanın tersini tanımlama.

AMAÇ 8: İşlem yapabilme becerisi.

DAVRANIŞLAR :

1. Verilen bir kümede tanımlanan bir işlemi, şema veya tablo ile gösterme.
2. Verilen bir kümede tanımlanan bir işlemin özelliklerini gösterme.
3. Verilen bir kümede tanımlanan bir işlemde belirtilen bir özelliğin bulunup bulunmadığını gösterme.
4. Verilen bir kümede tanımlanan bir işleme göre, birim elemanın olup olmadığını söyleme, varsa bu birim elemanı bulma.
5. Verilen bir kümede tanımlanan ve birim elemanı bulunan bir işleme göre, belirtilen bir elemanın tersini bulma.

AMAÇ 9: Fonksiyonlar kümesinde bileşke işlemini ve özelliklerini kavrayabilme.

DAVRANIŞLAR :

1. Fonksiyonlarda bileşke işlemini tanımlama.
2. Fonksiyonlarda bileşke işleminin değişme ve birleşme özelliklerinin olup olmadığını gösterme.
3. Bileşke işlemine göre birim (etkisiz) fonksiyonu tanımlama.
4. Bir fonksiyonun bileşke işlemine göre tersini tanımlama.

AMAÇ 10. Fonksiyonlar kümesinde işlem yapabilme.

DAVRANIŞLAR :

1. Verilen en çok üç fonksiyonun bileşkesini bulma.
2. Verilen bir fonksiyonun bileşke işlemine göre tersini bulma.
3. Verilen bir fonksiyon ile tersinin bileşkesini bulup yazma.
4. Verilen bir fonksiyon ile tersinin grafiğini aynı analitik düzlemde çizme ve aralarındaki ilişkiyi açıklama.
5. Verilen bir fonksiyonun tersinin tersini bulma ve sonucu söyleme.
6. Bir bileşke fonksiyon ile bileşenlerinden biri verildiğinde diğerini bulma ve yazma.

BAĞINTI, FONKSİYON, İŞLEM

1. Kartezyen Çarpım ve Analitik Düzlem
2. Bağıntılar
3. Fonksiyonlar
4. İşlemler
5. Fonksiyonlarda Bileşke İşlemi

AÇIKLAMA

İşlem ve özellikleri verildikten sonra fonksiyonlar kümesinde bileşke işlemi ele alınmalıdır. Birim fonksiyon ve ters fonksiyon bileşke işlemi esas alınarak gösterilmelidir. Bileşke işlemine göre f (x)'in tersi f^{1} (x) ile f (x) in ters bağıntısı olan f^{1} (x) fonksiyonlarının aynı olduğu vurgulanmalıdır.

Bire bir ve örten fonksiyonlardan faydalanarak, denk kümeler ve sonsuz kümeler örneklerle açıklanmalıdır.

Örnek: N= {0,1,2,3,...}, Ç={0,2,4,6,...} kümeleri için Ç⊂N olduğu halde f: N→Ç ye f (x) =2x fonksiyonu bire bir ve örten olduğundan N≡Ç ve bunların sonsuz kümeler olması gibi.

ANNEXE IV: programme officiel de la classe de seconde en français

CHAPITRE III : CORRESPONDANCE, FONCTION, LOI DE COMPOSITION[1]

OBJET N°5 : La capacité de comprendre la notion de fonction, ses caractéristiques et les propriétés particulières des fonctions.

COMPETENCES :

1. Définir la fonction et la représenter graphiquement à partir d'ensembles.

2. Définir l'ensemble de définition, l'ensemble image et l'ensemble d'arrivée.

3. Définir la représentation graphique dans un repère orthonormé d'une fonction.

4. Définir l'égalité des deux fonctions.

5. Définir les fonctions injectives, surjectives, non surjectives et déterminer leurs différences par rapport à l'une et l'autre.

6. Expliquer[2] les ensembles infinis.

7. Expliquer l'équipotence des deux ensembles.

8. Définir la fonction identique.

9. Définir la fonction constante.

10.Définir la fonction nulle.

OBJET N° 6 : La capacité de faire des applications liées aux fonctions et propriétés particulières des fonctions.

COMPETENCES :

1. Démontrer si une correspondance donnée est une fonction.

2. Représenter graphiquement à partir d'ensembles une fonction donnée.

3. Ecrire une fonction représentée à partir d'ensembles sous forme de liste.

4. Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble image et d'arrivée d'une fonction donnée et la représenter graphiquement dans un repère orthonormé.

5. Démontrer si les deux fonctions données sont identiques.

6. Dire le type d'une fonction donnée.

7. Ecrire un type de fonction donnée.

---

[1] Dans ce chapitre il y a dix objets dont quatre sont liés à la notion de fonction.

[2] Comme nous traduisons le programme mot à mot, nous avons remplacé le mot turc « açıklamak » par expliquer. Pourtant il nous semble mieux le remplacer par « définir ».

OBJET N° 9 : La capacité de comprendre la composition des fonctions et ses propriétés dans l'ensemble des fonctions.

COMPETENCES :

1. Définir l'opération de la composée dans les fonction.

2. Démontrer si l'opération de composée est associative et commutative dans les fonctions.

3. Définir la fonction identique à partir de l'opération de la composée.

4. Définir l'inverse d'une fonction à partir de l'opération de la composée.

OBJET N° 10 : La capacité de faire des opérations dans l'ensemble des fonctions.

COMPETENCES :

1. Trouver la composée des trois fonctions au maximum proposées.

2. Trouver l'inverse d'une fonction donnée à partir de l'opération de composée.

3. Trouver la composée d'une fonction donnée et son inverse.

4. Représenter graphiquement une fonction donnée et son inverse dans un même plan analytique et expliquer la relation entre eux.

5. Trouver l'inverse de l'inverse d'une fonction et dire le résultat.

6. Trouver et écrire la fonction f lorsqu'on a donné la composée fog (ou gof) et g.

EXPLICATION :

Après avoir présenté la loi de composition interne et ses caractéristiques il faut faire introduire l'opération de composée. La fonction identique et l'inverse de la fonction doivent se présenter à partir de l'opération de composée. Il faut accentuer sur l'égalité de l'inverse de la fonction f et l'inverse de la correspondance f suivant l'opération de composée et expliquer des ensembles équipotents et des ensembles infinis à travers d'exemples grâce aux fonctions bijectives. Exemple : Pour N={0,1,2,3…..}, P={0,2,4,6…..} et $P \subset N$ $f : N \to P$ est définie pour tout x de N par f(x)=2x. Comme la fonction f est bijective, donc $N \equiv P$ et les ensembles N et P sont les ensembles infinis.

ANNEXE V

QUESTIONNAIRES :

1.Questionnaires proposés aux élèves sur les fonctions

2. Questionnaires proposés aux enseignants sur l’enseignement des fonctions

3. Questionnaires proposés aux universitaires sur l’enseignement des mathématiques

Annexe V-1.1 : premier questionnaire-élèves sur les fonctions

İlker GÖKMEN **LİSE ANKETİ** D32 - ? (1)

Bu anket, "*Dersaneler ve liselerdeki matematik dersinde,öğretmen ve öğrenci pratiklerinin, lise öğrencileri seviyesinde karşılaştırmalı olarak incelenmesi*"adli doktora tez çalışmasının ikinci kısmi olan öğrenci ve öğretmenlerin matematik öğretimi ve eğitimi konusundaki görüş ve düşüncelerini ortaya çıkarılması için hazırlanmıştır. Sorulara içtenlik ve samimiyetle cevaplandırdığınız ve bu çalışma için göstermiş olduğunuz işbirliğinden dolayı size teşekkür ederiz.

1. Mars'dan 10 kişilik bir grup geliyor. Bu grup içersinde hiç kimse fonksiyon konusunda hiçbir şey bilmiyor. Bu gruba fonksiyonu nasıl anlatırdınız?

2. $f: A \to B$ ve $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $f(x) = 2x + 4$ fonksiyonu verilsin. $f(A)$ görüntü kümesini bulunuz.

3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x+7}{2}$ fonksiyonu veriliyor. $f^{-1}(x)$'i bulunuz.

4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = x + 6$ veriliyor. $f \circ g(x)$'i bulunuz.

5. $f \circ g(x) = 6x+4$ ve $g(x) = 2x+1$ ise $f(x)$'i bulunuz.

6. $f: R - \{\frac{2}{3}\} \rightarrow R - \{\frac{2}{3}\}$, $f(x) = \dfrac{2x+6}{3x-2}$ fonksiyonu verilsin.

$f^{-1}(2) = ?$

7. $f: A \rightarrow B$, $f(x) = 2x^2+6$ ve $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ verilsin. f fonksiyonunun birebir olması için tanım kümesinden hangi eleman çıkarılmalıdır?

Matematik dersinde okulda almış olduğunuz sonuçları nasıl değerlendiriyorsunuz?

☐ İyi ☐ Orta ☐ Kötü

<u>Aşağıdaki bilgileri eksiksiz doldurunuz.</u>

Ad............................... Soyad:..

i)Liseniz.......................... Dersaneniz.............................

ii) Sınıfınız?

☐ Lise 1; ☐ Lise 2; ☐ Lise3; ☐ Mezun

iii) Lisedeki alanınız?

☐ Sözel; ☐ Sayısal; ☐ Eşit ağırlık; ☐ Dil;

☐ Diğer(belirtiniz...)

iv) Tercih yapacağınız alan?

☐ Sözel; ☐ Sayısal; ☐ Eşit ağırlık; ☐ Dil;

☐ Diğer(belirtiniz...)

v) Lise I ve II. sınıf akademik ortalamanız kaçtır?(1. ve 2. yazılı sonucunu yazınız)

Lise I....................... Lise II.....................

Lise III.................... (mezun iseniz)

vi) Cinsiyetiniz? ☐ Erkek ☐ Kız

vii) Yasiniz......................

viii) Üniversite sınavına kaçıncı girişiniz?

☐ İlk girişim ;☐ İkinci ;☐ Üçüncü ; ☐ Üçten fazla

ix) Son deneme Puanı:.......................... (Dersaneye gidenler için)

Annexe V-1.2 Deuxième questionnaire proposé aux élèves sur les fonctions

Mehmet Ekiş

LİSE ANKETİ 2

EKB - Kız ①

Bu anket, "*Dersaneler ve liselerdeki matematik dersinde,öğretmen ve öğrenci pratiklerinin, lise öğrencileri seviyesinde karşılaştırmalı olarak incelenmesi*"adli doktora tez çalışmasının ikinci kısmi olan öğrenci ve öğretmenlerin matematik öğretimi ve eğitimi konusundaki görüş ve düşüncelerini ortaya çıkarılması için hazırlanmıştır. Sorulara içtenlik ve samimiyetle cevaplandırdığınız ve bu çalışma için göstermiş olduğunuz işbirliğinden dolayı size teşekkür ederiz.

1. Bir f fonksiyonu "Her bir pozitif tamsayıyı kendisi ile çarpımsal tersinin toplamına götürüyor." şeklinde tanımlanmıştır. Bu fonksiyonu ve $f(1/2)$'nin değerini bulunuz.

2. $f(2x+3) = 3x+2$ olduğuna göre $f(0)$ kaçtır?

3. $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{x-2}{x+1}$ olduğuna göre, uygun koşullarda $f(x)$'i bulunuz.

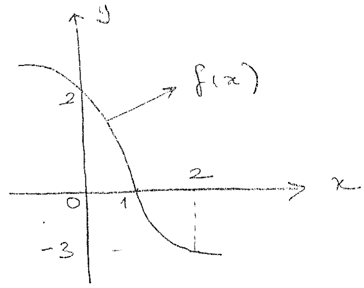
4. $f(x) = x^2 - 2x + 1$ olduğuna göre $f(x+1)$'in değerini bulunuz.

5. $f(x) = ax+b$, $f^{-1}(3)=4$, $f^{-1}(2)=5$ olduğuna göre, $a \cdot b$ çarpımını bulunuz.

6. $f(x) = ax + bx + 2$, $f(-2) = 5$ olduğuna göre $f(2)$ kaçtır?

7. $f(x) = (a+2)x + 8$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre, a kaçtır?

8.



Yandan grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu $[0,2]$'de birebir ve örtendir. Buna göre

$$\frac{f(2) + f^{-1}(2)}{f(f(1))} = ?$$

Matematik dersinde okulda aldığınız notları nasıl değerlendiriyorsunuz?

( ) İyi ( ) Orta ( ) Kötü

<u>Aşağıdaki bilgileri eksiksiz doldurunuz</u>

Ad............................ Soyad ....

i) Liseniz.......................... Dershaneniz..............................

ii) Sınıfınız?

( ) Lise 1; ( ) Lise 2; ( ) Lise 3, ( ) Mezun

iii) Lisedeki alanınız?

( ) Sözel; ( ) Sayısal, ( ) Eşit ağırlık; ( ) Dil;

( ) Diğer(belirtiniz...)

iv) Tercih yapacağınız alan?

( ) Sözel; ( ) Sayısal; ( ) Eşit ağırlık; ( ) Dil,

( ) Diğer(belirtiniz...)

v) Lise I ve II. sınıf akademik ortalamanız kaçtır? (1. ve 2. yazılı sonucunu yazınız)

Lise I...................... Lise II......................

Lise III .... (mezun iseniz)

vi) Cinsiyetiniz? ( ) Erkek ( ) Kız

vii) Yaşınız........................

viii) Üniversite sınavına kaçıncı girişiniz?

( ) İlk girişim ; ( ) İkinci ; ( ) Üçüncü , ( ) Üçten fazla

ix) Son deneme Puanı.......................... (dershaneye gidenler için)

Annexe V-1.3 : questions des questionnaires proposés aux élèves sur les fonctions en français

Questionnaire 1

1.Il y a un groupe de dix personnes qui viennent de Mars. Ils ne connaissent rien du tout sur la notion de la fonction. Comment vous leur racontez ce qu'est une fonction ?

2.Trouver l'ensemble d'arrivée de la fonction f si $f: A \to B$, *et* $A=\{0,1,2,3\}$, $f(x)=2x+4$

3.Définir la fonction f^{-1} si $f\colon R \to R$, $f(x)=\dfrac{3x+7}{2}$

4.Trouver la fonction *fog si f : IR→IR est définie pour tout x de IR par f(x)=2x+1 et g :IR→IR est définie pour tout x de IR par g(x)=x+6.*

5.Trouver la fonction f si *fog est définie par fog(x)=6x+4 et g(x)=2x+1*

6.Trouver l'image de 2 par f^{-1} si $f: R - \left\{\frac{2}{3}\right\} \to R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ $f(x) = \dfrac{2x+6}{3x-2}$ *et* $2 \in D_g{}^{-1}$

7.Soit $f: A \to B$, *est définie par* $f(x)=2x^2+6$ *et* $A=\{-1,0,1,2,3\}$. Pour avoir une fonction injective quel élément on doit supprimer de l'ensemble de définition A ?

Questionnaire 2

1.Si on définit la fonction *f* comme la suivante « *f* est une fonction qui fait correspondre à chaque nombre positif la somme de ce nombre et son inverse, écrire cette fonction et l'image de 1/2 par *f*.

2. Calculer l'image de 0 par f si pour tout x $f(2x+3) = 3x+2$

3.Définir f(x) dans les conditions convenables si $f(\frac{x+1}{x-2})=\frac{x-2}{x+1}$

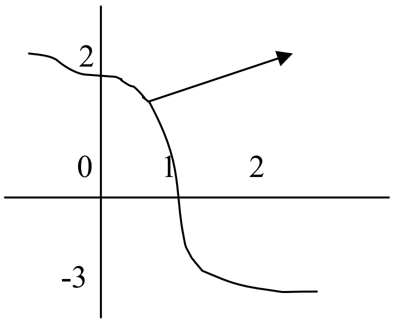
4.Trouver l'image de x+1 par f si $f(x)=x^2-2x+1$

5.Si $f(x)=ax+b$, $f^{-1}(3)=4$, $f^{-1}(2)=5$ trouver le produit de a et b

6.Calculer l'image de 2 par f si $f(x)=ax+bx+2$, $f(-2)=5$

7.Si la fonction f est constante et $f(x)=(a+2)x+8$ trouver le nombre a

8.



Soit f la fonction définie sur [0,2] et bijective déterminer graphiquement la valeur de

$$\frac{f(2)+f^{-1}(2)}{f(f(1))}=?$$

9.Trouver la fonction $f^{-1}(x)$ **si** $f(x):R-\{-1\}\to R-\{3\}$, $x=\frac{f(x)+2}{3-f(x)}$

ANNEXE V-2: questionnaires-enseignants sur l'enseignement des fonctions

QUESTIONNAIRES PROPOSES AUX ENSEIGNANTS SUR LA NOTION DE FONCTION

Ce questionnaire n'a pas pour but de vous juger, mais d'établir si les questions posées permettent de mettre à jour les représentation des enseignants sur la notion de fonction. Les résultats sera utilisés dans notre thèse du doctorat intitulée « Enseignement des mathématiques actuelles en Turquie». Pour répondre aux questions si la place indiquée n'est pas suffisante. Continuez derrière les pages en précisant le numéro de question. Merci pour votre collaboration.

<u>1. Depuis combien d'années êtes-vous enseignant?</u>

<u>2.Jusqu'à maintenant avez-vous enseigné quelles classes? Et combien d'années?</u>

<u>3.Avez-vous consulté les textes officiels et les programmes avant de commencer l'enseignement de la fonction Oui/Non/Pourquoi?</u>

Oui :..

Non:..

<u>4. Ce chapitre vous parait-il un chapitre: très important, important, peu important, sans importance/pourquoi?</u>

☐ Très important

☐ Important

☐ Peu important

☐ Sans important

Pourquoi..
....
....

<u>5. A votre avis, quels sont les objectifs principaux de ce chapitre en terme de connaissances et de savoir-faire des élèves?</u>

<u>6. Quelles sont les principales erreurs et difficultés auxquelles vous avez-vous du face?</u>

<u>7. Certaines erreurs vous semblent-t-elles induites par des connaissances antérieures? Si oui, préciser</u>

<u>8. Quelles ressources avez-vous utilisé pour préparer votre enseignement?</u>

<u>9. Comment avez-vous fait pour introduire la fonction? Décrivez les activités éventuellement proposées.</u>

<u>10. Pouvez-vous citer trois exercices (activités) que vous avez proposées aux élèves en classe et qui vous semblent particulièrement représentatifs du chapitre?</u>

<u>11. Pouvez-vous citer un exercice que vous avez proposé en contrôle?</u>

i) L'établissement où vous travaillez ?

ĩ Au dérsané ;ĩ Au lycée ;ĩ Avant au lycée, maintenant dérsané ;ĩ Avant au dérsané, maintenant lycée

ii) Votre sexe ?
ĩ Homme ĩ Femme

iii) Votre âge ?…………………

iv) Le dernier diplôme que vous avez obtenu?

ĩ Licence ; ĩ DEA ĩ Autres (préciser ………………………………………)

Annexe V-3 : Questionnaires-étudiants sur l'enseignement des mathématiques

QUESTIONNAIRES PROPOSES AUX ETUDIANTS

Cette enquête n'a pas pour but de vous juger, mais d'établir si les questions posées permettent de mettre à jour des pensées des étudiants sur l'enseignement des mathématiques au lycée, au dérsané et à l'université. En déclarent que toutes les phrases que vous écrivez sont très importantes pour nous, nous vous invitons à partager avec nous vos exemples concrets. Pour répondre aux questions si la place distinguée n'est pas suffisante. Continuez en précisant le numéro de question derrière les pages. Merci pour votre collaboration.

1.Selon vous pourquoi on se sent le besoin d'apprendre ou de faire apprendre les mathématiques ?

....
....
....
....
....
....
....
....

2. D'après vous quelles sont les différences entre les mathématiques effectuées aux lycées, aux dérsanés, à l'université ?

....
....
....
....
....
....
....
....

3. Avant de commencer vos études supérieures qu'est-ce que vous pensiez sur les mathématiques et maintenant qu'est-ce que vous en pensez ?

....
....
....
....
....
....
....
....

4. Est-ce qu'il est toujours possible de dire qu'un élève qui répond correctement à toutes les questions de mathématiques au concours va réussir dans ses études supérieures ? Pourquoi ?

....
....
....
....

....
....
....
....

5. Parmi les étudiants de mathématiques à l'université un dialogue se passe comme ci-dessous :

Ebru : à cause de notre système de l'enseignement on a appris les mathématiques dans le dérsané seulement pour réussir au concours au lieu d'apprendre sérieusement quelque chose. Maintenant je rencontre beaucoup de difficultés, les cours m'apparaissent très abstraits et je déteste interpréter, prouver des théorèmes, expliquer des relations.

Canan : je ne pense pas comme toi. Cet enseignement dont j'ai déjà profité au concours est encore utile pour moi. Moi je crois que l'enseignement de dérsané m'a assuré différentes façons de penser.

Savaş : Moi je vous assure que je suis très étonné. Quant j'étais au lycée j'ai appris une certaine mathématique pour passer en classe suivante, Quant je suivais le dérsané, je me suis occupé d'une autre pour réussir au concours et maintenant je suis en face d'une troisième mathématique qui contient des lettres comme a, b, c…

Avec quel (ou quels) élève(s) êtes-vous d'accord ? Précisez votre réponse en interprétant.

....
....
....
....
....
....
....
....

6.Si on vous demande des conseils sur l'enseignement des mathématiques au lycée et dérsané, qu'est-ce que vous diriez ?

....
....
....
....
....
....
....
....

7. Comment vous estimez-vous en mathématiques au lycée et à l'université?

A l'université......... أ bon;أ moyen;أ mauvais / Au lycée....... أ bon;أ moyen;أ mauvais

<u>Veuillez répondre complètement aux questions ci-dessous</u>

i) Combien d'années vous avez allé au dérsané ?

أ plus de trois ans أ trois ans أ deux ans أ un an أ jamais

ii) Combien de questions vous avez répondu correctement au concours ?…………

iii) Votre université………………………..

iv) Votre discipline………………………

v) Vous êtes à quelle année ?

vi) Quel est votre sexe ?

أ Masculin أ Féminin

vii) Quel est votre âge ?…………………..